

Masterarbeit

Heterogene Mehrskalenmethode für zeitabhängige Maxwellgleichungen

Bernhard Maier

08. Mai 2017

Erstgutachterin: Prof. Dr. Marlis Hochbruck
Zweitgutachter: Prof. Dr. Willy Dörfler

Diese Arbeit wurde betreut durch Prof. Dr. Marlis Hochbruck
und Dr. Christian Stohrer.

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen, die mich bei der Erstellung dieser Masterarbeit sowohl fachlich als auch persönlich unterstützt haben, bedanken.

Mein besonderer Dank gilt dabei Prof. Dr. Marlis Hochbruck, durch deren Lehrveranstaltungen zur numerischen Mathematik mein Interesse an diesem Themengebiet weiter verstärkt wurde. Zusätzlich gab sie mir die Möglichkeit, mich schon im Vorfeld als studentische Hilfskraft in ihrer Arbeitsgruppe mit der Heterogenen Mehrskalenmethode zu beschäftigen. Dies war eine außerordentlich gute Vorbereitung auf diese Arbeit.

Weiterhin danke ich Dr. Christian Stohrer, durch dessen zahlreiche Hinweise und Anregungen diese Arbeit erst möglich wurde. Außerdem war mir seine intensive Korrektur eine große Hilfe.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Maxwell-Gleichungen	9
2.1	Maxwell-Gleichungen in Differentialform	9
2.2	Lineare Maxwell-Gleichungen	11
2.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	13
3	Grundlagen	21
3.1	Konvergenz in zwei Skalen	24
3.2	Eigenschaften von Grenzwerten in zwei Skalen	30
4	Analytische Homogenisierung	39
4.1	Zeitabhängige Maxwell-Gleichungen in lokal periodischen, linearen, stationären und isotropen Medien	39
4.2	Beschränktheit von Lösungen	41
4.3	Analytische Homogenisierungsergebnisse	44
5	Ortsdiskretisierung	57
5.1	Allgemeine diskrete Ansatzräume	59
5.2	Lagrange-Elemente	60
5.3	Nédélec-Elemente	61
6	Heterogene Mehrskalenmethode (HMM)	65
6.1	Herleitung	65
6.2	HMM-Materialparameter	71
6.3	Wohlgestelltheit	73
6.4	Fehleranalyse	74
7	Numerische Beispiele	83
7.1	Allgemeines Setting	83
7.2	Erstes Beispiel: Ohne elektrische Stromdichte	85
7.3	Zweites Beispiel: Mit elektrischer Stromdichte	90
7.4	Drittes Beispiel: Vergleich zwischen exakter Lösung und HMM-Lösung	93
8	Zusammenfassung und Ausblick	95
	Literaturverzeichnis	97

Symbolverzeichnis

Im Folgenden wird der (schwache) Gradient einer Funktion f mit $\text{grad } f$ bezeichnet. Weiterhin sei $\text{curl } f$ die (schwache) Rotation und $\text{div } f$ die (schwache) Divergenz dieser Funktion. Schließlich bezeichnet Df die (schwache) Jakobimatrix von f . Durch einen an den jeweiligen Differentialoperator angehängten Subskript wird diejenige Variable gekennzeichnet, nach der partiell differenziert wird.

Zur Übersicht werden an dieser Stelle die in dieser Arbeit verwendeten Funktionenräume erläutert. Dabei bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ den Einheitswürfel.

$C_0^\infty(\Omega)$	glatte Funktionen mit kompaktem Träger in Ω
$C_\#^k(Y)$	k -fach stetig differenzierbare, periodische Funktionen auf Y
$H(\text{curl}, \Omega)$	Funktionen aus $L^2(\Omega)$ mit schwacher Rotation in $L^2(\Omega)$
$H(\text{curl}^2, \Omega)$	Funktionen $f \in H(\text{curl}, \Omega)$ mit $\text{curl } f \in H(\text{curl}, \Omega)$
$H_0(\text{curl}, \Omega)$	Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der $H(\text{curl}, \Omega)$ -Norm
$H_0(\text{curl}^2, \Omega)$	Funktionen $f \in H_0(\text{curl}, \Omega)$ mit $\text{curl } f \in H_0(\text{curl}, \Omega)$
$H(\text{div}, \Omega)$	Funktionen aus $L^2(\Omega)$ mit schwacher Divergenz in $L^2(\Omega)$
$L_\#^k(Y)$	periodische Funktionen aus $L^k(Y)$
$L^k(\Omega)$	Messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\int_\Omega f(x)^k dx)^{\frac{1}{k}} < \infty$
$W^{k,2}(\Omega)$	Funktionen aus $L^2(\Omega)$ mit schwacher Ableitung in $L^2(\Omega)$
$C_0^\infty(a, b; X)$	glatte Funktionen mit kompaktem Träger, die das Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in den Funktionenraum X abbilden
$C^k(a, b; X)$	k -fach stetig differenzierbaren Funktionen, die das Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ in den Funktionenraum X abbilden
$L^k(a, b; X)$	Funktionen $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ mit $(\int_a^b \ f(x)\ _X^k dx)^{\frac{1}{k}} < \infty$

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden lineare Maxwell-Gleichungen auf hochoszillatorischen Materialien untersucht. Dabei wird ein makroskopisches Verhalten der Parameter, welche dieses Material beschreiben, von einem hochoszillatorischen, periodischen Anteil überlagert. Die Periode dieses Anteils wird auch als Mikroskala bezeichnet. Diese ist um ein Vielfaches kleiner als die Größenordnung der Ausdehnung des betrachteten Gebiets, die im Folgenden auch Makroskala genannt wird.

Das Standardvorgehen bei der Finite-Elemente-Methode würde es erfordern, insbesondere auch die Mikroskala durch die Ortsdiskretisierung auflösen zu können. Dies ist jedoch problematisch, da aufgrund der unterschiedlichen Größenordnungen die Anzahl der zu betrachtenden Freiheitsgrade sehr groß werden kann. Deshalb wählt die Homogenisierungstheorie den Ansatz, die hochoszillatorischen Anteile zu eliminieren und das effektive Verhalten durch effektive Maxwell-Gleichungen zu beschreiben. Die dabei auftretenden effektiven Materialkoeffizienten können jedoch nur in Spezialfällen explizit bestimmt werden. Die Idee der Heterogenen Mehrskalennmethode besteht schließlich darin, diese effektiven Größen durch Lösung von Mikroproblemen an den Quadraturpunkten der Ortsdiskretisierung zu approximieren. Diese Diskretisierung muss dann lediglich das effektive Verhalten darstellen können. Die Auflösung der hochoszillatorischen Anteile auf dem gesamten betrachteten Gebiet kann vermieden werden.

In (Hochbruck u. a. 2016) wurde hierzu eine Heterogene Mehrskalennmethode für die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen zweiter Ordnung vorgestellt. Dabei muss ein Mikroproblem für die Inverse der magnetischen Permeabilität gelöst werden, welches deutlich komplexer als das klassische elliptische Mikroproblem für die elektrische Permittivität ist.

Ebenfalls für die Maxwell-Gleichungen zweiter Ordnung wurden in (Ciarlet u. a. 2017) und (Henning u. a. 2016) Heterogene Mehrskalennmethoden präsentiert. Dabei ist die Anwendung dieser Verfahren auf zeitharmonische Maxwell-Gleichungen beschränkt.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren setzt hingegen bei den zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen erster Ordnung an. Dabei kann die Verwendung des komplizierteren Mikroproblems für die inverse magnetische Permeabilität vermieden werden. Es wird stattdessen für beide Materialkoeffizienten je ein klassisches elliptisches Mikroproblem gelöst.

Gliederung

Das Vorgehen in dieser Arbeit ist in folgende Abschnitte gegliedert:

In Kapitel 2 wird zunächst das lineare Maxwell-System hergeleitet. Zusätzlich wird die Existenz einer eindeutigen Lösung unter Verwendung der Halbgruppentheorie gezeigt.

Im Anschluss wird in Kapitel 3 die Konvergenz in zwei Skalen definiert. Dazu werden weiterhin einige grundlegende Resultate zu diesem Konvergenzbegriff vorgestellt. Durch die Betrachtung verschiedener Differentialoperatoren und deren Verhalten beim Grenzübergang in zwei Skalen wird dieses Kapitel abgeschlossen.

1 Einleitung

Durch Zusammenführung der beiden vorherigen Abschnitte wird in Kapitel 4 das in dieser Arbeit betrachtete Modellproblem formuliert. Die lokal-periodischen Materialkoeffizienten dieses Problems weisen hochoszillatorische Schwankungen auf, die sich auch auf das elektrische und magnetische Feld auswirken. Ein wichtiges Resultat dieses Kapitels ist deshalb der Beweis der Beschränktheit dieser Felder und ihrer Ableitungen unabhängig von diesen Schwankungen. Ausgehend davon kann schließlich eine Homogenisierung der Maxwell-Gleichungen durchgeführt werden. Diese führt zu einem effektiven Maxwell-System, wobei aus den ursprünglichen Materialparametern effektive Koeffizienten berechnet werden, die das makroskopische Materialverhalten beschreiben.

Um die Maxwell-Gleichungen numerisch zu lösen, werden in Kapitel 5 zunächst allgemeine diskrete Ansatzräume eingeführt. Basierend darauf werden anschließend die weit verbreiteten Lagrange-Elemente und die speziell für den Funktionenraum $H(\text{curl}, \Omega)$ entwickelten Nédélec-Elemente vorgestellt.

Kapitel 6 stellt den Kern dieser Arbeit dar. Dort wird die neu entwickelte Heterogene Mehrskalenmethode für die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen vorgestellt. Es wird gezeigt, dass dieses Verfahren wohldefiniert ist. Weiterhin wird eine Fehleranalyse für das dadurch erhaltene semidiskrete System durchgeführt.

In Kapitel 7 werden numerische Beispiele präsentiert. Die dabei verwendete Implementierung der Heterogenen Mehrskalenmethode basiert auf der auf C++ aufbauenden Software-Bibliothek `deal.II`. Insbesondere werden dadurch die im vorigen Kapitel nachgewiesenen Fehlerordnungen untermauert.

Abschließend wird in Kapitel 8 ein Ausblick über mögliche Erweiterungen der vorgestellten Resultate gegeben.

2 Maxwell-Gleichungen

In diesem Kapitel wird das Differentialgleichungssystem der Maxwell-Gleichungen eingeführt und die Bedeutung seiner Bestandteile erläutert. Dabei wird im ersten Unterkapitel das Maxwell-System in der Differentialform präsentiert und es werden einige vereinfachende Annahmen vorgestellt. Im nächsten Abschnitt werden die linearen Maxwell-Gleichungen vorgestellt, deren eindeutige Lösbarkeit schließlich Inhalt des letzten Unterkapitels ist.

Dabei entspricht das Vorgehen in diesem Kapitel der Vorgehensweise in (Hochbruck u. a. 2017). Insbesondere die Resultate zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sind daraus entnommen. Zusätzlich wird für die Erklärung der Maxwell-Gleichungen und den Ausführungen zu ihrer physikalischen Bedeutung (Schwab 2013) verwendet.

2.1 Maxwell-Gleichungen in Differentialform

Um Maxwells System partieller Differentialgleichungen auf einem beschränkten, einfach zusammenhängenden Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ formulieren zu können, werden zunächst folgende physikalische Größen definiert:

- die magnetische Feldstärke: $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die elektrische Feldstärke: $E : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die magnetische Flussdichte: $B : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die elektrische Flussdichte: $D : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die elektrische Stromdichte: $J : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,
- die elektrische Ladungsdichte: $\rho : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Damit können nun die Maxwell-Gleichungen in Differentialform aufgestellt werden, die sich aus den folgenden vier Gesetzen zusammensetzen:

$$\partial_t B = -\operatorname{curl} E \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t D = \operatorname{curl} H - J \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad (2.1b)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \quad (2.1c)$$

$$\operatorname{div} D = \rho \quad \text{in } (0, T) \times \Omega. \quad (2.1d)$$

Hierbei wird Gleichung (2.1a), welche die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte unter einer räumlichen Änderung der elektrischen Feldstärke beschreibt, als Faradaysches Induktionsgesetz bezeichnet. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.1b) beschreibt die Entstehung eines Magnetfeldes unter dem Einfluss elektrischer Ströme. Schließlich folgen die Gaußschen Gesetze (2.1c) für das Magnetfeld und (2.1d) für das

2 Maxwell-Gleichungen

elektrische Feld, welche Aussagen über die jeweiligen Felder enthalten. So sind magnetische Feldlinien nach (2.1c) stets geschlossen. Elektrische Feldlinien hingegen müssen wegen der nicht verschwindenden elektrischen Ladungsdichte ρ nicht geschlossen sein.

Ein weiteres physikalisches Gesetz erhält man aus obigem Gleichungssystem durch Anwendung der Divergenz auf (2.1b) und Differentiation von (2.1d) nach der Zeit. Damit erhält man unter der Bedingung, dass alle Funktionen genügend glatt sind

$$\partial_t \rho \stackrel{(2.1d)}{=} \partial_t \operatorname{div} D = \operatorname{div} \partial_t D \stackrel{(2.1b)}{=} \operatorname{div} \operatorname{curl} H - \operatorname{div} J. \quad (2.2)$$

Da die Hintereinanderausführung von Differentialoperatoren auch an späterer Stelle nochmals auftaucht, werden dazu zwei Rechenregeln in folgendem Lemma zusammengefasst.

Lemma 2.1. *Es seien $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ genügend glatte Funktionen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \operatorname{grad} \varphi &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \operatorname{curl} \Phi &= 0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Genügend glatt bedeutet in obigem Lemma und auch an späteren Stellen, an denen die Hintereinanderausführung von Differentialoperatoren auftaucht, dass diese jeweils wohldefiniert ist.

Es folgt damit aus (2.2) die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega. \quad (2.3)$$

Das folgende Lemma zeigt, dass mit geeigneten Anfangsbedingungen die beiden Gleichungen (2.1c) und (2.1d) durch diese Kontinuitätsgleichung ersetzt werden können. Dieses Lemma entspricht (Hochbruck u. a. 2017, Proposition 1.1, S. 9).

Lemma 2.2. *Es seien H, E, B, D genügend glatte Lösungen von (2.1a) und (2.1b). Gilt (2.3) für $t \in (0, T) \subset \mathbb{R}_+$ und gelten (2.1c) und (2.1d) zur Zeit $t = 0$, also*

$$\operatorname{div} B(0) = 0, \quad \operatorname{div} D(0) = \rho(0) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

so gelten (2.1c) und (2.1d) auch für alle Zeiten $t \in (0, T)$.

Beweis. Zunächst gilt für (2.1c) mit $t \in (0, T)$

$$\operatorname{div} B(t) = \operatorname{div} B(0) + \operatorname{div} \int_0^t \partial_t B(s) ds \stackrel{(2.4), (2.1a)}{=} 0 - \int_0^t \operatorname{div} \operatorname{curl} E(s) ds = 0.$$

Dabei wird im letzten Schritt Lemma 2.1 eingesetzt.

Für (2.1d) gilt auf ähnliche Weise unter Verwendung von Lemma 2.1 für $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D(t) &= \operatorname{div} D(0) + \operatorname{div} \int_0^t \partial_t D(s) ds \\ &\stackrel{(2.4), (2.1b)}{=} \rho(0) + \int_0^t \operatorname{div} \operatorname{curl} H(s) - \operatorname{div} J(s) ds \stackrel{(2.3)}{=} \rho(0) + \int_0^t \partial_t \rho(s) ds = \rho(t). \end{aligned}$$

□

2 Maxwell-Gleichungen

Somit verbleiben unter der Annahme (2.3) nur 6 unabhängige Gleichungen aus (2.1), um die 12 Unbekannten H , E , B , D zu bestimmen. Um dennoch ein wohlgestelltes Problem zu erhalten, müssen zusätzliche Gleichungen hinzugefügt werden. Dies geschieht mithilfe von Modellgleichungen, die Informationen über das betrachtete Material beinhalten. Hierbei ist der generelle Ansatz, Funktionen für die beiden Flussdichten B und D in Abhängigkeit der Feldstärken H und E zu formulieren. Dazu wird die magnetische Permeabilität $\boldsymbol{\mu} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und die elektrische Permittivität $\boldsymbol{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eingeführt. Eine Zeitabhängigkeit dieser beiden physikalischen Größen wird in dieser Arbeit nicht betrachtet, was der Beschränkung auf stationäre Medien entspricht. Im Spezialfall eines zusätzlich linearen Mediums erhält man damit die beiden Modellgleichungen

$$B(t, x) = \boldsymbol{\mu}(x)H(t, x), \quad D(t, x) = \boldsymbol{\varepsilon}(x)E(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Eine weitere Vereinfachung dieser Beziehungen erhält man für den Spezialfall eines isotropen Mediums. Dies entspricht der Annahme, dass die Eigenschaften des Materials richtungsunabhängig sind. Dadurch können die zuvor matrixwertige Permeabilität und Permittivität durch skalare Funktionen $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden.

Auch die elektrische Stromdichte J kann unter der Annahme eines isotropen Mediums als Funktion der elektrischen Feldstärke E und einer externen Stromdichte $J_{\text{ext}} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ formuliert werden. Für stationäre, isotrope und lineare Medien gilt

$$J(t, x) = \sigma(x)E(t, x) + J_{\text{ext}}(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Im Folgenden wird stets angenommen, dass das betrachtete Medium nicht leitend ist. Dies entspricht $\sigma \equiv 0$, sodass sich obige Gleichung zu $J \equiv J_{\text{ext}}$ vereinfacht.

Bemerkung. Die Einschränkung auf isotrope Medien ist nicht unbedingt notwendig, da alle folgenden Schritte auch für anisotrope Materialkoeffizienten durchgeführt werden können. Dabei muss an einigen Stellen beachtet werden, dass die anisotropen, matrixwertigen Parameter im Gegensatz zu den isotropen, skalarwertigen Parametern nicht aus Skalarprodukten herausgezogen werden können. Dies ist jedoch lediglich eine Frage der Notation. An der grundsätzlichen Vorgehensweise ändert sich dadurch nichts.

2.2 Lineare Maxwell-Gleichungen

Zusammenfassend erhält man also für lineare, stationäre, isotrope und nicht leitende Medien aus Gleichungssystem (2.1) und (2.3) die linearen Maxwell-Gleichungen

$$\mu(x) \partial_t H(t, x) = -\text{curl } E(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.5a)$$

$$\varepsilon(x) \partial_t E(t, x) = \text{curl } H(t, x) - J_{\text{ext}}(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.5b)$$

$$\text{div}(\mu(x)H(t, x)) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.5c)$$

$$\text{div}(\varepsilon(x)E(t, x)) = \rho(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.5d)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \text{div } J_{\text{ext}} = 0 \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

2 Maxwell-Gleichungen

Zusätzlich zu den Anfangswerten werden noch Randbedingungen an die beiden Feldstärken H und E benötigt. Diese kann man für ein beschränktes Gebiet Ω umgeben von einem perfekt leitenden Material beispielsweise aus den Maxwell-Gleichungen in Integralform ableiten. Dieses Vorgehen wird in (Hochbruck u. a. 2017, Abschnitt 1.3.1, S. 11 f.) beschrieben. Als Ergebnis erhält man schließlich die beiden Randbedingungen

$$n \times E = 0, \quad n \cdot (\mu H) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.6)$$

wobei n den äußeren Normalenvektor des Gebiets bezeichnet. Ähnlich wie in Lemma 2.2 kann auch hier für die Randbedingung an H gezeigt werden, dass diese mit geeigneten Anfangsbedingungen automatisch für alle Zeiten erfüllt ist.

Lemma 2.3. *Es seien H, E genügend glatte Lösungen von (2.5) auf dem Zeitintervall $(0, T) \subset \mathbb{R}_+$. Weiter gelte $n(x) \cdot (\mu(x)H(0, x)) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt*

$$n \cdot (\mu H) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Beweis. Für eine spätere Umformung wird folgende Identität benötigt, die durch direktes Nachrechnen gezeigt werden kann:

$$n \cdot \text{curl } E = \text{div } (n \times E) - E \cdot \text{curl } n. \quad (2.7)$$

Es gilt mit ähnlichem Vorgehen wie im Beweis zu Lemma 2.2 für $(t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega$

$$\begin{aligned} n(x) \cdot (\mu(x)H(t, x)) &= \underbrace{n(x) \cdot (\mu(x)H(0, x))}_{=0} + \int_0^t \partial_t (n(x) \cdot (\mu(x)H(s, x))) \, ds \\ &= \int_0^t n(x) \cdot (\mu(x)\partial_t H(s, x)) \, ds \stackrel{(2.5a)}{=} - \int_0^t n(x) \cdot \text{curl } E(s, x) \, ds \\ &\stackrel{(2.7)}{=} - \int_0^t \text{div } (n(x) \times E(s, x)) - E(s, x) \cdot \text{curl } n(x) \, ds \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \int_0^t E(s, x) \cdot \text{curl } n(x) \, ds. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun wegen $\text{curl } n(x) = 0$. Dies gilt, da der Rand des Lipschitz-Gebiets Ω überall zumindest lokal mithilfe einer Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x, y, z) = 0$ angegeben werden kann. Nach (Patrikalakis u. a. 2002, Abschnitt 3.1, S. 49 ff.) stimmt dann der Normalenvektor mit dem Gradienten $\text{grad } g$ überein. Dieser Gradient existiert fast überall in Ω , da Lipschitz-stetige Funktionen nach dem Satz von Rademacher (vgl. (Schweizer 2013, Theorem 3.2, S. 41)) fast überall differenzierbar sind. Die Aussage folgt schließlich mit Lemma 2.1. \square

Damit können die Maxwell-Gleichungen (2.5) mit dem äußeren Normalenvektor n von Ω durch die Randbedingung

$$n \times E = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \partial\Omega \quad (2.8)$$

und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} H(0) &= H_0, & E(0) &= E_0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu H_0) &= 0, & \operatorname{div}(\varepsilon E_0) &= \rho(0) & \text{in } \Omega, \\ n \cdot (\mu H_0) &= 0 & & & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

ergänzt werden. Dann sind, wie in Lemma 2.2 beschrieben, die Divergenz-Gleichungen (2.5c) und (2.5d) automatisch erfüllt.

Unter der Bedingung, dass die Anfangswerte H_0 und E_0 sowie die rechte Seite J_{ext} die richtigen Regularitätsbedingungen erfüllen, wird für dieses System in Abschnitt 2.3.3 die eindeutige Lösbarkeit nachgewiesen.

2.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Im Folgenden wird nun die Wohlgestelltheit der Maxwellgleichungen gezeigt. Dazu werden zunächst die benötigten Funktionenräume definiert. Anschließend werden die nötigen Resultate aus dem Gebiet der Evolutionsgleichungen und der Halbgruppentheorie präsentiert. Schließlich kann damit die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gezeigt werden.

Dabei werden lediglich die Beweise der letzten beiden Lemmata ausgearbeitet. Diese sind durch (Hochbruck u. a. 2017) und (Hochbruck u. a. 2015) motiviert. Die anderen Resultate werden aus (Hochbruck u. a. 2017) zitiert.

2.3.1 Funktionenräume

Bei der Untersuchung der Lösbarkeit des Maxwell-Systems (2.5) tritt zunächst die Frage auf, in welchen Räumen diese Funktionen zu suchen sind. Um später mit der Finite-Elemente-Methode ein konformes Verfahren zu erhalten, müssen hier die Regularitätsanforderungen an die Lösungsräume eingeschränkt werden. Dabei stellt sich die Frage, wie dann für Lösungen $H, E \in L^2(\Omega)^3$ die Differentialoperatoren curl und div zu verstehen sind. Dies wird in den folgenden Definitionen erklärt.

Definition 2.4 (Schwache Rotation). Falls zu $f \in L^2(\Omega)^3$ eine Funktion $g \in L^2(\Omega)^3$ existiert, sodass

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \operatorname{curl} \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \cdot \varphi(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^3$$

gilt, dann heißt g schwache Rotation von f und es ist $\operatorname{curl} f := g$.

Ausgestattet mit dieser Definition wird anschließend ein entsprechender Raum definiert, der alle Funktionen aus $L^2(\Omega)^3$ mit schwacher Rotation enthält.

Definition 2.5 ($H(\text{curl}, \Omega)$). Entsprechend der Definition der schwachen Rotation sei

$$H(\text{curl}, \Omega) := \{f \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{curl } f \in L^2(\Omega)^3\}$$

der Raum aller Funktionen, deren schwache Rotation existiert. Dieser sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{H(\text{curl}, \Omega)} = (f, g)_{L^2(\Omega)^3} + (\text{curl } f, \text{curl } g)_{L^2(\Omega)^3} \quad \text{für } f, g \in H(\text{curl}, \Omega)$$

und der davon induzierten Norm

$$\|f\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 := (f, f)_{H(\text{curl}, \Omega)} \quad \text{für } f \in H(\text{curl}, \Omega).$$

Der folgende Satz (vgl. (Hochbruck u. a. 2017, Theorem 1.21, S. 18)) sammelt einige Eigenschaften des Raumes $H(\text{curl}, \Omega)$.

Satz 2.6. *Es sei Ω ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) $H(\text{curl}, \Omega)$ ist ein Hilbertraum.
- (ii) $H(\text{curl}, \Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})^3}^{\|\cdot\|_{H(\text{curl}, \Omega)}}$.
- (iii) Für $f \in W^{1,2}(\Omega)^3 \subset H(\text{curl}, \Omega)$ gilt

$$(\text{curl } f, \varphi)_{L^2(\Omega)^3} = (f, \text{curl } \varphi)_{L^2(\Omega)^3} + (n \times f, \varphi)_{L^2(\partial\Omega)^3} \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^3. \quad (2.9)$$

Da der Standard-Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ ein echter Teilraum von $H(\text{curl}, \Omega)$ ist, kann der Spursatz des ersten Raumes nicht ohne weiteres direkt auf den zweiten, größeren Raum übertragen werden. Analog zum Standard-Sobolevraum können jedoch auch im Raum $H(\text{curl}, \Omega)$ Randbedingungen wie die Bedingung (2.8) verarbeitet werden. Dazu dient die folgende Definition.

Definition 2.7 ($H_0(\text{curl}, \Omega)$). Es sei $H_0(\text{curl}, \Omega)$ der Abschluss des Raumes $C_0^\infty(\Omega)^3$ bezüglich der $H(\text{curl}, \Omega)$ -Norm. Damit gilt also $H_0(\text{curl}, \Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)^3}^{\|\cdot\|_{H(\text{curl}, \Omega)}}$.

Nach (Hochbruck u. a. 2017, S. 18 f.) gilt nämlich, dass für alle Funktionen $f \in H_0(\text{curl}, \Omega)$ die Gleichung

$$(n \times f) \big|_{\partial\Omega} = 0$$

gilt. Dies entspricht genau der im vorigen Abschnitt definierten Randbedingung (2.8). In gleicher Weise können auch Räume mit höheren Ableitungen definiert werden.

Definition 2.8 ($H(\text{curl}^2, \Omega)$, $H_0(\text{curl}^2, \Omega)$). Es seien

$$\begin{aligned} H(\text{curl}^2, \Omega) &:= \{f \in H(\text{curl}, \Omega) \mid \text{curl } f \in H(\text{curl}, \Omega)\}, \\ H_0(\text{curl}^2, \Omega) &:= \{f \in H_0(\text{curl}, \Omega) \mid \text{curl } f \in H_0(\text{curl}, \Omega)\}. \end{aligned}$$

2 Maxwell-Gleichungen

Analog zu den Definitionen der Räume $H(\text{curl}, \Omega)$ und $H_0(\text{curl}, \Omega)$ folgen für die Divergenz die folgenden Definitionen der schwachen Divergenz und des Raumes $H(\text{div}, \Omega)$, mit denen dieser Unterabschnitt abgeschlossen wird.

Definition 2.9 (Schwache Divergenz). Falls zu $f \in L^2(\Omega)^3$ eine Funktion $g \in L^2(\Omega)$ existiert, sodass

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \text{grad } \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt, dann heißt g schwache Divergenz von f und es ist $\text{div } f := g$.

Definition 2.10 ($H(\text{div}, \Omega)$). Entsprechend der Definition der schwachen Divergenz sei

$$H(\text{div}, \Omega) := \{f \in L^2(\Omega)^3 \mid \text{div } f \in L^2(\Omega)\}$$

der Raum aller Funktionen, deren schwache Divergenz existiert. Dieser sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{H(\text{div}, \Omega)} = (f, g)_{L^2(\Omega)^3} + (\text{div } f, \text{div } g)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } f, g \in H(\text{div}, \Omega)$$

und der davon induzierten Norm

$$\|f\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2 := (f, f)_{H(\text{div}, \Omega)} \quad \text{für } f \in H(\text{div}, \Omega).$$

2.3.2 Evolutionsgleichungen und Halbgruppen

Dieser Unterabschnitt ist der Frage gewidmet, unter welchen Voraussetzungen das inhomogene abstrakte Cauchy-Problem

$$\partial_t u(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2.10)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst entsprechend der Vorgehensweise in (Hochbruck u. a. 2017, Abschnitt 1.4.1, S. 12 ff.) die Definitionen einer C_0 -Halbgruppe und eines infinitesimalen Erzeugers präsentiert. Dazu sei $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ ein Hilbertraum mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|_X$. Weiter bezeichnet $\mathcal{L}(X)$ den Raum aller beschränkten linearen Operatoren von X nach X , also

$$\mathcal{L}(X) := \left\{ T : X \rightarrow X \mid \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} < \infty \right\}.$$

Definition 2.11 (C_0 -Halbgruppe). Eine Familie $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ beschränkter linearer Operatoren heißt C_0 -Halbgruppe, falls

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$,

2 Maxwell-Gleichungen

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0$ für alle $x \in X$

gelten.

Definition 2.12 (Infinitesimaler Erzeuger). Es sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe. Der infinitesimale Erzeuger \mathcal{A} dieser Gruppe ist gegeben durch den linearen Operator

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X, \quad x \mapsto \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

wobei der Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ gerade aus den $x \in X$ besteht, für die der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$ existiert.

Das folgende Lemma entspricht (Hochbruck u. a. 2017, Lemma 1.6, S. 14).

Lemma 2.13. *Es sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger \mathcal{A} . Dann gelten:*

- (i) $T(t)x \in D(\mathcal{A})$ für alle $x \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$,
- (ii) $\frac{d}{dt}(T(t)x) = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x$ für alle $x \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$,
- (iii) $D(\mathcal{A})$ liegt dicht in X und \mathcal{A} ist abgeschlossen.

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein beschränkter linearer Operator überhaupt infinitesimaler Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe ist. Ein Kriterium dafür präsentiert der folgende Satz von Stone (vgl. (Hochbruck u. a. 2017, Theorem 1.17, S. 16)).

Satz 2.14 (Satz von Stone). *Für einen linearen Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ mit $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

- (i) \mathcal{A} ist infinitesimaler Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$, wobei zusätzlich für alle Elemente $T \in (T(t))_{t \geq 0}$

$$\|T(t)x\|_X = \|x\| \quad \text{für alle } x \in X, t \geq 0 \quad (2.11)$$

gilt,

- (ii) \mathcal{A} ist schiefe adjungiert, also $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Schließlich liefert der folgende Satz eine Aussage, unter welchen Voraussetzungen an den Operator \mathcal{A} , den Anfangswert u_0 und die rechte Seite f die eindeutige Lösbarkeit des abstrakten Cauchy-Problems (2.10) garantiert werden kann. Grundlage hierfür ist (Hochbruck u. a. 2017, Theorem 1.9, S. 14).

Satz 2.15. *Es sei \mathcal{A} der infinitesimale Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ und $u_0 \in D(\mathcal{A})$. Falls zusätzlich $f \in C^1(0, T; X)$ oder $f \in C(0, T; D(\mathcal{A}))$ gilt, so ist*

$$u : (0, T) \rightarrow X, \quad u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds$$

die eindeutige Lösung der Differentialgleichung (2.10). Weiter gilt $u \in C^1(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{A}))$.

2.3.3 Wohlgestellttheit

Nun wird schließlich die im vorigen Unterabschnitt präsentierte Theorie der Evolutionsgleichungen und Halbgruppen unter Verwendung der zuvor definierten Funktionenräume auf die Maxwell-Gleichung (2.5) angewendet. Ziel ist hierbei, wie zuvor angekündigt, die Anwendung von Satz 2.15. Dazu wird zunächst das betrachtete Maxwell-System in die Form der Gleichung (2.10) gebracht.

Im Folgenden seien die magnetische Permeabilität μ und die elektrische Permittivität ε zusätzlich zu den bisher getroffenen Annahmen uniform positiv definit und beschränkt. Es existieren also $\Lambda, \lambda > 0$, sodass

$$\mu, \varepsilon \in L^\infty(\Omega), \quad \text{mit } \Lambda \geq \mu(x), \varepsilon(x) \geq \lambda \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Damit können in der nachfolgenden Definition zwei Abbildungen definiert werden, um die gewünschte Form zu erhalten.

Definition 2.16. Es werden für $\psi, \varphi \in L^2(\Omega)^3$ mit $\xi = (\psi, \varphi)^T$ folgende Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & \mathcal{C}\xi &= \begin{pmatrix} -(\mu)^{-1} \text{curl } \varphi \\ (\varepsilon)^{-1} \text{curl } \psi \end{pmatrix}, \\ j : \mathbb{R}^3 \times (0, T) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & j(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(\varepsilon)^{-1} J_{\text{ext}}(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit obiger Definition und $u = (H, E) \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ können die Maxwell-Gleichungen (2.5a) und (2.5b) äquivalent in die Form

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{C}u(x, t) + j(x, t) \tag{2.12}$$

umgeschrieben werden. Passend zur Notation des vorigen Unterabschnitts werden die Räume $X := L^2(\Omega)^6$ und $D(\mathcal{C}) := H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ definiert. Diese seien weiter versehen mit dem $\mu \times \varepsilon$ -Skalarprodukt

$$(\xi, \zeta)_{\mu \times \varepsilon} := (\mu \varphi_1, \psi_1)_{L^2(\Omega)^3} + (\varepsilon \varphi_2, \psi_2)_{L^2(\Omega)^3} \quad \text{für } \xi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in X. \tag{2.13}$$

Damit passt das hier betrachtete System in den für das abstrakte Cauchy-Problem (2.10) untersuchten Rahmen und Satz 2.15 kann angewendet werden. Dazu wird zunächst benötigt, dass der Operator \mathcal{C} infinitesimaler Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe ist. Hierfür wird die Schiefadjungiertheit des Operators nachgewiesen. Die Behauptung folgt dann schließlich unter Anwendung des Satzes von Stone.

Folgendes Lemma bestätigt die Schiefadjungiertheit des Operators \mathcal{C} . Es handelt sich dabei um ein Teilresultat des Beweises von (Hochbruck u. a. 2017, Theorem 1.24, S. 19 f.).

Lemma 2.17. *Der Operator \mathcal{C} ist bezüglich des $\mu \times \varepsilon$ -Skalarprodukts schiefadjungiert, es gilt also $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$, $D(\mathcal{C}^*) = D(\mathcal{C})$ und insbesondere*

$$(\mathcal{C}\xi, \xi)_{\mu \times \varepsilon} = 0 \quad \text{für alle } \xi \in D(\mathcal{C}).$$

2 Maxwell-Gleichungen

Bemerkung. Für den Beweis von (Hochbruck u. a. 2017, Theorem 1.24, S. 19 f.) muss keine Isotropie der Materialparameter μ und ε vorausgesetzt werden. Deshalb kann die Gültigkeit des obigen Lemmas 2.17 ebenfalls auf uniform positiv definite und beschränkte tensorwertige Materialparameter μ und ε erweitert werden.

Nun kann Satz 2.15 angewendet werden. Für das System (2.12), also zunächst noch ohne Rand- und erweiterte Anfangsbedingungen, folgt damit:

Korollar 2.18 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen). *Das Maxwell-System (2.12) besitzt für Anfangswerte $u_0 = (H_0, E_0) \in D(\mathcal{C})$ und rechte Seite $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; X)$ die eindeutige Lösung $u = (H, E) \in C^1(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}))$ mit*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)j(s) ds. \quad (2.14)$$

Dieses Resultat kann schließlich, wie beispielsweise in (Hochbruck u. a. 2015, Proposition 3.5, S. 546) gezeigt, auf die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des gesamten Maxwell-Systems mit Rand- und erweiterten Anfangsbedingungen (2.5) erweitert werden.

Durch zusätzliche Anforderungen an die rechte Seite und die Anfangswerte kann höhere Regularität der Lösung erlangt werden. Diese wird in Kapitel 4 benötigt, um die Beschränktheit der Lösungen zeigen zu können.

Lemma 2.19 (Zusätzliche Regularität (1)). *Mit $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H_0(\text{curl}^2, \Omega))$ sowie $H_0 \in H(\text{curl}^2, \Omega)$ und $E_0 \in H_0(\text{curl}^2, \Omega)$ folgt $u \in C^2(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}))$.*

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 2.13 kann Gleichung (2.14) differenziert werden und es folgt

$$\frac{d}{dt}u(t) = T(t)\mathcal{C}u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{C}j(s) ds + \underbrace{T(0)}_{=I}j(t) =: f(t).$$

Die Aussage $u \in C^2(0, T; X)$ ist damit gleichbedeutend mit $f \in C^1(0, T; X)$. Leitet man die rechte Seite erneut nach der Zeit ab, erhält man

$$\frac{d}{dt}f(t) = T(t)\mathcal{C}^2u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{C}^2j(s) ds + j(t) + \frac{d}{dt}j(t).$$

Können die Wohldefiniertheit und Stetigkeit von $\frac{d}{dt}f$ gezeigt werden, so folgt die Behauptung.

Zunächst ist der erste Term dieser Gleichung wohldefiniert, da nach Voraussetzung $u_0 \in H(\text{curl}^2, \Omega) \times H_0(\text{curl}^2, \Omega)$ gilt. Weiterhin ist dieser stetig, da T als beschränkter linearer Operator stetig ist. Aus der Voraussetzung $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H_0(\text{curl}^2, \Omega))$ folgt analog die Wohldefiniertheit des zweiten Terms. Die Stetigkeit desselben folgt wiederum aus der Stetigkeit von T und der Integration. Schließlich sind auch die letzten beiden Terme wegen $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H_0(\text{curl}^2, \Omega))$ stetig.

2 Maxwell-Gleichungen

Damit folgt also, dass f stetig differenzierbar ist und

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = \frac{d}{dt}f(t) = T(t)\mathcal{C}^2u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{C}^2j(s) ds + j(t) + \frac{d}{dt}j(t)$$

gilt. Somit ist $u \in C^2(0, T; X)$. □

Alternativ erhält man die verbesserte Regularität auch mit schwächeren Voraussetzungen an J_{ext} , muss dafür jedoch stärkere Einschränkungen für die Materialparameter annehmen.

Durch zusätzliche Anforderungen an Materialkoeffizienten, die rechte Seite und die Anfangswerte kann eine höhere Regularität der Lösung erlangt werden. Für die Materialkoeffizienten bedeutet dies:

Lemma 2.20 (Zusätzliche Regularität (2)). *Mit Konstanten $\Lambda, \lambda > 0$ gelte für die Materialkoeffizienten*

$$\mu, \varepsilon \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \text{mit } \Lambda \geq \frac{\partial \mu}{\partial x_i}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}, \mu, \varepsilon \geq \lambda \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.15)$$

fast überall in Ω . Dann folgt mit $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H_0(\text{curl}, \Omega))$ sowie $H_0 \in H(\text{curl}^2, \Omega)$ und $E_0 \in H_0(\text{curl}^2, \Omega)$ die Behauptung $u \in C^2(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}))$.

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 2.13 kann Gleichung (2.14) differenziert werden und es folgt, wie im vorherigen Beweis,

$$\frac{d}{dt}u(t) = T(t)\mathcal{C}u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{C}j(s) ds + j(t) =: f(t).$$

Die Aussage $u \in C^2(0, T; X)$ ist damit erneut gleichbedeutend zu $f \in C^1(0, T; X)$. Dies kann durch erneute Anwendung von Korollar 2.18 gezeigt werden. Dazu gilt zunächst unter den getroffenen Voraussetzungen

$$\text{curl } H_0 \in H(\text{curl}, \Omega), \quad \text{curl } E_0 \in H_0(\text{curl}, \Omega), \quad \text{curl } J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Mit den Voraussetzungen (2.15) an μ und ε folgt dann $\mathcal{C}u_0 \in D(\mathcal{C})$ und $\mathcal{C}j \in C^1(0, T; X)$. Es kann also Korollar 2.18 mit veränderten Anfangswerten $v_0 := \mathcal{C}u_0$ und veränderter rechter Seite $g := \mathcal{C}j$ angewendet werden. Damit folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung $v \in C^1(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}))$ mit

$$\begin{aligned} v(t) &= T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)g(s) ds \\ &= T(t)\mathcal{C}u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{C}j(s) ds. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung auch $j \in C^1(0, T; X)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

2 Maxwell-Gleichungen

Da das Hauptaugenmerk der späteren Untersuchung auf den Materialkoeffizienten liegt, wird im Folgenden die stärkere Einschränkung an J_{ext} hingenommen. Somit werden die Voraussetzungen von Lemma 2.19 gewählt, um die bessere Regularität der Lösung zu erhalten.

Zusammenfassend wurden in diesem Kapitel zunächst die Maxwell-Gleichungen in allgemeiner Form eingeführt und anschließend die Annahmen für den linearen Fall eingesetzt. Schließlich konnte mithilfe der Halbgruppentheorie die Existenz einer eindeutigen Lösung gezeigt werden.

3 Grundlagen

Dieses Kapitel dient der Einführung der Konvergenz in zwei Skalen. Dazu werden zunächst einige Vorbemerkungen angeführt, bevor im ersten Unterkapitel der Konvergenzbegriff eingeführt wird. Außerdem wird dort eine Auswahl an Resultaten aus dem Umfeld der Konvergenz in zwei Skalen vorgestellt und bewiesen. Schließlich werden im zweiten Unterkapitel verschiedene Eigenschaften der Grenzwerte in zwei Skalen erläutert. Dabei wird insbesondere ein Kompaktheitsresultat präsentiert, nach dem jede beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$ eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge besitzt. Weiterhin wird betrachtet, inwiefern schwache Differenzierbarkeit und Grenzwertbildung in zwei Skalen vertauschbar sind.

Die Konvergenz in zwei Skalen basiert auf der Annahme, dass die Koeffizienten der betrachteten Differentialgleichungen eine gewisse Periodizität aufweisen, welche sich auch auf die Lösungen überträgt. Deshalb folgen zunächst zwei Definitionen, welche sich mit periodischen Funktionen befassen. Dazu sei $Y := \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^3$ die Einheitszelle.

Definition 3.1 (Y -Periodizität). Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Y -periodisch, falls für alle $k \in \mathbb{Z}^3$

$$f(x) = f(x - k) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

gilt. Die Einschränkung $f|_{\Omega}$ dieser Funktion auf das Gebiet Ω wird dann ebenfalls als Y -periodisch bezeichnet. Funktionenräume, die nur Y -periodische Funktionen enthalten, werden durch den Subskript $\#$ gekennzeichnet.

Eine Funktion $g : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal Y -periodisch, falls für fast alle $x \in \Omega$ die Funktion $g(x, \cdot)$ Y -periodisch ist.

Mithilfe der Y -periodischen und lokal Y -periodischen Funktionen können nun weitere Funktionen mit abweichender Periode definiert werden.

Definition 3.2 ((Y_{η}) -Periodizität). Es sei $\eta > 0$. Eine Funktion $f^{\eta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Y_{η}) -periodisch, falls eine Y -periodische Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und

$$f^{\eta}(x) = f\left(\frac{x}{\eta}\right) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt. Analog heißt eine Funktion $g^{\eta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal periodisch, falls eine lokal Y -periodische Funktion $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und

$$g^{\eta}(x) = g\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt.

Im Falle von vektor- oder matrixwertigen Funktionen werden obige Definitionen der Periodizität komponentenweise angewendet. Eine solche Funktion heißt also beispielsweise lokal periodisch, falls jede Komponente lokal periodisch ist.

In einigen Fällen ist in den Beweisen der folgenden Resultate eine Einschränkung auf die Betrachtung einer Teilfolge und deren Konvergenz notwendig. Kann jedoch eine Darstellung des Grenzwertes unabhängig von der gewählten Teilfolge gefunden werden, so hilft das folgende Lemma, um die Konvergenz der gesamten Folge zeigen zu können. Die Aussage und der anschließende Beweis basieren auf (Schweizer 2013, Lemma 4.16, S. 81 f.).

Lemma 3.3 (Lemma ohne Namen). *Es sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Besitzt jede Teilfolge von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert u^0 , so konvergiert auch die gesamte Folge gegen u^0 .*

Beweis. Angenommen, es konvergiert nicht die gesamte Folge gegen u^0 . Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (u_{n_k}) , sodass $\|u^0 - u_{n_k}\| > \varepsilon$ für alle Folgenglieder der Teilfolge gilt. Dies ist jedoch schon ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass jede Teilfolge, also insbesondere auch (u_{n_k}) , eine gegen u^0 konvergente Teilfolge besitzt. \square

Auf analoge Weise kann man zeigen, dass Lemma 3.3 auch für die schwache Konvergenz gilt.

Im folgenden Lemma, aber auch im gesamten weiteren Verlauf dieser Arbeit wird an mehreren Stellen zu einer Folge $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\eta_\ell > 0$, $\eta_\ell \rightarrow 0$ für $\ell \rightarrow \infty$ die Folge $\left(u\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta_\ell}\right)\right)_{\ell \in \mathbb{N}}$ betrachtet. Um die Notation möglichst übersichtlich zu gestalten, wird diese Folge kurz mit (u^η) bezeichnet. Der Index η bezeichnet dabei stets eine Nullfolge positiver reeller Zahlen und ist insbesondere nicht mit der sonst üblichen Notation durch natürliche Zahlen zu verwechseln.

Es folgt nun eine Aussage über die schwache Konvergenz oszillierender Testfunktionen. Diese wird benötigt, um die Konvergenz in zwei Skalen mit der starken und schwachen Konvergenz in Relation zu setzen. Das Lemma samt Beweis hierzu stammt aus (Schweizer 2015, Lemma 29.1, S. 19 f.), wobei der Beweis hier deutlich detaillierter ausgeführt wird.

Lemma 3.4. *Es sei $\varphi \in C(\bar{\Omega}; C_\#(Y))$ und $\varphi^\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi^\eta(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right)$. Dann gilt*

$$\varphi^\eta = \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, y) dy. \quad (3.1)$$

Beweis. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass das beschränkte Gebiet Ω vollständig in disjunkte, skalierte Einheitszellen der Form

$$Y_k^\eta := x_k + \left(-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)^n \quad \text{für } x_k = \eta k \text{ mit } k \in K \subset \mathbb{Z}^n$$

für alle $\eta \in (\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ zerlegt werden kann. Die Verallgemeinerung wird in der auf diesen Beweis folgenden Bemerkung erläutert.

Da Ω ein beschränktes Gebiet ist, folgt aus der Stetigkeit der Funktion φ deren Beschränktheit. Wegen

$$\varphi^\eta(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \leq \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega}; C_\#(Y))} \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

ist auch die Folge (φ^n) gleichmäßig beschränkt. Damit existiert eine Funktion $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ und eine Teilfolge von (φ^n) , die schwach gegen φ^0 konvergiert und wiederum mit (φ^n) bezeichnet wird. Mit Funktionen $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt also

$$\int_{\Omega} \varphi^0(x) \psi(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi^\eta(x) \psi(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \psi(x) dx. \quad (3.2)$$

Gilt nun $\varphi^0 = \int_Y \varphi(\cdot, y) dy$ fast überall in Ω , so folgt die Behauptung zumindest für eine Teilfolge. Um dies zu zeigen, werden zunächst für $x_k \in Y_k^\eta$, $y \in Y$ die beiden Funktionen

$$\bar{\varphi}(x, y) := \varphi(x_k, y) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(x) := \psi(x_k)$$

definiert und auf ihren Zusammenhang zu φ bzw. ψ untersucht:

φ und $\bar{\varphi}$: Da Ω ein beschränktes Gebiet ist, ist φ gleichmäßig stetig in der ersten Variablen. Dies ist gleichbedeutend zur Existenz von $\delta(\eta) > 0$ für alle η mit

$$|\varphi(\bar{x}, y) - \varphi(x, y)| \leq \delta(\eta) \quad \text{für alle } \bar{x}, x \in \Omega \text{ mit } |\bar{x} - x| \leq \eta.$$

Betrachtet man nun wiederum die zu Beginn angenommene Zerlegung in η -skalierte Einheitszellen, so folgt aus $|x - x_k| \leq \eta$ für alle $x \in Y_k^\eta$ die Konvergenz von φ gegen $\bar{\varphi}$ in $L^\infty(\Omega \times Y)$ für $\eta \rightarrow 0$, nämlich

$$\begin{aligned} \|\bar{\varphi} - \varphi\|_{L^\infty(\Omega \times Y)} &= \sup_{k \in K} \|\bar{\varphi} - \varphi\|_{L^\infty(Y_k^\eta \times Y)} = \sup_{k \in K} \sup_{x \in Y_k^\eta} \sup_{y \in Y} |\bar{\varphi}(x, y) - \varphi(x, y)| \\ &= \sup_{k \in K} \sup_{x \in Y_k^\eta} \sup_{y \in Y} |\varphi(x_k, y) - \varphi(x, y)| \leq \delta(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ψ und $\bar{\psi}$: Da $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, ist ψ insbesondere lokal Lipschitzstetig. Dies ist gleichbedeutend zur Existenz einer Umgebung U von $\bar{x} \in \Omega$ und einer Konstanten $C > 0$ mit

$$|\psi(x) - \psi(\bar{x})| \leq C |x - \bar{x}| \quad \text{für alle } x \in U.$$

Mit $|x - x_k| \leq \eta$ für alle $x \in Y_k^\eta$ folgt also die Konvergenz von ψ gegen $\bar{\psi}$ in $L^\infty(\Omega)$ für $\eta \rightarrow 0$, nämlich

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi} - \psi\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{k \in K} \|\bar{\psi} - \psi\|_{L^\infty(Y_k^\eta)} = \sup_{k \in K} \sup_{x \in Y_k^\eta} |\bar{\psi}(x) - \psi(x)| \\ &= \sup_{k \in K} \sup_{x \in Y_k^\eta} |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq C \eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Somit erhält man für die Untersuchung des Grenzwerts aus (3.2) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} \left(\int_Y \varphi(x, y) dy - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi(x) dx \right| \\ &\stackrel{(3.3)}{\leq} \left| \int_{\Omega} \left(\int_Y \bar{\varphi}(x, y) dy - \bar{\varphi}\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi(x) dx \right| + C_1 \delta(\eta) \\ &\stackrel{(3.4)}{\leq} \left| \int_{\Omega} \left(\int_Y \bar{\varphi}(x, y) dy - \bar{\varphi}\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \bar{\psi}(x) dx \right| + C_1 \delta(\eta) + C_2 \eta. \end{aligned}$$

Nun werden die Definitionen von $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ eingesetzt. Weiterhin wird das Integral über Ω entsprechend der Zerlegung in skalierte Einheitszellen durch eine Summe über alle solche Zellen ersetzt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\int_Y \bar{\varphi}(x, y) dy - \bar{\varphi}\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \bar{\psi}(x) dx \\ &= \sum_{k \in K} \int_{Y_k^\eta} \left(\int_Y \varphi(x_k, y) dy - \varphi\left(x_k, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi(x_k) dx \\ &= \sum_{k \in K} \left(\left(|Y_k^\eta| \int_Y \varphi(x_k, y) dy - \int_{Y_k^\eta} \varphi\left(x_k, \frac{x}{\eta}\right) dx \right) \psi(x_k) \right). \end{aligned}$$

Durch Substitution von y durch $\frac{x}{\eta}$ und mit $|Y_k^\eta| = \eta^2$ zeigt man für $k \in K$

$$|Y_k^\eta| \int_Y \varphi(x_k, y) dy = \int_{Y_k^\eta} \varphi\left(x_k, \frac{x}{\eta}\right) dx.$$

Folglich gilt mit (3.1) für $\eta \rightarrow 0$

$$\left| \int_{\Omega} \left(\int_Y \varphi(x, y) dy - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi(x) dx \right| \leq C_1 \delta(\eta) + C_2 \eta \rightarrow 0.$$

Damit folgt also $\varphi^0 = \int_Y \varphi(\cdot, y) dy$ fast überall in Ω und somit (3.1) für die betrachtete Teilfolge. Da jedoch jede Teilfolge der Folge (φ^η) eine gegen diesen Grenzwert schwach konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert die ganze Folge schwach gegen diesen Grenzwert. \square

Bemerkung. Im Beweis zu Lemma 3.4 wird angenommen, dass das Gebiet Ω vollständig in skalierte Einheitszellen Y_k^η zerlegt werden kann. Im allgemeinen Fall ist diese Zerlegung nicht möglich, da der Rand von Ω diesen speziellen Anforderungen nicht genügt. Ersetzt man jedoch am Rand von Ω die skalierten Einheitszellen Y_k^η jeweils durch den Schnitt $Y_k^\eta \cap \Omega$ und die Punkte x_k durch beliebige Punkte jeweils aus dem Innern dieser Schnitte, so kann der Beweis analog durchgeführt werden.

Im nächsten Abschnitt wird nun die Konvergenz in zwei Skalen eingeführt. Weiter werden einige grundlegende Eigenschaften derselben vorgestellt.

3.1 Konvergenz in zwei Skalen

Zusätzlich zur Definition des Konvergenzbegriffs wird dieser in Relation zur starken und schwachen Konvergenz gesetzt. Weiterhin wird die Klasse der Testfunktionen deutlich erweitert, um die Zweiskalenkonvergenz auch praktikabel für das spätere Homogenisierungsergebnis zu bekommen.

Dabei basiert dieser Abschnitt großteils auf (Wellander 2001), (Allaire 1992) und (Schweizer 2015). In den Beweisen dazu werden Zwischenschritte ergänzt und Argumente der Beweisführung verdeutlicht.

Definition 3.5 (Konvergenz in zwei Skalen). Es sei (u^n) eine Folge in $L^2(\Omega)$. Diese Folge konvergiert in zwei Skalen gegen die Funktion $u^0 \in L^2(\Omega \times Y)$, falls

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (3.5)$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ erfüllt ist. Dies bezeichnen wir im Folgenden mit $u^n \xrightarrow{2s} u^0$.

Eine wichtige Eigenschaft der Konvergenz in zwei Skalen ist, dass auch hierfür Lemma 3.3 gilt. Damit ist es also für die Konvergenz einer Folge ausreichend zu zeigen, dass jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, wobei der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

Im Folgenden wird nun der Zusammenhang des eben eingeführten Konvergenzbegriffs in zwei Skalen mit der starken und schwachen Konvergenz dargestellt. Grundlage hierfür ist (Schweizer 2015, Bemerkung 2.3, S. 20).

Lemma 3.6. *Es sei (u^n) eine Folge in $L^2(\Omega)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $u^n \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$ impliziert $u^n \xrightarrow{2s} u^0$ mit $u^0(x, y) = u(x)$.

(ii) $u^n \xrightarrow{2s} u^0$ impliziert $u^n \rightharpoonup \int_Y u^0(\cdot, y) dy$ schwach in $L^2(\Omega)$.

Beweis. (i) Für eine beliebige Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ bekommt man zunächst mit Lemma 3.4

$$\varphi^n = \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, y) dy.$$

Zusammen mit $u^n \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$ und der Beschränktheit von φ^n folgt daher

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx &= \int_{\Omega} (u^n(x) - u(x)) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx + \int_{\Omega} u(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \\ &\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u(x) \int_Y \varphi(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

(ii) Sei $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt wegen der Zweiskalenkonvergenz von (u^n) :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^n(x) \varphi_0(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \varphi_0(x) dy dx = \int_{\Omega} \varphi_0(x) \int_Y u^0(x, y) dy dx.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $u^n \rightharpoonup \int_Y u^0(\cdot, y) dy$. □

Bei Definition 3.5 wird $C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ als Raum der Testfunktionen verwendet. Somit wird gefordert, dass die Testfunktionen insbesondere unendlich oft stetig differenzierbar mit kompaktem Träger sind. Es kann jedoch gezeigt werden, dass Gleichung (3.5) auch mit deutlich schwächeren Anforderungen an die Testfunktionen gilt. Beispielsweise werden im Beweis des Homogenisierungsergebnisses aus Satz 4.5 Testfunktionen verwendet, die stückweise konstant und damit noch nicht einmal stetig im ersten Argument sind. Die folgende Definition liefert dazu eine Bedingung, wie weit die Anforderungen abgeschwächt werden können.

Definition 3.7 (Zulässige Testfunktion). Eine Funktion $\varphi \in L^2(\Omega; L^2_{\#}(Y))$ heißt zulässige Testfunktion, falls diese messbar ist und

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \varphi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (3.6)$$

gilt.

Um nachzuweisen, dass es sich bei den in Definition 3.5 verwendeten Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ um zulässige Testfunktionen handelt, wendet man Lemma 3.4 auf $(\varphi^\eta)^2$ an und erhält

$$(\varphi^\eta)^2 = \varphi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right)^2 \rightharpoonup \int_Y \varphi(\cdot, y)^2 dy.$$

Da Ω beschränkt ist, folgt

$$\int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right)^2 dx = \int_{\Omega} 1 \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right)^2 dx \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_Y \varphi(\cdot, y)^2 dy dx,$$

womit die Testfunktionen aus $C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ zulässig sind.

In (Allaire 1992) wird untersucht, inwiefern die Regularitätsanforderungen an den Raum der zulässigen Testfunktionen abgeschwächt werden können. Dabei wird gezeigt, dass beispielsweise die Räume $L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$ und $L^2_{\#}(Y; C(\bar{\Omega}))$ immer noch aus zulässigen Testfunktionen bestehen. Wie der folgende Satz zeigt, gilt dann für diese Funktionen ebenfalls Gleichung (3.5) aus der Definition der Konvergenz in zwei Skalen. Grundlage dafür ist (Allaire 1992, Theorem 1.8, S. 1488 f.) und der dort ausgeführte Beweis.

Satz 3.8. *Es sei $\varphi \in L^2(\Omega; L^2_{\#}(Y))$ eine zulässige Testfunktion. Für jede Folge (u^η) , welche in zwei Skalen gegen einen Grenzwert $u^0 \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert, gilt dann*

$$\int_{\Omega} u^\eta(x) \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \varphi(x, y) dy dx.$$

Für den Beweis dieses Satzes werden zuvor zwei Hilfsresultate benötigt. Zunächst besagt folgendes Lemma, dass jede Funktion in $L^2(\Omega \times Y)$ als Grenzwert in zwei Skalen erhalten werden kann. Dieses Lemma basiert auf (Allaire 1992, Lemma 1.13, S. 1490 f.).

Lemma 3.9. *Zu jeder Funktion $u \in L^2(\Omega \times Y)$ existiert eine in der $L^2(\Omega)$ -Norm beschränkte Folge $(u^\eta) \in L^2(\Omega)$, sodass diese gegen u in zwei Skalen konvergiert und*

$$\|u^\eta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (3.7)$$

für $\eta \rightarrow 0$ gilt.

Beweis. Zunächst ist $C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ ein separabler Banachraum, weshalb eine darin dicht liegende Teilmenge $(\tilde{\psi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert. Damit sei die normierte Folge $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch $\psi_k := \|\tilde{\psi}_k\|_{L^2(\Omega \times Y)}^{-1} \tilde{\psi}_k$.

3 Grundlagen

Außerdem liegt der Raum $C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ wiederum dicht in $L^2(\Omega \times Y)$. Es existiert also eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$, die in der $L^2(\Omega \times Y)$ -Norm gegen u konvergiert. Unter Anwendung von Lemma 3.4 folgt für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, $\psi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ und $\eta \rightarrow 0$

$$\varphi_n\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right)\psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \rightharpoonup \int_Y \varphi_n(\cdot, y)\psi(\cdot, y) dy.$$

Mit der Beschränktheit von Ω folgt daraus

$$\left| \int_\Omega \varphi_n\left(x, \frac{x}{\eta}\right)\psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx - \int_\Omega \int_Y \varphi_n(x, y)\psi(x, y) dy dx \right| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

und damit die Konvergenz von $\varphi_n(x, \frac{x}{\eta})$ in zwei Skalen gegen $\varphi_n(x, y)$. Im nächsten Schritt sei $\delta_n := \|\varphi_n - u\|_{L^2(\Omega \times Y)}$. Weiter sei die Folge $(\eta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\eta \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ so gewählt, dass für $1 \leq k \leq n$

$$\left| \int_\Omega \varphi_n\left(x, \frac{x}{\eta(n)}\right)^2 dx - \int_\Omega \int_Y \varphi_n(x, y)^2 \right| \leq \delta_n, \quad (3.8)$$

$$\left| \int_\Omega \varphi_n\left(x, \frac{x}{\eta(n)}\right)\psi_k\left(x, \frac{x}{\eta(n)}\right) dx - \int_\Omega \int_Y \varphi_n(x, y)\psi_k(x, y) dy dx \right| \leq \delta_n \quad (3.9)$$

gelten. Damit wird schließlich die Folge $(u^{\eta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ durch $u^{\eta(n)}(x) := \varphi_n\left(x, \frac{x}{\eta(n)}\right)$ definiert. Aus (3.8) folgt dann die Beschränktheit der Folge in $L^2(\Omega \times Y)$ und aus (3.9) die Konvergenz der Folge gegen u in zwei Skalen. \square

Als weiteres Hilfsresultat wird benötigt, dass aus jeder zulässigen Testfunktion eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge erzeugt werden kann. Als Grundlage für dieses Resultat und den Beweis dient (Holmbom 1997, Proposition 2.7, S. 326).

Lemma 3.10. *Für jede zulässige Testfunktion $\varphi \in L^2(\Omega \times Y)$ konvergiert die Folge $(\varphi(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}))$ in zwei Skalen gegen φ .*

Beweis. Nach Lemma 3.9 existiert zu φ eine beschränkte Folge (φ^η) , die gegen φ in zwei Skalen konvergiert. Damit gilt für jede Testfunktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_\Omega \left| \left(\varphi^\eta(x) - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right| dx \leq \left\| \varphi^\eta - \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \psi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.10)$$

3 Grundlagen

Da es sich bei φ nach Voraussetzung um eine zulässige Testfunktion handelt, folgt mit der Konvergenz in zwei Skalen von φ^η gegen φ

$$\begin{aligned}
 \left\| \varphi^\eta - \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left(\varphi^\eta(x) - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right)^2 dx \\
 &= \underbrace{\|\varphi^\eta\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\xrightarrow{(3.7)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2} - 2 \underbrace{\int_{\Omega} \varphi^\eta(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx}_{\xrightarrow{(3.5)} \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x,y) \varphi(x,y) dy dx} + \underbrace{\left\| \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\xrightarrow{(3.6)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2} \\
 &\xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - 2\|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Somit folgt also aus (3.10)

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \left(\varphi^\eta(x) - \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right| dx = 0$$

und insbesondere

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi^\eta(x) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \stackrel{(3.5)}{=} \int_{\Omega} \varphi(x,y) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx$$

für alle Testfunktionen $\psi \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$, womit $\varphi(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}) \xrightarrow{2s} \varphi$ gezeigt ist. \square

Die geleistete Vorarbeit reicht nun aus, um im nächsten Schritt schließlich Satz 3.8 zu beweisen und damit zu zeigen, dass Konvergenz in zwei Skalen nicht nur, wie in der ursprünglichen Definition gefordert, für Testfunktionen aus $C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$, sondern auch für alle weiteren zulässigen Testfunktionen gilt.

Beweis von Satz 3.8. Da $C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$ liegt, existiert eine Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ mit $\psi_n \rightarrow \varphi$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) - \psi_n\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \right)^2 dx \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\left\| \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \psi_n\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx + \left\| \psi_n\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \psi_n\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \psi_n\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - 2 \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x,y) \psi_n(x,y) dy dx + \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2.
 \end{aligned}$$

Hierbei wird im letzten Schritt für den ersten Summanden die Definition 3.7 der zulässigen Testfunktionen eingesetzt. Für den zweiten Summanden wird ausgenutzt, dass nach Lemma 3.10 die zulässige Testfunktion in zwei Skalen konvergiert und damit Gleichung (3.5) aus der Definition der Konvergenz in zwei Skalen gilt. Für den dritten Summanden

3 Grundlagen

wird schließlich Lemma 3.4 auf die Funktion ψ_n^2 angewendet. Da Ω beschränkt ist, folgt damit

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right)^2 dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} 1 \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right)^2 dx \stackrel{\text{Lem. 3.4}}{=} \int_{\Omega} \int_Y \psi_n(\cdot, y)^2 dy dx.$$

Es folgt nun weiter

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right)^2 dx \\ &= \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 - 2 \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) \psi_n(x, y) dy dx + \|\psi_n\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 \\ &= \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 - 2\varphi(x, y) \psi_n(x, y) + \psi_n(x, y)^2 dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y (\varphi(x, y) - \psi_n(x, y))^2 dy dx. \end{aligned}$$

Da nach Definition der Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diese stark in $L^2(\Omega \times Y)$ gegen ψ konvergiert, folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right)^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_Y (\varphi(x, y) - \psi_n(x, y))^2 dy dx = 0.$$

Um dieses Resultat anzuwenden, wird zunächst folgende Gleichung betrachtet:

$$\left| \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) u^\eta(x) dx - \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) u^\eta(x) dx \right| = \left| \int_{\Omega} \left(\varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right) u^\eta(x) dx \right|. \quad (3.11)$$

Durch Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ und Anwendung der Konvergenz in zwei Skalen erhält man für die linke Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) u^\eta(x) dx - \int_{\Omega} \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) u^\eta(x) dx \right| \\ &= \left| \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) u^\eta(x) dx - \int_{\Omega} \int_Y \psi_n(x, y) u^0(x, y) dy dx \right|. \end{aligned}$$

Auf die linke Seite der Gleichung wendet man zunächst die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an. Da (u^η) in zwei Skalen konvergiert und Ω beschränkt ist, folgt insbesondere die Beschränktheit der ganzen Folge. Damit gilt mit einer Konstanten C unabhängig von η

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left(\varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) - \psi_n \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right) u^\eta(x) dx \right| &\leq \lim_{\eta \rightarrow 0} \underbrace{\|u^\eta\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq C} \left\| \varphi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right) - \psi_n \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \varphi \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right) - \psi_n \left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man somit aus Gleichung (3.11) für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \underbrace{\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) u^\eta(x) dx}_{\text{unabh. von } n} - \int_{\Omega} \int_Y \underbrace{\psi_n(x, y)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x, y)} u^0(x, y) dy dx \right| = 0$$

und damit insbesondere

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) u^\eta(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) u^0(x, y) dy dx.$$

Dies entspricht Gleichung (3.5) aus der Definition der Konvergenz in zwei Skalen mit φ als Testfunktion. \square

Somit wurde in diesem Abschnitt gezeigt, dass die Konvergenz in zwei Skalen mit allen zulässigen Testfunktionen gilt. Ebenso wurde gezeigt, dass der neue Konvergenzbegriff stärker als schwache Konvergenz, jedoch schwächer als die Normkonvergenz ist. Es wurden bisher jedoch noch keine Beispiele geliefert, die zwar in zwei Skalen konvergieren, jedoch nicht im Sinne der Norm. Dies geschieht im nächsten Abschnitt, indem gezeigt wird, dass sogar jede beschränkte Folge eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge besitzt.

3.2 Eigenschaften von Grenzwerten in zwei Skalen

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Kompaktheitsaussage bezüglich der Konvergenz in zwei Skalen getroffen. Weiterhin werden anschließend verschiedene schwache Differentialoperatoren hinsichtlich ihrer Eigenschaften bei der Zweiskalenkonvergenz untersucht.

Als Grundlage für die präsentierten Aussagen dient (Wellander 1998), (Wellander 2001), (Allaire 1992) und (Schweizer 2015). Auch die Beweise entstammen diesen Werken, werden jedoch an dieser Stelle deutlich ausführlicher präsentiert.

Das folgende Lemma ist in gewisser Weise eine Aussage über die Folgenkompaktheit des Raums $L^2(\Omega)$ bezüglich der Konvergenz in zwei Skalen. So hat jede beschränkte Folge in $L^2(\Omega)$ zumindest eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge. Grundlage für dieses Lemma und den anschließenden Beweis ist (Schweizer 2015, Satz 2.4, S. 21).

Lemma 3.11 (Kompaktheit). *Es sei $(u^n) \subset L^2(\Omega)$ eine in der $L^2(\Omega)$ -Norm beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge und eine Funktion $u^0 \in L^2(\Omega \times Y)$, sodass*

$$u^n \xrightarrow{2s} u^0$$

gilt. Weiterhin gilt

$$u^n \rightharpoonup u^{\text{eff}} := \int_Y u^0(\cdot, y) dy$$

und es existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\tilde{u}^0 \in L^2(\Omega \times Y)$, sodass u^0 für $x \in \Omega$, $y \in Y$ in der Form

$$u^0(x, y) = u^{\text{eff}}(x) + \tilde{u}^0(x, y), \quad \text{mit} \quad \int_Y \tilde{u}^0(x, y) dy = 0$$

zerlegt werden kann.

Beweis. Dieser Beweis setzt sich aus zwei Abschnitten zusammen. Zunächst wird basierend auf dem Beweis zu (Schweizer 2015, Satz 2.4, S. 21) die Existenz einer in zwei Skalen konvergenten Teilfolge nachgewiesen. Anschließend wird die Zerlegung des Grenzwerts in die behauptete Darstellung gezeigt. Grundlage für den zweiten Teil des Beweises ist der Beweis zu (Wellander 2001, Proposition 2.6, S. 44).

Existenz: Zum Beweis der Existenz einer in zwei Skalen konvergenten Teilfolge wird $C(\bar{\Omega}; C_{\#}(Y))$ als Testfunktionenraum verwendet. Die Folge (u^n) liegt dann in dessen Dualraum und ist beschränkt, sodass eine schwach-* konvergente Teilfolge existiert. Schließlich wird gezeigt, dass der Grenzwert dieser Teilfolge in $L^2(\Omega \times Y)$ liegt.

Wegen der Beschränktheit von Ω ist $B := C(\bar{\Omega}; C_{\#}(Y))$ ein separabler Banachraum. Die Funktionen u^n werden nun als Elemente des Dualraums B' angesehen, wobei die Anwendung von u^n auf eine Funktion $\varphi \in B$ entsprechend dem $L^2(\Omega)$ -Skalarprodukt von u^n mit $\varphi(\cdot, \frac{\cdot}{\eta})$ definiert ist, also

$$u^n(\varphi) := \int_{\Omega} u^n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx.$$

Da die Folge (u^n) in $L^2(\Omega)$ beschränkt ist, folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u^n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \right| &\leq \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \left\| \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_B = C \sup_{x \in \Omega} \sup_{y \in Y} |\varphi(x, y)| \end{aligned} \quad (3.12)$$

mit der Konstanten $C = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u^n\|_{L^2(\Omega)}$. Hierbei wird für die Abschätzung von φ die Beschränktheit von Ω verwendet. Damit ist (u^n) in B' beschränkt und es existiert nach dem Satz von Alaoglu (vgl. (Werner 2011, Korollar VIII.3.12, S. 416)) zumindest eine Teilfolge, die schwach-* gegen einen Grenzwert \bar{u} konvergiert. Im Allgemeinen ist \bar{u} jedoch kein Element aus $L^2(\Omega \times Y)$ sondern muss erst dazu fortgesetzt werden. Zunächst ist \bar{u} in B' beschränkt, denn es gilt mit der ersten Abschätzung aus Gleichung (3.12)

$$|\bar{u}(\varphi)| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} u^n(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \right| \leq C \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \varphi\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(3.1)}{=} C \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times Y)} \quad (3.13)$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in B$. Wie im Beweis von Satz 3.8 wird hier Lemma 3.4 verwendet, wobei Gleichung (3.1) auf die Funktion φ^2 angewendet wird. Um schließlich zu zeigen, dass \bar{u} zu einem stetigen Funktional in $L^2(\Omega \times Y)$ fortgesetzt werden kann, zeigt man, dass Gleichung (3.13) für alle Testfunktionen aus einer dichten Teilmenge von $L^2(\Omega \times Y)$ gilt. Dies ist jedoch schon geschehen, da unter Verwendung der Inklusion $C(\bar{\Omega}; C(Y)) \subset B \subset L^2(\Omega \times Y)$ und der Tatsache, dass $C(\bar{\Omega}; C(Y))$ dicht in $L^2(\Omega \times Y)$ liegt, folglich auch B dicht in $L^2(\Omega \times Y)$ liegt. Damit kann \bar{u} nach dem Fortsetzungssatz aus (Atkinson u. a. 2009, Theorem 2.4.1, S. 72) zum gesuchten Grenzwert u^0 in zwei Skalen fortgesetzt werden.

Darstellung des Grenzwerts: Im vorigen Teil des Beweises wird zumindest für eine Teilfolge die Aussage

$$u^n \xrightarrow{2s} u^0 \in L^2(\Omega \times Y)$$

gezeigt. Nach der zweiten Aussage von Lemma 3.6 folgt daraus direkt die schwache Konvergenz von u^n gegen $u^{\text{eff}} = \int_Y u^0(x, y) dy$. Die zur Zerlegung noch fehlende Funktion \tilde{u}^0 kann dann direkt angegeben werden als

$$\tilde{u}^0(x, y) = u^0(x, y) - u^{\text{eff}}(x).$$

Wegen $|Y| = 1$ folgt durch Integration über Y schließlich

$$\int_Y \tilde{u}^0(\cdot, y) dy = \int_Y u^0(\cdot, y) - u^{\text{eff}}(\cdot) dy = \int_Y u^0(\cdot, y) dy - |Y| \int_Y u^0(\cdot, y) dy = 0,$$

womit der Beweis des Lemmas abgeschlossen ist. \square

Mit Hilfe dieser Kompaktheitsaussage wird im nächsten Schritt gezeigt, dass auch das Produkt einer beschränkten Folge mit bestimmten zulässigen Testfunktionen in zwei Skalen konvergiert. Diese Aussage sowie der Beweis basieren auf (Wellander 2001, Lemma 2.8, S. 34 f.).

Lemma 3.12. *Es sei (u^n) eine in $L^2(\Omega)$ beschränkte Folge. Weiter sei $v \in C(\Omega; L^\infty_\#(Y))$. Dann existiert eine Teilfolge von $(u^n(x)v(x, \frac{x}{\eta}))$, die in zwei Skalen gegen $u^0(x, y)v(x, y)$ konvergiert. Dabei bezeichnet u^0 den Grenzwert für diese Teilfolge von (u^n) in zwei Skalen.*

Beweis. Da die Folge (u^n) in $L^2(\Omega)$ beschränkt ist, existiert nach Lemma 3.11 eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge mit Grenzwert $u^0 \in L^2(\Omega \times Y)$ und da v eine zulässige Testfunktion ist, folgt

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega u^n(x)v\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \stackrel{(3.5)}{=} \int_\Omega \int_Y u^0(x, y)v(x, y) dy dx. \quad (3.14)$$

Weil Ω beschränkt ist, ist die Funktion v insbesondere auch in $L^\infty(\Omega \times Y)$ und damit die Folge $(v(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}))$ beschränkt. Somit ist auch die Folge $(u^n v(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}))$ gleichmäßig beschränkt in $L^2(\Omega)$ und hat nach Lemma 3.11 eine in zwei Skalen konvergente Teilfolge. Es folgt mit der speziellen Wahl der konstanten Funktion mit dem Wert 1 als zulässiger Testfunktion

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega u^n(x)v\left(x, \frac{x}{\eta}\right) 1 dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega u^n(x)v\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \stackrel{(3.14)}{=} \int_\Omega \int_Y u^0(x, y)v(x, y) dy dx.$$

Da Grenzwerte in zwei Skalen eindeutig bestimmt sind, gilt also, eventuell für eine weitere Teilfolge

$$u^n v\left(\cdot, \frac{\cdot}{\eta}\right) \xrightarrow{2s} u^0 v.$$

\square

3 Grundlagen

Bisher enthält dieses Kapitel lediglich Resultate für Folgen aus $L^2(\Omega)$. Damit wird insbesondere keine Existenz schwacher oder starker Ableitungen vorausgesetzt. Auf Grund der Inklusion $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ gelten die bisher gezeigten Aussagen ebenfalls für Folgen in $W^{1,2}(\Omega)$. So existiert nach der Kompaktheitsaussage aus Lemma 3.11 auch zu jeder beschränkten Folge aus diesem Raum eine Funktion in $L^2(\Omega \times Y)$, sodass zumindest eine Teilfolge in zwei Skalen gegen diese konvergiert. Diese Aussage ist jedoch in dieser Form nicht wirklich zufriedenstellend, da alle Folgenglieder bessere Eigenschaften aufweisen als für das verwendete Lemma vorausgesetzt wird. Dies bringt jedoch zumindest nach Lemma 3.11 keine besseren Eigenschaften des Grenzwerts mit sich.

In der Tat können für verschiedene Teilräume mit stärkeren Differenzierbarkeitseigenschaften genauere Aussagen über die Grenzwerte getroffen werden. Damit beschäftigt sich der folgende, abschließende Teil dieses Kapitels.

Zunächst wird für die Homogenisierungsergebnisse im nächsten Kapitel eine Aussage über den Gradienten in zwei Skalen benötigt. Das hier vorgestellte Resultat und der anschließende Beweis basieren auf (Allaire 1992, Proposition 1.14, S, 1491 f.).

Lemma 3.13 (Gradient in zwei Skalen). *Es sei (u^n) eine in $L^2(\Omega)$ beschränkte Folge. Zusätzlich sei auch $(\eta \operatorname{grad} u^n)$ in $L^2(\Omega)$ beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge und eine Funktion $u^0 \in L^2(\Omega; W_{\#}^{1,2}(Y))$, sodass für diese Teilfolge*

$$\begin{aligned} u^n &\xrightarrow{2s} u^0, \\ \eta \operatorname{grad} u^n &\xrightarrow{2s} \operatorname{grad}_y u^0 \end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung. Die Formulierung der Konvergenz in zwei Skalen aus Definition 3.5 gilt nur für den skalaren Fall, also Funktionen aus $L^2(\Omega)$. Man kann diese Definition jedoch sinnvoll auf vektorwertige Funktionen aus $L^2(\Omega)^3$ erweitern, indem man diese komponentenweise betrachtet. So konvergiert eine Folge $(u^n) \subset L^2(\Omega)^3$ in zwei Skalen gegen eine Funktion $u^0 \in L^2(\Omega)^3$, falls für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_{\#}^\infty(Y))$ und $j = 1, 2, 3$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_j^n(x) \varphi_j \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_j^0(x, y) \varphi_j(x, y) dy dx$$

gilt. Damit ist obige Aussage

$$\eta \operatorname{grad} u^n \xrightarrow{2s} \operatorname{grad}_y u^0$$

wohldefiniert. Zusätzlich können mit dieser komponentenweisen Betrachtung auch alle weiteren bisherigen Aussagen, insbesondere auch die Kompaktheitsaussage aus Lemma 3.11, in dieser Weise auf den vektorwertigen Fall übertragen werden.

3 Grundlagen

Beweis von Lemma 3.13. Da die Folgen (u^η) und $(\eta \operatorname{grad} u^\eta)$ bezüglich der $L^2(\Omega)^3$ -Norm beschränkt sind, folgt die Existenz von in zwei Skalen konvergenten Teilfolgen (u^η) und $(\eta \operatorname{grad} u^\eta)$. Somit gilt für skalarwertige Testfunktionen $\psi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$ bzw. vektorwertige Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))^3$ mit obiger Bemerkung

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\eta(x) \psi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \psi(x, y) dy dx, \quad (3.15)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \eta \operatorname{grad} u^\eta(x) \cdot \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx = \int_{\Omega} \int_Y w(x, y) \cdot \varphi(x, y) dy dx. \quad (3.16)$$

Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass $w = \operatorname{grad}_y u^0$ gilt. Dazu erhält man mit Hilfe der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{grad} u^\eta(x) \cdot \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx &\stackrel{PI}{=} 0 - \int_{\Omega} u^\eta(x) \operatorname{div} \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} u^\eta(x) \left(\operatorname{div}_x \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) + \frac{1}{\eta} \operatorname{div}_y \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Zusammen folgt damit schließlich wie behauptet

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y w(x, y) \cdot \varphi(x, y) dy dx &\stackrel{(3.16)}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \eta \operatorname{grad} u^\eta(x) \cdot \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx \\ &\stackrel{(3.17)}{=} - \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\underbrace{\eta \int_{\Omega} u^\eta(x) \operatorname{div}_x \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx}_{\text{nach (3.15) beschränkt}} + \int_{\Omega} u^\eta(x) \operatorname{div}_y \varphi \left(x, \frac{x}{\eta} \right) dx \right) \\ &\stackrel{(3.15)}{=} - \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \operatorname{div}_y \varphi(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

□

Ebenfalls kann in diesem Zusammenhang eine genauere Aussage für Funktionenfolgen in $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ getroffen werden. Diese basiert auf (Wellander 2001, Proposition 4.3, S. 39).

Lemma 3.14 (Rotation in zwei Skalen). *Es sei (u^η) eine in $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ beschränkte Folge. Dann existieren eine Teilfolge und eine Funktion $u^0 \in L^2(\Omega; H(\operatorname{curl}, Y))$ mit*

$$u^0(x, y) = u^{\operatorname{eff}}(x) + D_y \Phi_u(x, y), \quad \text{wobei} \quad \int_Y \operatorname{grad}_y \Phi_u(x, y) dy = 0,$$

sodass

$$u^\eta \xrightarrow{2s} u^0$$

gilt. Weiter folgt

$$\operatorname{curl} u^\eta \rightharpoonup \operatorname{curl} u^{\operatorname{eff}}, \quad \text{wobei} \quad u^{\operatorname{eff}} = \int_Y u^0(\cdot, y) dy$$

in $L^2(\Omega)^3$.

3 Grundlagen

Beweis. Da (u^η) in $H(\text{curl}, \Omega)$ beschränkt ist, sind insbesondere auch (u^η) und $(\text{curl } u^\eta)$ in $L^2(\Omega)^3$ beschränkt. Nach Lemma 3.11 existieren also Funktionen $u^0, v \in L^2(\Omega \times Y)^3$, sodass (u^η) beziehungsweise $(\text{curl } u^\eta)$ komponentenweise in zwei Skalen gegen diese konvergieren. Für eine Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))^3$ gilt dann zunächst komponentenweise, aber auch in vektorieller Notation

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \cdot \varphi(x, y) dy dx, \quad (3.18)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\text{curl } u^\eta(x)) \cdot \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \cdot \varphi(x, y) dy dx. \quad (3.19)$$

Weiterhin gilt unter Anwendung von Gleichung (2.9) und da φ einen kompakten Träger hat, womit sämtliche Randterme verschwinden, die Gleichung

$$\int_{\Omega} \text{curl } u^\eta(x) \cdot \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \stackrel{PI}{=} 0 + \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \text{curl } \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx. \quad (3.20)$$

Durch Multiplikation mit η und Anwendung der Kettenregel erhält man weiter

$$\begin{aligned} \underbrace{\eta \int_{\Omega} \text{curl } u^\eta(x) \cdot \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx}_{\text{nach (3.19) beschränkt}} &\stackrel{(3.20)}{=} \eta \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \text{curl } \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx \\ &= \underbrace{\eta \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \text{curl}_x \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx}_{\text{nach (3.18) beschränkt}} + \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \text{curl}_y \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))^3$ sind auch $\text{curl}_x \varphi$ und $\text{curl}_y \varphi$ zulässige Testfunktionen, sodass mit (3.18) für den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \cdot \text{curl}_y \varphi(x, y) dy dx = 0$$

folgt. Damit folgt nach Definition der schwachen Ableitungen

$$\text{curl}_y u^0(x, y) = 0, \quad \text{für fast alle } (x, y) \in \Omega \times Y. \quad (3.21)$$

Mit dem Lemma von Poincaré (vgl. (Amrouche u. a. 2007, Theorem 3, Bemerkung 4, S. 605 f.)) folgt aus Gleichung (3.21) die Existenz einer Funktion $\Phi \in L^2(\Omega; H^1(Y))$, für die

$$u^0(x, y) = \text{grad}_y \Phi(x, y), \quad \text{für fast alle } (x, y) \in \Omega \times Y$$

gilt. Nach Lemma 3.11 gilt zugleich

$$u^0(x, y) = u^{\text{eff}}(x) + \tilde{u}^0(x, y), \quad \text{mit } \int_Y \tilde{u}^0(x, y) dy = 0,$$

3 Grundlagen

weshalb für $\Phi_u(x, y) := \Phi(x, y) - u^{\text{eff}}(x) \cdot y$, $((x, y) \in \Omega \times Y)$ somit

$$u^0(x, y) = u^{\text{eff}}(x) + \text{grad}_y \Phi_u(x, y), \text{ für fast alle } (x, y) \in \Omega \times Y$$

und

$$\int_Y \text{grad}_y \Phi_u(x, y) dy = 0, \text{ für fast alle } x \in \Omega$$

gilt. Es bleibt die schwache Konvergenz von $(\text{curl } u^\eta)$ zu zeigen. Dazu sei $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^3$. Für diese zulässige Testfunktion folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_Y v(x, y) dy \cdot \tilde{\varphi}(x) dx &\stackrel{(3.19)}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega \text{curl } u^\eta(x) \cdot \tilde{\varphi}(x) dx \stackrel{(3.20)}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega u^\eta(x) \cdot \text{curl } \tilde{\varphi}(x) dx \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \int_\Omega \int_Y u^0(x, y) dy \cdot \text{curl } \tilde{\varphi}(x) dx = \int_\Omega u^{\text{eff}}(x) \cdot \text{curl } \tilde{\varphi}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Es folgt nach der Definition der schwachen Ableitung $u^{\text{eff}} \in H(\text{curl}, \Omega)$ mit

$$\text{curl } u^{\text{eff}}(x) = \int_Y v(x, y) dy, \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Da $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^3$ beliebig ist und $C_0^\infty(\Omega)^3$ dicht in $L^2(\Omega)^3$ liegt, folgt weiter die schwache Konvergenz

$$\text{curl } u^\eta \rightharpoonup \text{curl } u^{\text{eff}}$$

in $L^2(\Omega)^3$. □

Ein ähnliches Resultat wie für die Rotation bekommt man auch für die Divergenz eines Vektorfelds beim Grenzübergang in zwei Skalen. Das im Folgenden ausgeführte Lemma basiert auf (Wellander 1998, Satz 5.2, S. 45).

Lemma 3.15 (Divergenz in zwei Skalen). *Es sei (u^η) eine in $H(\text{div}, \Omega)$ beschränkte Folge. Dann existieren eine Teilfolge und eine Funktion $u^0 \in L^2(\Omega; H(\text{div}, Y))$, sodass*

$$\begin{aligned} u^\eta &\xrightarrow{2s} u^0, \\ \eta \text{ div } u^\eta &\xrightarrow{2s} 0 \end{aligned}$$

gelten. Weiter folgt

$$\text{div } u^\eta \rightharpoonup \text{div } u^{\text{eff}}, \text{ wobei } u^{\text{eff}} = \int_Y u^0(\cdot, y) dy$$

in $L^2(\Omega)$.

3 Grundlagen

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas besteht grōßteils aus Schritten, die bereits im Beweis von Lemma 3.14 angewendet werden. Zunāchst bekommt man wie in den Gleichungen (3.18) und (3.19) aus der Beschrānktheit der Folge (u^n) in $H(\operatorname{div}, \Omega)$ in zwei Skalen konvergente Teilfolgen (u^n) und $(\operatorname{div} u^n)$. Also gilt fūr Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))^3$ bzw. $\psi \in C_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \varphi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \cdot \varphi(x, y) dy dx, \quad (3.23)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \operatorname{div} u^\eta(x) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y w(x, y) \psi(x, y) dy dx \quad (3.24)$$

fūr Funktionen $u^0 \in L^2(\Omega \times Y)^3$ sowie $w \in L^2(\Omega \times Y)$. Daraus folgt zunāchst

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} u^\eta(x) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div} u^\eta(x) \psi\left(x, \frac{x}{\eta}\right) dx}_{\text{nach (3.24) beschrānkt}} = 0,$$

was gleichbedeutend zu $\eta \operatorname{div} u^\eta \xrightarrow{2s} 0$ ist. Weiter erhālt man analog zu Gleichung (3.20) fūr eine Funktion $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)$ durch partielle Integration

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u^\eta(x) \tilde{\psi}(x) dx \stackrel{PI}{=} 0 - \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \operatorname{grad} \tilde{\psi}(x) dx. \quad (3.25)$$

Zusammen bekommt man aus (3.23), (3.24) und (3.25) $u^0 \in H(\operatorname{div}, \Omega; H(\operatorname{div}, Y))$ mit $\operatorname{div} u^0 = v$. Schlieſlich zeigt man analog zu Gleichung (3.22) die schwache Konvergenz von $(\operatorname{div} u^n)$, denn mit einer Testfunktion $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y w(x, y) dy \tilde{\psi}(x) dx &\stackrel{(3.24)}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \operatorname{div} u^\eta(x) \tilde{\psi}(x) dx \stackrel{(3.25)}{=} - \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\eta(x) \cdot \operatorname{grad} \tilde{\psi}(x) dx \\ &\stackrel{(3.23)}{=} - \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) dy \cdot \operatorname{grad} \tilde{\psi}(x) dx = - \int_{\Omega} u^{\operatorname{eff}}(x) \cdot \operatorname{grad} \tilde{\psi}(x) dx. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis zu Lemma 3.14 folgt also

$$\operatorname{div} u^n \rightharpoonup \operatorname{div} u^{\operatorname{eff}}$$

in $L^2(\Omega)$. □

Bemerkung. In Lemma 3.13 wird im Gegensatz zu Lemma 3.14 zur Rotation und Lemma 3.15 zur Divergenz in zwei Skalen keine Beschrānktheit der Folge (u^n) in $W^{1,2}(\Omega)$ gefordert. Gilt diese stārkere Voraussetzung, so folgt entsprechend

$$\eta \operatorname{grad} u^n \xrightarrow{2s} 0.$$

Durch die schwāchere Voraussetzung ist es jedoch mōglich, dieses Lemma im folgenden Kapitel (vgl. Gleichung (4.17)) auf Folgen von Testfunktionen in $C_0^\infty(\Omega; W_\#^{1,2}(Y))$ anzuwenden, die nicht unbedingt beschrānkt sind.

3 Grundlagen

Abschließend wird eine Aussage über die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung in zwei Skalen und der Ableitung nach der Zeit zitiert. Diese entspricht (Wellander 2001, Lemma 4.6, S. 40).

Lemma 3.16 (Zeitableitung in zwei Skalen). *Es seien $(u^n) \subset W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$ eine gleichmäßig beschränkte Folge. Dann existieren eine Teilfolge sowie eine eindeutige Funktion $u^0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega \times Y)^3)$, sodass*

$$\begin{aligned} u^n &\xrightarrow{2s} u^0, \\ \partial_t u^n &\xrightarrow{2s} \partial_t u^0 \end{aligned}$$

gelten.

Damit sind hinsichtlich der Zweiskalenkonvergenz alle nötigen Werkzeuge gesammelt, um die Homogenisierung der Maxwell-Gleichungen durchzuführen. Aus dem Maxwell-System 2.5 ist jedoch noch keine Notwendigkeit einer Homogenisierung ersichtlich. Diese ergibt sich erst aus der speziellen Form der in dieser Arbeit betrachteten Materialparameter. Diese werden im nächsten Kapitel genauer spezifiziert. Weiterhin wird die Beschränktheit der Lösungen des damit aufgestellten Modellproblems nachgewiesen.

4 Analytische Homogenisierung

Ausgestattet mit den Vorarbeiten zu den Maxwell-Gleichungen in Kapitel 2 und denen zur Konvergenz in zwei Skalen in Kapitel 3 werden diese nun zusammengeführt, um das in dieser Arbeit betrachtete Modellproblem zu formulieren. Ein wichtiger Schritt, auf dem die im nächsten Kapitel durchgeführte Homogenisierung basiert, ist der anschließend präsentierte Beweis der Beschränktheit der Lösungen.

Ziel dieser Arbeit ist die Betrachtung von zweiskaligen Medien. Zweiskalig bedeutet, dass die Makroskala, welcher beispielsweise der Durchmesser von Ω zuzuordnen ist, um ein Vielfaches größer als die Mikroskala $0 < \eta \ll 1$ ist, auf welcher sich lokal periodische Veränderungen der Materialparameter abspielen. Um diese lokale Periodizität der Materialparameter zu verdeutlichen, werden die Materialparameter von nun an mit μ^η bzw. ε^η bezeichnet. Die entsprechenden lokal Y -periodischen Koeffizienten werden weiterhin mit μ bzw. ε bezeichnet. Es gilt also

$$\mu^\eta(x) = \mu\left(x, \frac{x}{\eta}\right), \quad \varepsilon^\eta(x) = \varepsilon\left(x, \frac{x}{\eta}\right) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Damit sind die magnetische Permeabilität μ^η und die elektrische Permittivität ε^η weiterhin uniform positiv definit und beschränkt. Mit den Konstanten $\Lambda, \lambda > 0$ unabhängig von η gelte also

$$\mu^\eta, \varepsilon^\eta \in L^\infty(\Omega), \quad \text{mit } \Lambda \geq \mu^\eta, \varepsilon^\eta \geq \lambda \quad (4.1)$$

fast überall in Ω . Die kleinskaligen Veränderungen in den Materialkoeffizienten wirken sich auch auf die Lösungen des Maxwell-Systems aus. Dazu wird im nächsten Abschnitt die von nun an verwendete Notation vorgestellt.

4.1 Zeitabhängige Maxwell-Gleichungen in lokal periodischen, linearen, stationären und isotropen Medien

An dieser Stelle werden nun die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen in periodischen, linearen, stationären und isotropen Medien in der in dieser Arbeit betrachteten Form präsentiert. Zur besseren Übersicht für spätere Verweise werden zusätzlich die nach Lemma 2.2 durch die Kontinuitätsgleichung (2.3) und erweiterte Randbedingungen ersetzten Divergenz-Gleichungen angegeben. Damit erhält man das Maxwell-System

$$\mu^\eta(x) \partial_t H^\eta(x, t) = -\text{curl } E^\eta(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in (0, T) \times \Omega, \quad (4.2a)$$

$$\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) = \text{curl } H^\eta(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in (0, T) \times \Omega, \quad (4.2b)$$

$$\text{div}(\mu^\eta(x) H^\eta(x, t)) = 0 \quad \text{für } (x, t) \in (0, T) \times \Omega, \quad (4.2c)$$

$$\text{div}(\varepsilon^\eta(x) E^\eta(x, t)) = \rho(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in (0, T) \times \Omega \quad (4.2d)$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \text{div } J_{\text{ext}} = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega$$

4 Analytische Homogenisierung

für eine gegebene Funktion $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H_0(\text{curl}^2, \Omega)) \cap C(0, T; H(\text{div}, \Omega))$. Weiter gelten mit dem äußeren Normalenvektor n von Ω die Randbedingung

$$n \times E^\eta = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \partial\Omega \quad (4.2e)$$

und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} H^\eta(0) &= H_0^\eta, & E^\eta(0) &= E_0^\eta & \text{in } \Omega, \\ \text{div}(\mu^\eta H_0^\eta) &= 0, & \text{div}(\varepsilon^\eta E_0^\eta) &= \rho(0) & \text{in } \Omega, \\ n \cdot (\mu^\eta H_0^\eta) &= 0 & & & \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (4.2f)$$

mit Anfangswerten $H_0^\eta \in H(\text{curl}^2, \Omega)$ und $E_0^\eta \in H_0(\text{curl}^2, \Omega)$, welche jeweils in der $H(\text{curl}, \Omega)$ -Norm unabhängig von η beschränkt sind. Zusätzlich gelte mit Funktionen $H_0^0, E_0^0 \in L^2(\Omega \times Y)$

$$H_0^\eta \xrightarrow{2s} H_0^0, \quad E_0^\eta \xrightarrow{2s} E_0^0 \quad \text{in } \Omega,$$

wobei zusätzlich mit

$$H_0^{\text{eff}}(x) := \int_Y H_0^0(x, y) dy, \quad E_0^{\text{eff}}(x) := \int_Y E_0^0(x, y) dy \quad \text{für } x \in \Omega \quad (4.2g)$$

$H_0^{\text{eff}} \in H(\text{curl}, \Omega)$ und $E_0^{\text{eff}} \in H_0(\text{curl}, \Omega)$ gelte.

Vorbereitend für den nächsten Abschnitt werden die beiden Gleichungen (4.2a) und (4.2b) zu einem Gleichungssystem zusammengefasst. Dazu werden wie in Definition 2.16 Operatoren definiert, wobei nun durch den Superskript η die Abhängigkeit dieser Abbildungen von den hochoszillatorischen Schwankungen verdeutlicht wird.

Definition 4.1. Es werden für $\psi, \varphi \in L^2(\Omega)^3$ mit $\xi = (\psi, \varphi)^T$ folgende Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\eta : H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & \mathcal{C}^\eta \xi &= \begin{pmatrix} -(\mu^\eta)^{-1} \text{curl } \varphi \\ (\varepsilon^\eta)^{-1} \text{curl } \psi \end{pmatrix}, \\ j^\eta : \mathbb{R}^3 \times (0, T) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & j^\eta(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(\varepsilon^\eta)^{-1} J_{\text{ext}}(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit obiger Definition und $u^\eta = (H^\eta, E^\eta) \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ können die Maxwell-Gleichungen (4.2a) und (4.2b) analog zu (2.12) äquivalent in die Form

$$\partial_t u^\eta(x, t) = \mathcal{C}^\eta u^\eta(x, t) + j^\eta(x, t) \quad (4.3)$$

umgeschrieben werden.

Diese Formulierung wird im nächsten Abschnitt verwendet, um die Resultate aus Kapitel 2 auf das Modellproblem zu übertragen.

4.2 Beschränktheit von Lösungen

Zusätzlich zur Existenz und Eindeutigkeit ist für die Herleitung der Homogenisierungsergebnisse in Abschnitt 4.3 insbesondere die Beschränktheit der Lösungen unabhängig von der Mikroskala η eine wichtige Voraussetzung. Während die Existenz einer eindeutigen Lösung bereits in Korollar 2.18 bewiesen wird, steht der Beweis der Beschränktheit noch aus. Dabei ist es insbesondere wichtig, dass die Lösungen unabhängig von der Mikroskala η beschränkt sind. Dies ist Inhalt des nachfolgenden Satzes.

Satz 4.2 (Beschränktheit der Lösungen). *Zu $\eta > 0$ sei $(H^\eta, E^\eta) \in D(\mathcal{C}^\eta)$ die Lösung des Maxwell-Systems (4.2). Dann sind H^η , E^η , $\partial_t H^\eta$, $\partial_t E^\eta$, $\text{curl } H^\eta$ und $\text{curl } E^\eta$ jeweils unabhängig von η in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ beschränkt.*

Bemerkung. Da nach Satz 2.18 eine eindeutige Lösung

$$u^\eta = (H^\eta, E^\eta) \in C^1(0, T; X) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}^\eta))$$

existiert, folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Lösung und der Zeitableitung in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ direkt. Jedoch ist es für die weitere Untersuchung in Abschnitt 4.3 essentiell, dass von der Mikroskala η unabhängige Schranken für die verschiedenen Funktionen existieren. Dies wird im Folgenden bewiesen.

Beweis von Satz 4.2. Zunächst werden H^η und E^η betrachtet. Deren Beschränktheit folgt direkt aus der Gestalt der eindeutigen Lösung aus Korollar 2.18 und wird analog zum Vorgehen in (Hochbruck u. a. 2017, Korollar 1.29, S. 21) bewiesen. Die Anwendung der Zeitableitung bzw. der Rotationen auf die Lösungen H^η und E^η in der Form (2.14) ist jedoch nicht zielführend. Dann treten nämlich Terme der Form $\varepsilon^\eta \text{curl}(\varepsilon^\eta)^{-1}$ auf, die nicht ohne weiteres unabhängig von η beschränkt werden können. Deshalb werden $\partial_t H^\eta$ und $\partial_t E^\eta$ analog zum Vorgehen im Beweis zu (Wellander 2001, Proposition 5.3, S. 41 ff.) mithilfe des Lemmas von Gronwall beschränkt. Die Beschränktheit von $\text{curl } H^\eta$ und $\text{curl } E^\eta$ folgt schließlich aus den Maxwell-Gleichungen.

H^η und E^η : Die Beschränktheit der Funktionen H^η und E^η folgt direkt mit Korollar 2.18. Das grundsätzliche Vorgehen entspricht hierbei dem im Beweis zu (Hochbruck u. a. 2015, Korollar 1.29, S. 21). Dazu betrachtet man zunächst die $\mu^\eta \times \varepsilon^\eta$ -Norm der eindeutigen Lösung (2.14). Es folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\|u^\eta(t)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} \leq \|T(t)u_0^\eta\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} + \int_0^t \|T(t-s)j(s)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} ds.$$

Weiter gilt mit Gleichung (2.11) zunächst

$$\|u^\eta(t)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} \leq \|u_0^\eta\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} + \int_0^t \|j(s)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} ds. \quad (4.4)$$

Im Folgenden werden die einzelnen Terme von (4.4) getrennt betrachtet. Zunächst folgt für den Integralterm aus der Definition des $\mu^\eta \times \varepsilon^\eta$ -Skalarprodukts (2.13)

$$\|j^\eta(s)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta}^2 = (\varepsilon^\eta (\varepsilon^\eta)^{-1} J_{\text{ext}}(s), (\varepsilon^\eta)^{-1} J_{\text{ext}}(s))_{L^2(\Omega)^3} \leq \frac{1}{\lambda} \|j^\eta(s)\|_{L^2(\Omega)^3}^2$$

und damit

$$\int_0^t \|j^\eta(s)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} ds \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \|J_{\text{ext}}(s)\|_{L^2(\Omega)^3} ds.$$

Für die Anfangswerte gilt zunächst nach Voraussetzung in (4.2), dass diese in der $H(\text{curl}, \Omega)$ -Norm unabhängig von η beschränkt sind. Dann sind diese insbesondere auch in der $L^2(\Omega)^3$ -Norm unabhängig von η beschränkt. Auch μ^η und ε^η sind nach (4.1) unabhängig von η durch Λ nach oben beschränkt. Zusammen ergibt dies die Existenz einer Konstante $C > 0$ unabhängig von η mit

$$\|u_0^\eta\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} \leq C. \quad (4.5)$$

Schließlich folgt für den linken Term mit der Definition des $\mu^\eta \times \varepsilon^\eta$ -Skalarprodukts (2.13) und der Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \quad \text{für } a, b > 0$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u^\eta(t)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} &= \sqrt{(\mu^\eta H^\eta(t), H^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3} + (\varepsilon^\eta E^\eta(t), E^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\mu^\eta H^\eta(t), H^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon^\eta E^\eta(t), E^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3}} \quad (4.6) \\ &\stackrel{(4.1)}{\geq} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\|H^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\|H^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3} + \|E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}) \leq C + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \|J_{\text{ext}}(s)\|_{L^2(\Omega)^3} ds.$$

Da J_{ext} stetig in der Zeit und damit beschränkt auf dem Intervall $(0, T)$ ist, sind die beiden Funktionen H^η und E^η folglich wie behauptet unabhängig von η in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ beschränkt.

$\partial_t H^\eta$ und $\partial_t E^\eta$: Grundlage für diesen Teil des Beweises ist der Beweis zu (Wellander 2001, Proposition 5.3, S. 41 ff.). Zunächst wird das Zeitintervall $(0, T)$ für $N \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ in Teilintervalle (t_{n-1}, t_n) , mit $n \leq N$ unterteilt. Dazu seien $u_n^\eta = u^\eta(t_n)$ und $(u_n^\eta)' = \partial_t u^\eta(t_n)$ die Funktionswerte und Ableitungen der Lösung an den Stellen t_n , $n \leq N$. Da diese das Maxwell-System (2.12) jeweils zur Zeit t_n erfüllen, gilt

$$(u_n^\eta)'(x) = \mathcal{C}^\eta u_n^\eta(x) + j(x, t_n) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Subtraktion der Gleichung zur Zeit t_{n-1} von der zur Zeit t_n und anschließende Division durch $\Delta t_n := t_n - t_{n-1}$ ergibt

$$\frac{(u_n^\eta)'(x) - (u_{n-1}^\eta)'(x)}{\Delta t_n} = \mathcal{C}^\eta \frac{u_n^\eta(x) - u_{n-1}^\eta(x)}{\Delta t_n} + \frac{j(x, t_n) - j(x, t_{n-1})}{\Delta t_n} \quad \text{für } x \in \Omega.$$

4 Analytische Homogenisierung

Nun wird das $\mu^\eta \times \varepsilon^\eta$ -Skalarprodukt dieser Gleichung mit $\frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n}$ gebildet. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{(u_n^\eta)' - (u_{n-1}^\eta)'}{\Delta t_n}, \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n} \right)_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} &= \left(\mathcal{C}^\eta \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n}, \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n} \right)_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} \\ &\quad + \left(\frac{j(t_n) - j(t_{n-1})}{\Delta t_n}, \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n} \right)_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta}. \end{aligned}$$

Mit der Schiefadjungiertheit von \mathcal{C}^η (vgl. Lemma 2.17) folgt daraus

$$\left(\frac{(u_n^\eta)' - (u_{n-1}^\eta)'}{\Delta t_n}, \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n} \right)_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} = \left(\frac{j(t_n) - j(t_{n-1})}{\Delta t_n}, \frac{u_n^\eta - u_{n-1}^\eta}{\Delta t_n} \right)_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta}.$$

Wegen $u^\eta \in C^2(0, T; X)$ und $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H(\text{div}, \Omega))$ kann nun der Grenzwert für $\Delta t_n \rightarrow 0$ gebildet werden. Es gilt damit für $\Delta t_n \rightarrow 0$

$$(\partial_{tt} u^\eta(t), \partial_t u^\eta(t))_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} = (\partial_t j(t), \partial_t u^\eta(t))_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta}.$$

Das Einsetzen von $u^\eta = (H^\eta, E^\eta)$ liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\mu^\eta \partial_t H^\eta(t), \partial_t H^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{2} \partial_t (\varepsilon^\eta \partial_t E^\eta(t), \partial_t E^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3} & \quad (4.7) \\ &= (\partial_t J_{\text{ext}}(t), \partial_t E^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

Zusätzlich kann auch die Zeitableitung der Anfangswerte beschränkt werden, es gilt nämlich mit (2.12) zur Zeit $t = 0$ mit einer ähnlichen Argumentation wie vor Gleichung (4.5) mit einer Konstanten $C_0 > 0$ unabhängig von η

$$\|\partial_t u^\eta(0)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} = \|\mathcal{C}^\eta u^\eta(0) + j^\eta(0)\|_{\mu^\eta \times \varepsilon^\eta} \leq C_0.$$

Damit kann (4.7) über das Zeitintervall $(0, t_*) \subset (0, T)$ integriert werden, was

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mu^\eta \partial_t H^\eta(t_*), \partial_t H^\eta(t_*))_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{2} (\varepsilon^\eta \partial_t E^\eta(t_*), \partial_t E^\eta(t_*))_{L^2(\Omega)^3} & \\ \leq C_0 + \int_0^{t_*} (\partial_t J_{\text{ext}}(t), \partial_t E^\eta(t))_{L^2(\Omega)^3} dt & \quad (4.8) \\ \leq C_0 + \left(\int_0^{t_*} \|\partial_t J_{\text{ext}}(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_*} \|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} & \\ \leq C_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{t_*} \|\partial_t J_{\text{ext}}(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt}_{=: C_J} + \frac{1}{2} \int_0^{t_*} \|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt & \end{aligned}$$

ergibt. Hierbei wird im vorletzten Schritt die Hölderungleichung angewendet. Die Konstante $C_J > 0$ existiert wegen $J_{\text{ext}} \in C^1(0, T; H(\text{div}, \Omega))$. Im letzten Schritt wird mit der

zweiten binomischen Formel abgeschätzt. Unter Anwendung von Gleichung (4.6) folgt für die linke Seite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\mu^\eta \partial_t H^\eta(t_*), \partial_t H^\eta(t_*))_{L^2(\Omega)^3} + \frac{1}{2} (\varepsilon^\eta \partial_t E^\eta(t_*), \partial_t E^\eta(t_*))_{L^2(\Omega)^3} \\ & \stackrel{(4.6)}{\geq} \frac{\lambda}{4} \left(\|\partial_t H^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right) \geq \frac{\lambda}{4} \|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2. \end{aligned}$$

Wieder eingesetzt in (4.8) folgt schließlich

$$\|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \frac{4C_0}{\lambda} + \frac{4C_J}{\lambda} \left(\int_0^{t_*} \|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus mit dem Lemma von Gronwall (vgl. (Emmrich 1999, Proposition 2.1, S. 5 f.)) die Abschätzung

$$\|\partial_t E^\eta(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \frac{4C_J}{\lambda} \exp\left(\frac{4C_0 T}{\lambda}\right) \quad \text{für fast alle } t \in (0, T)$$

resultiert. Da $\partial_t E^\eta$ stetig ist, folgt hieraus die Beschränktheit in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ unabhängig von η . Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in (4.8) folgt dasselbe für $\partial_t H^\eta$.

curl H^η und curl E^η : Umstellung des Maxwell-Systems (2.12) nach den Rotations-termen ergibt $\text{curl } H^\eta = \varepsilon^\eta \partial_t E^\eta - J_{\text{ext}}$ und $\text{curl } E^\eta = -\mu^\eta \partial_t H^\eta$. Da alle Terme auf den rechten Seiten unabhängig von η beschränkt sind, gilt dies auch für die linken Seiten, womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Aus dieser Beschränktheit folgt nun nach Kapitel 3 die Existenz von in zwei Skalen konvergenten Teilfolgen. Zusammen mit den weiteren Eigenschaften der Konvergenz in zwei Skalen werden im folgenden Abschnitt zwei homogenisierte Maxwell-Systeme vorgestellt.

4.3 Analytische Homogenisierungsergebnisse

Zwischen den Größenordnungen der Makro- und Mikroskala kann ein sehr großer Faktor liegen. In diesem Fall ist eine numerische Behandlung des vorgestellten Modellproblems (4.2), die beide Skalen auflösen soll, sehr aufwendig. Der Ansatz der Homogenisierungstheorie besteht nun darin, aus dem Modellproblem ein neues Differentialgleichungssystem für das makroskopische Verhalten der Lösungen abzuleiten. Die grundsätzliche Idee dabei besteht darin, den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ der Größenordnung der Mikroskala zu betrachten. Damit wird das Verhalten auf Mikroebene, welches das makroskopische Verhalten in den ursprünglichen Gleichungen überlagert, eliminiert.

In diesem Abschnitt werden nun zwei Homogenisierungsergebnisse präsentiert und bewiesen. Dabei wird zunächst der Grenzwert in zwei Skalen und anschließend der schwache Grenzwert von Lösungen des Maxwell-Systems (4.2) betrachtet. Diese Grenzwerte lösen wiederum ähnliche Differentialgleichungssysteme, die ebenfalls bestimmt werden.

Dabei basieren die Aussagen und Beweise in diesem Kapitel auf den Theoremen 3.1 und 3.2 in (Wellander 2001). Da dort Maxwell-Systeme in allgemeinerer Form behandelt werden, können die Beweise an einigen Stellen für den hier betrachteten Spezialfall abgekürzt werden. Zur verbesserten Lesbarkeit werden die Beweise durch Zwischenschritte und zusätzliche Erläuterungen erweitert.

Im folgenden Satz werden also die Zwei-Skalen-Grenzwerte der Lösungen H^n und E^n des Maxwellsystems (4.2) betrachtet. Durch Verwendung einiger Resultate aus Kapitel 3 kann dazu ein System von Differentialgleichungen bestimmt werden, dessen Form mit der des ursprünglichen Systems übereinstimmt und dessen Lösungen diese Grenzwerte in zwei Skalen sind. Dabei werden die beiden Lösungen in einen Term der Makroskala und einen der Mikroskala getrennt.

Satz 4.3 (Zwei-Skalen-Maxwell-Gleichungen). *Für Folgen (H^n) und (E^n) von Lösungen der Maxwell-Gleichungen (4.2) gilt*

$$H^n(x, t) \xrightarrow{2s} H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t), \quad E^n(x, t) \xrightarrow{2s} E^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_E(x, y, t)$$

in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y)^3)$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} H^{\text{eff}}, E^{\text{eff}} &\in L^\infty(0, T; H(\text{curl}, \Omega)^3), & \theta_H, \theta_E &\in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega \times Y)), \\ \partial_t H^{\text{eff}}, \partial_t E^{\text{eff}} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y)^3), & \partial_t \theta_H, \partial_t \theta_E &\in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega \times Y)). \end{aligned}$$

Diese Grenzwerte lösen zugleich die Zwei-Skalen-Maxwell-Gleichungen

$$\int_Y \mu(x, y) \partial_t (H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t)) dy = -\text{curl} E^{\text{eff}}(x, t), \quad (4.9a)$$

$$\int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t (E^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_E(x, y, t)) dy = \text{curl} H^{\text{eff}}(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t), \quad (4.9b)$$

$$\text{div} \int_Y \mu(x, y) (H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t)) dy = 0, \quad (4.9c)$$

$$\text{div} \int_Y \varepsilon(x, y) (E^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_E(x, y, t)) dy = \rho^0(x, t) \quad (4.9d)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und fast alle $t \in (0, T)$. Zusätzlich gelten die Anfangsbedingungen

$$H^{\text{eff}}(x, 0) = H_0^{\text{eff}}(x), \quad E^{\text{eff}}(x, 0) = E_0^{\text{eff}}(x) \quad (4.10)$$

für fast alle $x \in \Omega$ mit den Anfangswerten aus (4.2g). Weiterhin gilt die Randbedingung

$$n \times E^{\text{eff}}(x, t) = 0 \quad (4.11)$$

fast überall in Ω und $(0, T)$ und folgende Zellprobleme in schwacher Form

$$\int_Y \mu(x, y) (H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0, \quad (4.12a)$$

$$\int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t (E^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_E(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0 \quad (4.12b)$$

für alle $v_2 \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$.

Für die Zellprobleme (4.12) wird der Raum $W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$ verwendet. Dieser ist definiert als

$$W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R} := \left\{ v \in W^{1,2}(Y) \mid v \text{ Y-periodisch, } \int_{\partial Y} v(s) ds = 0 \right\}.$$

Da explizit gefordert wird, dass der Mittelwert dieser Funktionen auf dem Rand verschwindet, gilt folgendes Lemma, welches später in diesem Kapitel benötigt wird:

Lemma 4.4. Für $v \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$ und $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} v(y) dy = 0.$$

Beweis. Mit partieller Integration gilt für $i = 1, 2, 3$

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} v(y) dy = \underbrace{\int_{\partial Y} v(y) 1 ds}_{=0} - \int_Y v(y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} 1}_{=0} dy = 0,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Nun wird das erste Homogenisierungsergebnis bewiesen.

Beweis von Satz 4.3. Zunächst wird im Folgenden die Herleitung der beiden Zellprobleme (4.12) präsentiert. Anschließend folgt die Bestimmung der Maxwell-Gleichungen in zwei Skalen (4.9a), (4.9b) und (4.9c). Bei (4.9d) handelt es sich um die Definition der Ladungsdichte in zwei Skalen. Im nächsten Schritt werden die Anfangsbedingungen (4.10) und die Randbedingung (4.11) bestimmt. Schließlich folgt eine Betrachtung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des gesamten Systems in zwei Skalen.

Im Laufe des Beweises ist es an einigen Stellen notwendig, statt der gesamten Folge nur Teilfolgen derselben zu betrachten, um von der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge zur Konvergenz der Teilfolge in zwei Skalen zu gelangen. Da man jedoch zeigen kann, dass der Grenzwert der Teilfolge nach dem Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ in zwei Skalen eindeutig bestimmt ist, gilt mit Lemma 3.3 die Konvergenz der gesamten Folgen in zwei Skalen. Deshalb wird im Folgenden bei der Bezeichnung nicht zwischen der gesamten Folge und Teilfolgen unterschieden.

1. Zellproblem: Wendet man den Divergenz-Operator auf (4.2b) an, so erhält man

$$\operatorname{div} (\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t)) = -\operatorname{div} J_{\text{ext}}(x, t),$$

wobei $\operatorname{div} \operatorname{curl} H^\eta(x, t) \stackrel{\text{Lem. 2.1}}{=} 0$ direkt eingesetzt wird. Nun wird diese Gleichung mit η , $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $v_2 \in W_{\#}^{1,2}(Y)$ multipliziert und anschließend über Ω integriert, was

$$\int_{\Omega} \eta \operatorname{div} (\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t)) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx = - \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} (J_{\text{ext}}(x, t)) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx$$

ergibt. Partielle Integration angewendet auf den linken Teil liefert

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \right) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx \\
 &= \int_{\partial\Omega} \eta \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \cdot \underbrace{n}_{=0} v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) ds \\
 &\quad - \int_{\Omega} \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \cdot \eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) dx \\
 &= - \int_{\Omega} \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \cdot \eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) dx.
 \end{aligned}$$

Da der Randterm wegen $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ verschwindet, erhält man

$$\int_{\Omega} \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \cdot \eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) dx = \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(J_{\text{ext}}(x, t) \right) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx. \quad (4.13)$$

Im nächsten Schritt wendet man die Eigenschaften der Konvergenz in zwei Skalen auf diese Gleichung an. Wegen $J_{\text{ext}} \in W^{1,2}(0, T; H(\operatorname{div}, \Omega))$ und da es sich bei $v_1 v_2$ um eine zulässige Testfunktion handelt, folgt für den rechten Teil dieser Gleichung mit Lemma 3.15

$$\int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(J_{\text{ext}}(x, t) \right) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y \underbrace{\operatorname{div}_y \left(J_{\text{ext}}(x, t) \right)}_{=0} v_1(x) v_2(y) dy dx = 0. \quad (4.14)$$

Für den linken Teil von Gleichung (4.13) zeigt man zunächst, dass $\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t)$ in zwei Skalen konvergiert. Da nach Satz 4.2 (E^η) und $(\partial_t E^\eta)$ gleichmäßig beschränkt sind, existiert nach Lemma 3.11 eine in zwei Skalen gegen

$$E^0(x, y, t) = E^{\text{eff}}(x, t) + \operatorname{grad}_y \theta_E(x, y, t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y)) \quad (4.15)$$

konvergente Teilfolge. Mit Lemma 3.16 folgt weiter aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $(\partial_t E^\eta)$, dass eine Teilfolge von $(\partial_t E^\eta)$ in zwei Skalen gegen $\partial_t E^0$ konvergiert. Schließlich folgt mit Lemma 3.12

$$\varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \xrightarrow{2s} \varepsilon(y) \partial_t E^0(x, y, t). \quad (4.16)$$

Es bleibt zu zeigen, dass es sich bei $\eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right)$ um eine zulässige Testfunktion handelt. Mithilfe der Produktregel folgt zunächst

$$\eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) = v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \eta \operatorname{grad} v_1(x) + v_1(x) \eta \operatorname{grad} v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right).$$

Anwendung von Lemma 3.12 zusammen mit Lemma 3.13 jeweils auf die beiden Terme ergibt

$$\eta \operatorname{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) \xrightarrow{2s} v_2(y) \underbrace{\operatorname{grad}_y v_1(x)}_{=0} + v_1(x) \operatorname{grad}_y v_2(y). \quad (4.17)$$

4 Analytische Homogenisierung

Da $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\text{grad}_y v_2 \in L^2_\#(Y)$ gilt, ist das Produkt dieser beiden Funktionen eine zulässige Testfunktion.

Nimmt man nun die beiden Resultate (4.16) und (4.17) zusammen, so erhält man unter Anwendung von Satz 3.8

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) \cdot \eta \text{grad} \left(v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) \right) dx \\ \rightarrow \int_{\Omega} v_1(x) \int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t E^0(x, y, t) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zusammenfassend erhält man also mit (4.14) und (4.18) für $\eta \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} v_1(x) \int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t E^0(x, y, t) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy dx = 0, \quad \forall v_1 \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall v_2 \in W_\#^{1,2}(Y).$$

Da $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig war, folgt schließlich mit (4.15) das Zellproblem (4.12b)

$$\int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t (E^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_E(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0, \quad \forall v_2 \in W_\#^{1,2}(Y).$$

2. Zellproblem: Hierzu multipliziert man zunächst (4.2c) mit η , $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $v_2 \in W_\#^{1,2}(Y)$ und integriert anschließend über Ω , was

$$\int_{\Omega} \eta \text{div} \left(\mu^\eta(x) \partial_t H^\eta(x, t) \right) v_1(x) v_2 \left(\frac{x}{\eta} \right) dx = 0$$

ergibt. Wie bei der Herleitung des ersten Zellproblems wird nun partiell integriert. Man erhält ebenso, dass

$$H^0(x, y, t) = H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times Y)) \quad (4.19)$$

gilt. Damit folgt wiederum

$$\mu^\eta(x) H^\eta(x, t) \xrightarrow{2s} \mu(x, y) \partial_t H^0(x, y, t),$$

sodass man schließlich

$$\int_{\Omega} v_1(x) \int_Y \mu(x, y) \partial_t H^0(x, y, t) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy dx = 0, \quad \forall v_1 \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall v_2 \in W_\#^{1,2}(Y)$$

erhält. Da $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig war, folgt wie zuvor mit (4.19) das Zellproblem (4.12a)

$$\int_Y \mu(y) \partial_t (H^{\text{eff}}(x, t) + \text{grad}_y \theta_H(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0, \quad \forall v_2 \in W_\#^{1,2}(Y).$$

Maxwell-System in zwei Skalen: Als nächstes wird das Maxwell-System (4.9a)-(4.9d) bestimmt. Dazu werden die Gleichungen (4.2a), (4.2b) und (4.2c) mit $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $b \in C_0^\infty(0, T)$ multipliziert und anschließend über Ω und $(0, T)$ integriert. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \mu^\eta(x) \partial_t H^\eta(x, t) v_1(x) b(t) dx dt &= - \int_0^T \int_\Omega \operatorname{curl} E^\eta(x, t) v_1(x) b(t) dx dt, \\ \int_0^T \int_\Omega \varepsilon^\eta(x) \partial_t E^\eta(x, t) v_1(x) b(t) dx dt &= \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{curl} H^\eta(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t)) v_1(x) b(t) dx dt, \\ \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} (\mu^\eta(x) H^\eta(x, t)) v_1(x) b(t) dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Nun werden die Funktionen so sortiert, dass man Produkte von zulässigen Testfunktionen mit in zwei Skalen oder zumindest schwach konvergenten Funktionen erhält.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\partial_t H^\eta(x, t)}_{\stackrel{2s}{\approx} \partial_t H^0(x, y, t)} \underbrace{\mu^\eta(x) v_1(x) b(t)}_{\text{zulässig}} dx dt &= - \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\operatorname{curl} E^\eta(x, t)}_{\rightarrow \operatorname{curl} E^{\text{eff}}(x, t)} \underbrace{v_1(x) b(t)}_{\text{zulässig}} dx dt, \\ \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\partial_t E^\eta(x, t)}_{\stackrel{2s}{\approx} \partial_t E^0(x, y, t)} \underbrace{\varepsilon^\eta(x) v_1(x) b(t)}_{\text{zulässig}} dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \underbrace{(\operatorname{curl} H^\eta(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t))}_{\rightarrow \operatorname{curl} H^{\text{eff}}(x, t)} \underbrace{v_1(x) b(t)}_{\text{zulässig}} dx dt, \\ \int_0^T \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div} (\mu^\eta(x) H^\eta(x, t))}_{\rightarrow \int_Y \mu(x, y) \operatorname{div}_x H^0(x, y, t) dy} \underbrace{v_1(x) b(t)}_{\text{zulässig}} dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Dabei werden für

$$\begin{aligned} \partial_t H^\eta(x, t) &\stackrel{2s}{\approx} \partial_t H^0(x, y, t) = \partial_t (H^{\text{eff}}(x, t) + \operatorname{grad}_y \theta_H(x, y, t)) \\ \partial_t E^\eta(x, t) &\stackrel{2s}{\approx} \partial_t E^0(x, y, t) = \partial_t (E^{\text{eff}}(x, t) + \operatorname{grad}_y \theta_E(x, y, t)) \end{aligned}$$

die Lemmata 3.16 und 3.14 verwendet. Aus Lemma 3.14 folgt weiterhin

$$\operatorname{curl} H^\eta(x, t) \rightharpoonup \operatorname{curl} H^{\text{eff}}(x, t) \text{ in } L^2(\Omega)^3, \quad \operatorname{curl} E^\eta(x, t) \rightharpoonup \operatorname{curl} E^{\text{eff}}(x, t).$$

Schließlich folgt aus den Lemmata 3.12 und 3.15

$$\operatorname{div} (\mu^\eta(x) H^\eta(x, t)) \rightharpoonup \int_Y \mu(x, y) \operatorname{div}_x (H^{\text{eff}}(x, t) + \operatorname{grad}_y \theta_H(x, y, t)) dy \text{ in } L^2(\Omega)^3.$$

Damit folgen die Gleichungen (4.9a)-(4.9c) für den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$, indem man einsetzt, dass $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $b \in C_0^\infty(0, T)$ beliebig sind.

Analog zur Betrachtung von Gleichung (4.9c) kann auch die linke Seite von Gleichung (4.9d) betrachtet werden. Damit definiert man nun die Ladungsdichte in zwei Skalen

$$\rho^0(x, t) := \operatorname{div} \int_Y \varepsilon(x, y) (E^{\text{eff}}(x, t) + \operatorname{grad}_y \theta_E(x, y, t)) dy.$$

Anfangsbedingungen: Die Anfangsbedingungen (4.10) erhält man aus (4.2f), da H_0^η und E_0^η nach Voraussetzung in zwei Skalen gegen H_0^0 bzw. E_0^0 konvergieren. Anschließend folgen die Anfangsbedingungen aus Lemma 3.11 durch Integration über Y .

Randbedingung: Die Randbedingung (4.11) erhält man aus (4.2e), indem man die Konvergenz von E^η in zwei Skalen einsetzt und wie bei den Anfangsbedingungen über Y integriert.

Eindeutigkeit der Grenzwerte: Es seien

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H^0(x, y, t) \\ E^0(x, y, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H^{\text{eff}}(x, t) \cdot y + \theta_H(x, y, t) \\ E^{\text{eff}}(x, t) \cdot y + \theta_E(x, y, t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{H}^0(x, y, t) \\ \tilde{E}^0(x, y, t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{H}^{\text{eff}}(x, t) \cdot y + \tilde{\theta}_H(x, y, t) \\ \tilde{E}^{\text{eff}}(x, t) \cdot y + \tilde{\theta}_E(x, y, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

zwei Paare von Zwei-Skalen-Grenzwerten verschiedener Teilfolgen. Dann sind sowohl $D_y H^0, D_y E^0$ als auch $D_y \tilde{H}^0, D_y \tilde{E}^0$ Lösungen des Maxwell-Systems (4.9), weshalb mit den Zellproblemen (4.12) fast überall in $\Omega \times (0, T)$

$$\int_Y \mu(x, y) \text{grad}_y (H^0(x, y, t) - \tilde{H}^0(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0, \quad (4.21)$$

$$\int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t \text{grad}_y (E^0(x, y, t) - \tilde{E}^0(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy = 0 \quad (4.22)$$

für alle $v_2 \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$ gilt. Durch Differentiation von Gleichung (4.21) und Integration von Gleichung (4.22) nach der Zeit erhält man außerdem fast überall in $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{aligned} \int_Y \mu(x, y) \partial_t \text{grad}_y (H^0(x, y, t) - \tilde{H}^0(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy &= 0, \\ \int_Y \varepsilon(x, y) \text{grad}_y (E^0(x, y, t) - \tilde{E}^0(x, y, t)) \cdot \text{grad}_y v_2(y) dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

für alle $v_2 \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$. Dabei gilt Gleichung (4.23), da die Anfangswerte für E^0 und \tilde{E}^0 identisch sind. Weiterhin sind die Differentiationen nach y und t vertauschbar. Mit dem Lemma von Lax-Milgram (vgl. (Schweizer 2013, Theorem 6.8, S. 122 f.)) erhält man jeweils die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen dieser vier Differentialgleichungen, sodass

$$\begin{aligned} H^0 &= \tilde{H}^0, & E^0 &= \tilde{E}^0, \\ \partial_t H^0 &= \partial_t \tilde{H}^0, & \partial_t E^0 &= \partial_t \tilde{E}^0 \end{aligned}$$

fast überall in $\Omega \times Y \times (0, T)$ folgt. Die Eindeutigkeit der Zerlegungen in (4.20) gilt nach Lemma 3.14.

Schließlich bekommt man durch Einsetzen dieses Ergebnisses in (4.9a) und (4.9b) die Gleichungen

$$\text{curl } H = \text{curl } \tilde{H}^{\text{eff}}, \quad \text{curl } E = \text{curl } \tilde{E}^{\text{eff}}$$

fast überall in $\Omega \times (0, T)$. Damit stimmen die Grenzwerte überein und die gesamten Folgen (E^η) und (H^η) konvergieren gegen diese. \square

4 Analytische Homogenisierung

Im nächsten Satz wird das eben bewiesene Resultat verwendet, um ein Maxwell-System für die effektiven Größen H^{eff} , E^{eff} zu bestimmen, in welchem die Funktionen θ_H und θ_E nicht mehr explizit auftauchen. Dadurch ist dieses System ausreichend, um das makroskopische Verhalten der homogenisierten Größen zu bestimmen.

Satz 4.5 (Effektive Maxwell-Gleichungen). *Für Folgen (H^n) und (E^n) von Lösungen des Maxwell-Systems (4.2) gilt*

$$H^n(x, t) \rightharpoonup H^{\text{eff}}(x, t), \quad E^n(x, t) \rightharpoonup E^{\text{eff}}(x, t)$$

in $L^2(0, T; H(\text{curl}, \Omega))$ mit Grenzwerten $H^{\text{eff}} \in C^1(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap C(0, T; H(\text{curl}, \Omega))$ und $E^{\text{eff}} \in C^1(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap C(0, T; H_0(\text{curl}, \Omega))$. Diese sind zugleich Lösungen der effektiven Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) \partial_t H^{\text{eff}}(x, t) = -\text{curl } E^{\text{eff}}(x, t), \quad (4.24a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) \partial_t E^{\text{eff}}(x, t) = \text{curl } H^{\text{eff}}(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t), \quad (4.24b)$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) H^{\text{eff}}(x, t)) = 0,$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) E^{\text{eff}}(x, t)) = \rho^{\text{eff}}(x, t) \quad (4.24c)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und fast alle $t \in (0, T)$. Dabei gelten die folgenden Anfangsbedingungen

$$H^{\text{eff}}(x, 0) = H_0^{\text{eff}}(x), \quad E^{\text{eff}}(x, 0) = E_0^{\text{eff}}(x) \quad (4.25a)$$

für fast alle $x \in \Omega$ mit den Anfangswerten aus (4.2g). Weiterhin gilt die Randbedingung

$$n \times E^{\text{eff}}(x, t) = 0 \quad (4.25b)$$

fast überall in Ω und $(0, T)$. Schließlich sind die effektiven Materialtensoren $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ durch

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) = \int_Y \mu(x, y) (I - D_y \chi_\mu(x, y)) dy, \quad (4.26a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) = \int_Y \varepsilon(x, y) (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y)) dy \quad (4.26b)$$

gegeben, wobei $\chi_\mu(x, \cdot), \chi_\varepsilon(x, \cdot) \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ als Lösungen der Zellprobleme

$$\int_Y \left(\mu(x, y) (I - D_y \chi_\mu(x, y)) \right)^T \text{grad}_y v(y) dy = 0 \quad \forall v \in W_{\#}^{1,2}(Y), \quad (4.27a)$$

$$\int_Y \left(\varepsilon(x, y) (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y)) \right)^T \text{grad}_y v(y) dy = 0 \quad \forall v \in W_{\#}^{1,2}(Y) \quad (4.27b)$$

für fast alle $x \in \Omega$ bestimmt werden können.

Bemerkung. Wie bereits durch die Notation von $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ gekennzeichnet, handelt es sich bei den effektiven Materialparametern um Tensoren. So ist es trotz der Isotropie von μ^n und ε^n möglich, dass die effektive Permeabilität und Permittivität anisotrop sind. Dies bedeutet, dass das Materialverhalten von der Raumrichtung abhängen

kann. Die Symmetrie bleibt jedoch wie die uniforme positive Definitheit und die Beschränktheit erhalten. Ein Beispiel für einen solchen Fall findet sich in (Yue u. a. 2007, Abschnitt 3.3, S. 9 ff.). Dort werden zwar keine Maxwell-Systeme, sondern elliptische Differentialgleichungen betrachtet, die Zellprobleme und damit die effektiven Parameter stimmen jedoch für beide Fälle überein.

Beweis von Satz 4.5. Die Grundidee dieses Beweises besteht darin, für die Funktionen θ_H und θ_E aus Satz 4.3 die Existenz einer Zerlegung der Form

$$\theta_H(x, y, t) = \chi_\mu(x, y) \cdot H^{\text{eff}}(x, t), \quad \theta_E(x, y, t) = -\chi_\varepsilon(x, y) \cdot E^{\text{eff}}(x, t)$$

anzunehmen. Diese Zerlegung wird anschließend in das Maxwell-System in zwei Skalen (4.9) und in die Zellprobleme (4.12) eingesetzt, wodurch das neue Differentialgleichungssystem (4.24) und (4.26) für die Funktionen H^{eff} , E^{eff} , χ_μ sowie χ_ε erhalten wird. Da am Schluss die eindeutige Lösbarkeit dieses neuen Differentialgleichungssystems gezeigt werden kann und auch das Maxwell-System in zwei Skalen eindeutig lösbar ist, müssen die Lösungen in gewisser Weise übereinstimmen. Somit existiert die angenommene Zerlegung und der Satz ist bewiesen.

Zellprobleme: Zunächst wird also die Existenz von eindeutig definierten Funktionen $\chi_\mu, \chi_\varepsilon \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ mit

$$\theta_H(x, y, t) = -\chi_\mu(x, y) \cdot H^{\text{eff}}(x, t), \quad \theta_E(x, y, t) = -\chi_\varepsilon(x, y) \cdot E^{\text{eff}}(x, t) \quad (4.28)$$

angenommen. Einsetzen in die Zellprobleme (4.12) ergibt

$$\begin{aligned} \int_Y \mu(x, y) (H^{\text{eff}}(x, t) - D_y \chi_\mu(x, y) H^{\text{eff}}(x, t)) \cdot \text{grad}_y v(y) dy &= 0, \\ \int_Y \varepsilon(x, y) \partial_t (E^{\text{eff}}(x, t) - D_y \chi_\varepsilon(x, y) E^{\text{eff}}(x, t)) \cdot \text{grad}_y v(y) dy &= 0 \end{aligned}$$

für alle $v \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$. Es folgt also, dass Lösungen χ_μ und χ_ε der Zellprobleme des effektiven Maxwell-Systems (4.27) diese Gleichungen erfüllen. Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösungen folgt mit dem Satz von Lax-Milgram (vgl. (Schweizer 2013, Theorem 6.8, S. 122 f.)) und den Voraussetzungen an μ und ε (vgl. (Abdulle 2009, Abschnitt 3.1, S. 149 ff.)). Damit sind die effektiven Materialparameter in (4.26) wohldefiniert.

Effektives Maxwell-System: Das Einsetzen der Zerlegungen (4.28) in (4.9) ergibt nach Ausklammern von $\partial_t H^{\text{eff}}$, $\partial_t E^{\text{eff}}$, H^{eff} bzw. E^{eff}

$$\begin{aligned} \int_Y \mu(x, y) (I - D_y \chi_\mu(x, y)) \partial_t H^{\text{eff}}(x, t) dy &= -\text{curl } E^{\text{eff}}(x, t), \\ \int_Y \varepsilon(x, y) (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y)) \partial_t E^{\text{eff}}(x, t) dy &= \text{curl } H^{\text{eff}}(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t), \\ \text{div} \int_Y \mu(x, y) (I - D_y \chi_\mu(x, y)) H^{\text{eff}}(x, t) dy &= 0, \\ \text{div} \int_Y \varepsilon(x, y) (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y)) E^{\text{eff}}(x, t) dy &= \rho^0(x, t). \end{aligned}$$

Setzt man nun die Definitionen (4.26a) von $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und (4.26b) von $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ ein, so erhält man das effektive Maxwell-System (4.24). Dabei wird die effektive Ladungsdichte ρ^{eff} durch Gleichung (4.24c) definiert.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung: Um die Existenz einer eindeutigen Lösung des effektiven Maxwell-Systems (4.24) zu zeigen, wird wie in Kapitel 2 Satz 2.15 angewendet. Dabei ist lediglich zu zeigen, dass die effektiven Materialparametern $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ ebenfalls uniform positiv definite Funktionen in $L^\infty(\Omega)$ sind, da die Bedingung an die Anfangswerte schon durch die Voraussetzung (4.2g) erfüllt ist. Die rechte Seite J_{ext} hat sich im Vergleich zu (4.2) nicht verändert, sodass hier nichts weiter zu zeigen ist.

Wie im Anschluss an diesen Beweis in Lemma 4.6 gezeigt wird, stimmen die Eigenschaften der effektiven Permeabilität und Permittivität bis auf die Isotropie mit denen von $\boldsymbol{\mu}^\eta$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^\eta$ überein. Damit kann analog zu \mathcal{C}^η in Definition 2.16 ein Operator \mathcal{C}^{eff} definiert werden, sodass die Existenz einer eindeutigen Lösung

$$(H^{\text{eff}}, E^{\text{eff}}) \in C^1(0, T; L^2(\Omega)^6) \cap C(0, T; D(\mathcal{C}^{\text{eff}}))$$

mit $D(\mathcal{C}^{\text{eff}}) = H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ folgt. Die mögliche Anisotropie der Materialparameter ändert daran nichts, da die Schiefadjungiertheit des Operators \mathcal{C}^{eff} auch für tensorwertige Parameter gilt. Dies wird bereits in der Bemerkung nach Lemma 2.17 angedeutet. \square

Im folgenden Lemma werden die Eigenschaften der effektiven Materialparameter zusammengefasst. In den anschließenden Beweis sind hauptsächlich zwei Ideen aus zwei Quellen eingeflossen. Der Beweis der uniformen positiven Definitheit ist motiviert durch eine Abschätzung in (Papanicolau u. a. 1978, S. 18), wohingegen die Beweisidee zur uniformen Beschränktheit von einer Abschätzung in (Jikov u. a. 1994, S. 40) stammt.

Lemma 4.6. *Die effektive magnetische Permeabilität $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und die effektive elektrische Permittivität $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ sind symmetrisch, uniform positiv definit und beschränkt mit denselben Schranken $\Lambda, \lambda > 0$ wie $\boldsymbol{\mu}^\eta$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^\eta$ aus Gleichung (4.1).*

Beweis. Dieser Beweis ist in drei Abschnitte unterteilt. Zunächst wird die Symmetrie der Größen gezeigt und gleichzeitig eine äquivalente Darstellung der homogenisierten Größen hergeleitet. In den anschließenden beiden Abschnitten wird diese verwendet, um die uniforme positive Definitheit und die Beschränktheit nachzuweisen.

Da die magnetische Permeabilität $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und die elektrische Permittivität $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ exakt gleich zu behandeln sind, werden die folgenden Schritte für einen homogenisierten Tensor $\mathbf{a}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ gezeigt. Dieser ist von der Form

$$\mathbf{a}^{\text{eff}}(x) = \int_Y a(x, y) (I - D_y \chi_a(x, y)) dy, \quad (4.29)$$

wobei $\chi_a(x, \cdot) \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ für fast alle $x \in \Omega$ die folgenden Zellprobleme löst:

$$\int_Y \left(a(x, y) (I - D_y \chi_a(y)) \right)^T \text{grad}_y v(y) dy = 0 \quad \forall v \in W_{\#}^{1,2}(Y). \quad (4.30)$$

4 Analytische Homogenisierung

Symmetrie: Um die Symmetrie von \mathbf{a}^{eff} zu zeigen, wird zunächst die Gleichung (4.29) umgeformt. Die Verwendung der Komponenten der Lösung des Zellproblems $\chi_a \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ als Testfunktionen in (4.30) liefert zunächst

$$\int_Y \left(a(x, y) (I - D_y \chi_a(x, y)) \right)^T D_y \chi_a(x, y) dy = 0. \quad (4.31)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\text{eff}}(x) &\stackrel{(4.29)}{=} \int_Y a(x, y) (I - D_y \chi_a(x, y)) dy - 0 \\ &\stackrel{(4.31)}{=} \int_Y \left(a(x, y) (I - D_y \chi_a(x, y)) \right)^T (I - D_y \chi_a(x, y)) dy \end{aligned}$$

und somit die Symmetrie.

Uniforme positive Definitheit: Da $\chi_a = (\chi_{a,1}, \chi_{a,2}, \chi_{a,3}) \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ gilt, ist Lemma 4.4 komponentenweise anwendbar und es folgt für $i, j = 1, 2, 3$

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \chi_{a,j}(y) dy = 0. \quad (4.32)$$

Ausgehend davon kann die positive Definitheit unabhängig vom Punkt $x \in \Omega$ gezeigt werden. Es gilt nämlich für $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\text{eff}}(x) \xi \cdot \xi &= \int_Y \left(a(x, y) (I - D_y \chi_a(x, y)) \xi \right) \cdot (I - D_y \chi_a(x, y)) \xi dy \\ &\stackrel{(4.1)}{\geq} \lambda \int_Y \left((I - D_y \chi_a(x, y)) \xi \right) \cdot (I - D_y \chi_a(x, y)) \xi dy \\ &= \lambda \left(\|\xi\|_{L^2(Y)}^2 + 2 \int_Y D_y \chi_a(x, y) \xi \cdot \xi dy + \underbrace{\|D_y \chi_a(x, y) \xi\|_{L^2(y)}^2}_{\geq 0} \right) \\ &= \lambda \left(\|\xi\|_{L^2(Y)}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \xi_i \xi_j \underbrace{\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \chi_{a,j}(x, y) dy}_{\stackrel{(4.32)}{=} 0} \right) \\ &= \lambda \|\xi\|_{L^2(Y)}^2. \end{aligned}$$

Hierbei erhält man die gleiche Elliptizitätskonstante wie beim Multiskalentensor a .

Uniforme Beschränktheit: Auch die Beschränktheit des homogenisierten Tensors \mathbf{a}^{eff} kann mit der Schranke Λ des Multiskalentensors a nachgewiesen werden. Dazu wird für $\xi \in \mathbb{R}^3$ folgende Ungleichung betrachtet:

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{(4.1)}{\leq} \int_Y a(x, y) (D_y \chi_a(x, y) \xi) \cdot (D_y \chi_a(x, y) \xi) dy \\
 &= \int_Y a(x, y) (\xi - D_y \chi_a(x, y) \xi - \xi) \cdot (\xi - D_y \chi_a(x, y) \xi - \xi) dy \\
 &= \mathbf{a}^{\text{eff}}(x) \xi \cdot \xi - 2 \underbrace{\int_Y a(x, y) (\xi - D_y \chi_a(x, y) \xi) \cdot \xi dy}_{\stackrel{(4.29)}{=} \mathbf{a}^{\text{eff}} \xi \cdot \xi} + \underbrace{\int_Y a(x, y) dy \xi \cdot \xi}_{\stackrel{(4.1)}{\leq} \Lambda \|\xi\|_{L^2(Y)}^2} \quad (4.33) \\
 &\leq -\mathbf{a}^{\text{eff}}(x) \xi \cdot \xi + \Lambda \|\xi\|_{L^2(Y)}^2.
 \end{aligned}$$

Hierbei wird in der vorletzten Umformung die im ersten Beweisschritt nachgewiesene Symmetrie von a eingesetzt, mit der

$$a(x, y) (\xi - D_y \chi_a(x, y) \xi) \cdot \xi = a(x, y) \xi \cdot (\xi - D_y \chi_a(x, y) \xi)$$

folgt. Schließlich entspricht Gleichung (4.33) der uniformen Beschränktheit

$$\mathbf{a}^{\text{eff}}(x) \xi \cdot \xi \leq \Lambda \|\xi\|_{L^2(Y)}^2$$

mit der gleichen Konstante Λ wie der Multiskalentensor a . □

Für die spätere Verwendung sind im Folgenden die symmetrischen Darstellungen der effektiven magnetischen Permeabilität und der effektiven elektrischen Permittivität gegeben:

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) = \int_Y (I - D_y \chi_\mu(x, y))^T \mu(x, y) (I - D_y \chi_\mu(x, y)) dy, \quad (4.34a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) = \int_Y (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y))^T \varepsilon(x, y) (I - D_y \chi_\varepsilon(x, y)) dy. \quad (4.34b)$$

Rückblickend wurde in diesem Kapitel zunächst mithilfe der Zweiskalenkonvergenz das Zwei-Skalen-Maxwell-System (4.9) hergeleitet. Damit war es anschließend möglich, das effektive Maxwell-System (4.24) zu bestimmen, dessen Lösungen keine explizite Abhängigkeit von der Mikroskala aufweisen. Im nächsten Schritt soll dieses homogenisierte System numerisch gelöst werden. Dazu wird zunächst in Kapitel 5 eine zur Gestalt der Maxwell-Gleichungen passende Ortsdiskretisierung der Makroskala eingeführt. Damit allein ist es jedoch noch nicht möglich, dieses Differentialgleichungssystem zu lösen. Die Zellprobleme, welche die Informationen der Mikroskala enthalten, müssten nämlich zur Bestimmung der effektiven Materialparameter in jedem Punkt des Gebiets gelöst werden. Abhilfe hierfür schafft die Heterogene Mehrskalenmethode, die anschließend in Kapitel 6 eingeführt wird.

5 Ortsdiskretisierung

Ziel dieses Kapitels ist die Einführung einer zu den Maxwell-Gleichungen passende Ortsdiskretisierung. Dabei werden zunächst einige Grundlagen vorgestellt und diskrete Ansatzräume der Finiten-Elemente-Methode in allgemeiner Form erläutert. Ausgehend davon wird zunächst der Standard-Ansatzraum der Lagrange-Elemente eingeführt. Anschließend werden der speziell für den Raum $H(\text{curl}, \Omega)$ entwickelte diskrete Ansatzraum der Nédélec-Elemente und dessen Eigenschaften präsentiert. Dabei basieren die im Folgenden angeführten Vorbemerkungen auf (Hochbruck 2016).

Als erster Schritt hin zur Ortsdiskretisierung wird eine Zerlegung des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definiert.

Definition 5.1 (Zerlegung). Eine Menge \mathcal{T} heißt Zerlegung eines Gebiets Ω , falls

(T1) $\forall K \in \mathcal{T} : K$ offen,

(T2) $\bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K} = \Omega$,

(T3) $\forall K_i, K_j \in \mathcal{T}, K_i \neq K_j : K_i \cap K_j = \emptyset$

gelten.

Diese Eigenschaften erlauben die Berechnung eines Integrals über das Gebiet Ω durch Summation der Integrale über die Zellen $K \in \mathcal{T}$. Es gilt also für eine Funktion $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \varphi(x) dx. \quad (5.1)$$

Zusätzlich wird in dieser Arbeit zur Vereinfachung der weiteren Schritte gefordert, dass die Zerlegungen keine hängenden Knoten aufweisen. Überschneiden sich also die Kanten oder Flächen zweier Nachbarelemente, so stimmen auch deren Randpunkte überein. Dies bezeichnet man als eine zulässige Zerlegung.

Um verschiedene Zerlegungen miteinander vergleichen zu können, wird betrachtet, wie sehr diese zur Interpolation von Funktionen geeignet sind. Wichtige Größen sind dabei

H_K , der Durchmesser der kleinsten Kugel, die das Element K vollständig umhüllt und

ρ_K , der Durchmesser der größten Kugel, die vollständig in das Element K hineinpasst.

Bei der Vorstellung verschiedener Elemente am Ende dieses Kapitels werden Fehler-schranken für die Interpolation präsentiert. Das Verhältnis $\frac{H_K}{\rho_K}$ taucht dabei jeweils in der Konstanten auf.

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Implementierung der Heterogenen Mehrskalermethode in deal.II (siehe Kapitel 7). Diese Bibliothek unterstützt in 3D lediglich Hexaeder als Elemente. Deshalb wird im Folgenden stets angenommen, dass das Gebiet Ω zulässig in Hexaeder zerlegt werden kann. Weiterhin seien für jede betrachtete Zerlegung \mathcal{T}_H alle Elemente $K \in \mathcal{T}_H$ Hexaeder.

Dafür werden die folgenden Polynomräume definiert:

Definition 5.2 (Polynomräume). Zu $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{P}^n(K)$ der Raum der reellen Polynome auf $K \in \mathbb{R}^3$ mit maximalem Grad n . Dies ist gleichbedeutend zu

$$\mathcal{P}^n(K) := \left\{ p \in C^\infty(K), \text{ mit } p(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n_1+n_2+n_3 \leq n} c_{n_1, n_2, n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \right. \\ \left. \text{für } n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0 \text{ und } c_{n_1, n_2, n_3} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ sei der Raum $\mathcal{Q}^{\ell, m, n}(K)$ definiert als der Raum der Polynome mit maximalem Grad ℓ in der ersten, m in der zweiten und n in der dritten Variablen. Es gilt also

$$\mathcal{Q}^{\ell, m, n}(K) := \left\{ p \in C^\infty(K), \text{ mit } \frac{\partial^{\ell+1} p}{\partial x_1^{\ell+1}} \equiv \frac{\partial^{m+1} p}{\partial x_2^{m+1}} \equiv \frac{\partial^{n+1} p}{\partial x_3^{n+1}} \equiv 0 \right\}.$$

Analog sei für $\bar{K} \subset \mathbb{R}^2$ zu $\ell, m \in \mathbb{N}_0$ der Raum $\mathcal{Q}^{\ell, m}(K)$ definiert als der Raum der Polynome mit maximalem Grad ℓ in der ersten und m in der zweiten Variablen. Es gilt also

$$\mathcal{Q}^{\ell, m}(K) := \left\{ p \in C^\infty(K), \text{ mit } \frac{\partial^{\ell+1} p}{\partial x_1^{\ell+1}} \equiv \frac{\partial^{m+1} p}{\partial x_2^{m+1}} \equiv 0 \right\}.$$

Auf jedem Element $K \in \mathcal{T}$ wird nun eine beliebige Quadraturformel gewählt, die aus $M_K \in \mathbb{N}$ Quadraturpunkten $x_{K,m} \in \bar{K}, m = 1, 2, \dots, M_K$ mit Quadraturgewichten $\omega_{K,m} \in \mathbb{R}, m = 1, 2, \dots, M_K$ besteht. Dabei erfülle diese im Folgenden stets für beliebiges, aber fest gewähltes $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Voraussetzungen:

(Q1) $\forall m = 1, \dots, M_K : \omega_{K,m} > 0$.

(Q2) Die Quadraturformel sei für Polynome $p \in \mathcal{Q}^{2k, 2k, 2k}(K)$ exakt, es gilt also

$$\int_K p(x) dx = \sum_{m=1}^{M_K} \omega_{K,m} p(x_{K,m}). \quad (5.2)$$

Ein Beispiel für eine Quadraturformel, die (Q1) und (Q2) für $k = 1$ erfüllt, ist die zweistufige Gauß-Quadratur. Diese wird in Abschnitt 7.1.2 vorgestellt.

Um die weitere Notation zu vereinfachen, wird lediglich eine Quadraturformel gewählt. Diese wird durch affine Transformationen von einem Referenzelement auf die jeweiligen Elemente $K \in \mathcal{T}$ der Zerlegung übertragen. Dadurch stimmt die Anzahl der Quadraturpunkte für alle Elemente überein. Diese wird im Folgenden mit $M = M_K (\forall K \in \mathcal{T}_H)$ bezeichnet.

Zusammenfassend erhält man also aus (5.1) und (5.2) für eine Funktion $\varphi \in L^1(\Omega)$ mit $\varphi|_K \in \mathcal{Q}^{2k, 2k, 2k}(K)$ für alle $K \in \mathcal{T}$ die Gleichung

$$\int_\Omega \varphi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \varphi(x_{K,m}). \quad (5.3)$$

Im nächsten Schritt werden zunächst diskrete Ansatzräume in allgemeiner Form vorgestellt. Damit wird die spätere Präsentation zweier spezieller Räume vorbereitet.

5.1 Allgemeine diskrete Ansatzräume

Die Vorstellung der Lagrange-Elemente und der Nédélec-Elemente in den folgenden beiden Kapiteln verläuft nach derselben Vorgehensweise. Um diese vorzubereiten und die benötigten Grundlagen zu schaffen, wird zunächst ein Überblick über diskrete Ansatzräume in allgemeiner Form präsentiert. Dieser basiert auf (Hochbruck 2016) und (Schneebeli 2003).

Finites Element: Unter einem Finiten Element versteht man die Menge $\{K, \mathcal{P}, \mathcal{A}\}$ bestehend aus einem Element einer Zerlegung $K \in \mathcal{T}$, einem Polynomraum $\mathcal{P}(K)$ und einer Menge an Freiheitsgraden \mathcal{A} . Das Finite Element heißt unisolvent, falls für $p \in \mathcal{P}$ die Implikation

$$\alpha(p) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad p \equiv 0$$

gilt.

Interpolation: Für unisolvente Finite Elemente ist der lokale Interpolationsoperator $\mathcal{I}_K : C^\infty(\bar{K})^3 \rightarrow \mathcal{P}(K)$ mit $f \mapsto \mathcal{I}_K f$ durch

$$\alpha(f - \mathcal{I}_K f) = 0, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathcal{A}$$

wohldefiniert. Zu einer Zerlegung \mathcal{T} wird dann der globale Interpolationsoperator \mathcal{I}_H stückweise durch $\mathcal{I}_H|_K := \mathcal{I}_K$ ($K \in \mathcal{T}$) bestimmt.

Basis: Zu einem unisolventen Finiten Element mit $N_K := \dim \mathcal{P}(K)$ mit den Freiheitsgraden $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_K}\}$ existiert eine lokale Basis $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_K}\} \subset \mathcal{P}(K)$. Diese wird für $i, j = 1, 2, \dots, N_K$ durch die Forderung

$$\alpha_i(\varphi_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Um von diesen lokalen Basen zu einer globalen Basis des diskreten Ansatzraums zu gelangen, werden die lokalen Freiheitsgrade \mathcal{A} aller Elemente der Zerlegung zusammen betrachtet. Dabei können Freiheitsgrade benachbarter Elemente zusammenfallen, falls die Freiheitsgrade auf einer gemeinsamen Kante oder Fläche wirken. Es existieren schließlich die globalen Freiheitsgrade $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, deren Einschränkung auf ein Element $K \in \mathcal{T}$ jeweils mit einem der lokalen Freiheitsgrade aus \mathcal{A} auf K übereinstimmt. Die globale Basis $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ wird dann für $i, j = 1, 2, \dots, N$ definiert durch

$$\beta_i(\Phi_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \Phi_j|_K \in \mathcal{P}(K) \text{ für alle } K \in \mathcal{T}.$$

Diskreter Ansatzraum: Abschließend wird der diskrete Ansatzraum V_H als lineare Hülle dieser globalen Basis definiert. Damit kann dann jede Funktion $u_H \in V_H$ in der Form

$$u_H = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Phi_i$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ dargestellt werden.

Ausgestattet mit diesen Vorüberlegungen wird in den nächsten beiden Abschnitten jeweils ein Finites Element vorgestellt.

5.2 Lagrange-Elemente

In vielen Fällen werden die Lagrange-Elemente zur Bildung des diskreten Ansatzraumes gewählt. Ein Grund hierfür ist, dass die hierbei ausschließlich verwendeten Punktauswertungen als Freiheitsgrade vergleichsweise einfach zu implementieren sind. Weiterhin wird untersucht, inwiefern dieser Ansatzraum für die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen geeignet ist.

Die Definition dieses Elements wird zunächst auf dem Einheitswürfel $\hat{K} := (0, 1)^3$ als Referenzelement formuliert. Durch affine Transformationen kann dieses auf allgemeine Parallelepipede übertragen werden.

Definition 5.3. Die skalarwertigen Lagrange-Elemente auf \hat{K} mit Ordnung $k \in \mathbb{N}$ sind gegeben als Polynomraum $\mathcal{Q}^{k,k,k}(\hat{K})$ zusammen mit den Freiheitsgraden

$$\mathcal{A}(f) := \left\{ f(x_j) \middle| x_j = \left(\frac{m}{k}, \frac{n}{k}, \frac{o}{k} \right)^T, \text{ mit } m, n, o = 0, 1, \dots, k \right\}.$$

Diese Elemente werden im Folgenden mit $\mathcal{L}^k(\hat{K})$ bezeichnet.

Die Menge \mathcal{A} besteht aus $(k+1)^3$ Punktauswertungen. Da die Dimension des Polynomraums $\mathcal{Q}^{k,k,k}(\hat{K})$ mit der Anzahl der Freiheitsgrade übereinstimmt, sind die Lagrange-Elemente wohldefiniert.

Definition 5.4 (Diskrete Ansatzräume $S^k(\mathcal{T})$, $S_{\#}^k(\mathcal{T})/\mathbb{R}$, $S^k(\mathcal{T})^3$). Es sei \mathcal{T} eine Zerlegung des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und $k \in \mathbb{N}$. Der diskrete Ansatzraum der eindimensionalen Lagrange-Elemente mit Ordnung k ist gegeben durch

$$S^k(\mathcal{T}) := \{f \in C(\Omega), \text{ mit } f|_K \in \mathcal{L}^k \text{ für alle } K \in \mathcal{T}\}.$$

Weiter sei der Raum der periodischen Lagrange-Elemente mit verschwindendem Mittelwert auf dem Rand der Ordnung k gegeben als

$$S_{\#}^k(\mathcal{T})/\mathbb{R} := S^k(\mathcal{T}) \cap W_{\#}^{1,2}(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Schließlich ist

$$S^k(\mathcal{T})^3 := S^k(\mathcal{T}) \times S^k(\mathcal{T}) \times S^k(\mathcal{T})$$

der Lagrange-Ansatzraum mit Ordnung k für dreidimensionale Probleme.

Diese Elemente sind jedoch unpassend, um das Maxwell-System (4.2) zu diskretisieren. Grund dafür ist, dass die Randbedingung $n \times E = 0$ lediglich eine Bedingung an die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes darstellt. Diese ist jedoch nicht ohne weitere Einschränkung durch die Freiheitsgrade der Lagrange-Elemente abbildbar. Da diese nämlich jeweils eine Punktauswertung sind, muss zugleich auch die Normalkomponente am Rand verschwinden. Dies hätte also für das diskrete elektrische Feld $E_H \in V_H$ die Randbedingung $E_H = 0$ zur Folge.

Auch für Elemente $K \in \mathcal{T}$ im Innern des Gebiets Ω müssten zu starke Bedingungen an Übergängen zu benachbarten Elementen gestellt werden, um tatsächlich $V_H \in H(\text{curl}, \Omega)$ zu erhalten. So reicht es dafür nach (Hochbruck u. a. 2017, Lemma 2.26, S. 31) aus, wenn die Funktionen in V_H an den Übergängen stetig bezüglich ihrer Tangentialkomponente sind. Dies führt jedoch bei Lagrange-Elementen wie zuvor zur gleichzeitigen Stetigkeit der Normalkomponente.

Im nächsten Abschnitt wird deshalb ein weiteres Finites Element eingeführt, für das eine Bedingung an die Tangentialkomponente auf Randflächen direkt in den Freiheitsgraden enthalten ist.

5.3 Nédélec-Elemente

Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung der Nédélec-Elemente erster Familie, die erstmals in (Nédélec 1980) vorgestellt wurden. Diese Elemente haben den Vorteil, dass sie konforme Elemente in $H(\text{curl}, \Omega)$ sind. Das heißt, dass der durch die Nédélec-Elemente gebildete diskrete Ansatzraum ein Teilraum von $H(\text{curl}, \Omega)$ ist. Damit ist dieser Raum geeignet, um bei der Formulierung der Heterogenen Mehrskalennmethode in Kapitel 6 verwendet zu werden. Als Grundlage für diesen Abschnitt dient hauptsächlich (Nédélec 1980), wo sich auch die Beweise der zitierten Resultate finden. Weiterhin werden die Ausführungen ergänzt durch Resultate aus (Monk 1993) und (Schneebeli 2003).

Mit den Polynomräumen aus Definition 5.2 kann entsprechend zu (Nédélec 1980, Definition 6, S. 330 f.) das Nédélec-Element mit dem Einheitswürfel $\hat{K} := (0, 1)^3$ als Referenzelement eingeführt werden. Durch affine Transformationen kann dieses auf allgemeine Parallelepipede übertragen werden.

Definition 5.5 (Nédélec-Elemente). Die Nédélec-Elemente erster Familie auf \hat{K} mit Ordnung $k \in \mathbb{N}$ sind gegeben als Polynomraum $\mathcal{Q}^{k-1,k,k}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{k,k-1,k}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{k,k,k-1}(\hat{K})$ zusammen mit den Freiheitsgraden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_E(f) &:= \left\{ \int_E f \cdot t p \, ds \mid p \in \mathcal{P}^{k-1}(\hat{K}), E \subset \hat{K} \text{ Kante mit Tangentialvektor } t \right\}, \\ \mathcal{A}_F(f) &:= \left\{ \int_F f \times n q \, ds \mid q \in \mathcal{Q}^{k-2,k-1}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{k-1,k-2}(\hat{K}), F \subset \hat{K} \text{ Seitenfläche} \right\}, \\ \mathcal{A}_K(f) &:= \left\{ \int_{\hat{K}} f \cdot q \, dx \mid q \in \mathcal{Q}^{k-1,k-2,k-2}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{k-2,k-1,k-2}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{k-2,k-2,k-1}(\hat{K}) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Elemente werden im Folgenden mit $\mathcal{N}^k(\hat{K})$ bezeichnet.

Insgesamt enthält die Menge $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E \cup \mathcal{A}_F \cup \mathcal{A}_K$ für Elemente mit Ordnung $k \in \mathbb{N}$ insgesamt $3k(k+1)^2$ unabhängige Freiheitsgrade. Da dies nach (Nédélec 1980, S. 331) mit der Dimension des Polynomraums übereinstimmt, sind die Nédélec-Elemente wohldefiniert.

Beispiel. Als Beispiel wird im Folgenden das Nédélec-Element $\mathcal{N}^1(\hat{K})$ betrachtet. Zunächst ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des Polynomraums $\mathcal{Q}^{0,1,1}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{1,0,1}(\hat{K}) \times \mathcal{Q}^{1,1,0}(\hat{K})$. Weiterhin besitzt dieses Element lediglich die Freiheitsgrade

$$\mathcal{A}_E = \left\{ \int_E f \cdot t \, ds \mid E \subset \hat{K} \text{ Kante} \right\}$$

auf den Kanten. Da für den Einheitswürfel \hat{K} die Tangentialvektoren auf den Kanten mit den Einheitsvektoren des \mathbb{R}^3 übereinstimmen, erhält man damit die lokale Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1-y)z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1-y)(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x(1-y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)(1-y) \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiterhin sind die Nédélec-Elemente nach (Nédélec 1980, Theorem 5, S. 331) unisolvent, sodass die lokale Interpolation wohldefiniert ist. Damit kann, wie beispielsweise in (Nédélec 1980, Theorem 6, S. 332), der lokale Approximationsfehler für Nédélec-Elemente abgeschätzt werden. Das dort präsentierte Resultat lautet:

Satz 5.6 (Lokaler Interpolationsfehler in $\mathcal{N}^k(K)$). *Mit einem Parallelepipiped $K \subset \mathbb{R}^3$, einer Funktion $u \in W^{k+1,2}(K)$ und der lokalen Interpolation $\mathcal{I}_K^{\mathcal{N}} : W^{k+1,2}(K) \rightarrow \mathcal{N}^k(K)$ gilt für den lokalen Interpolationsfehler*

$$\|u - \mathcal{I}_K^{\mathcal{N}} u\|_{H(\text{curl}, K)} \leq CH_K^k |u|_{W^{k+1,2}(K)^3}.$$

Dabei hängt die Konstante C vom Verhältnis $\frac{H_K}{\rho_K}$ ab.

Nach (Nédélec 1980, Theorem 5, S. 331 f.) handelt es sich bei den Nédélec-Elementen um in $H(\text{curl}, \Omega)$ konforme Elemente. Dies bedeutet, dass die elementweise Anwendung des lokalen Interpolationsoperators \mathcal{I}_K auf Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$ stets Funktionen aus $H(\text{curl}, \Omega)$ ergibt.

Bisher wurden die Nédélec-Elemente nur auf einem Element eingeführt. Die anschließende Definition liefert damit diskrete Ansatzräume für die Räume $H(\text{curl}, \Omega)$ und $H_0(\text{curl}, \Omega)$.

Definition 5.7 (Diskrete Ansatzräume $V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$, $V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$). Zu einer Zerlegung \mathcal{T} des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei

$$V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) := \{f \in H(\text{curl}, \Omega), \text{ mit } f|_K \in \mathcal{N}^k(K) \text{ f\"ur alle } K \in \mathcal{T}\}.$$

Weiter sei

$$V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H) := V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \cap H_0(\text{curl}, \Omega).$$

Nach Definition gilt also tats\u00e4chlich $V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \subset H(\text{curl}, \Omega)$. Weiterhin erf\u00fcllen Funktionen $f \in V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ mit dem Normalenvektor n zus\u00e4tzlich die Randbedingung $f \times n = 0$ auf $\partial\Omega$.

F\u00fcr das folgende Korollar bezeichne $W^{k+1,2}(\mathcal{T})$ den Raum der Funktionen, deren Einschr\u00e4nkung auf ein Element $K \in \mathcal{T}$ in $W^{k+1,2}(K)$ liegt. Dann folgt mit Satz 5.6 und mit Gleichung (5.3) f\u00fcr den globalen Interpolationsfehler:

Korollar 5.8 (Globaler Interpolationsfehler in $V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$). *Mit einer zul\u00e4ssigen Zerlegung \mathcal{T} von Ω , der globalen Interpolation $\mathcal{I}_H^{\mathcal{N}} : W^{k+1,2}(\mathcal{T}) \rightarrow V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$ und einer Funktion $u \in W^{k+1,2}(\mathcal{T})$ gilt f\u00fcr den globalen Interpolationsfehler*

$$\|u - \mathcal{I}_H^{\mathcal{N}} u\|_{H(\text{curl}, \Omega)} \leq CH^k |u|_{W^{k+1,2}(\Omega)^3}.$$

Zusammenfassend wurde in diesem Abschnitt zun\u00e4chst das N\u00e9d\u00e9lec-Element eingef\u00fchrt, bevor damit die diskreten Ansatzr\u00e4ume $V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$ und $V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ definiert wurden. Diese sind die Grundlage f\u00fcr die im n\u00e4chsten Schritt durchgef\u00fchrte Semidiskretisierung der Maxwell-Gleichungen und die darauf aufbauende Heterogene Mehrskalermethode. Schlie\u00dflich wurde eine Absch\u00e4tzung des globalen Interpolationsfehlers dieser Elemente pr\u00e4sentiert, die ein fundamentaler Bestandteil der Fehlerabsch\u00e4tzung in Kapitel 6.4 ist.

6 Heterogene Mehrskalenmethode (HMM)

Durch die vorigen Kapitel sind alle Voraussetzungen geschaffen, um nun die Heterogene Mehrskalenmethode (HMM) mit Finiten Elementen für die effektiven Maxwell-Gleichungen (4.24) einzuführen. Ein Standard-Finite-Elemente-Ansatz führt hier nicht zum Ziel, da die effektiven Materialparameter zwar durch die Lösungen der Zellprobleme eindeutig definiert sind, aber im Allgemeinen nicht explizit bestimmt werden können. Die Heterogene Mehrskalenmethode bietet hingegen die Möglichkeit, die effektiven Lösungen zu approximieren, ohne die effektiven Parameter explizit zu verwenden.

Die generelle Vorgehensweise bei der Herleitung der Heterogenen Mehrskalenmethode orientiert sich am Vorgehen in (Ciarlet u. a. 2017), (Hochbruck u. a. 2016) und (Henning u. a. 2016).

Um bei der Herleitung den Gesamtüberblick nicht zu verlieren, wird zunächst das Vorgehen grob erläutert: Zu Beginn wird die schwache, semidiskrete Form der effektiven Gleichungen betrachtet. Anschließend setzt man die Bestimmungsgleichungen der effektiven Parameter in die dabei erhaltene Bilinearform ein. Die dabei auftretenden Terme, welche sowohl Basisfunktionen der Makroelemente als auch Lösungen der Zellprobleme enthalten, werden durch sogenannte Mikroprobleme approximiert. Diese erhält man schließlich als ortsdiskretisierten Variante der Zellprobleme (4.27).

6.1 Herleitung

In Definition 4.1 werden die Abbildungen \mathcal{C}^η und j^η definiert, um das Maxwellsystem (4.2) in der Form

$$\partial_t u^\eta(x, t) = \mathcal{C}^\eta u^\eta(x, t) + j^\eta(x, t)$$

(vgl. Gleichung (4.3)) zu betrachten. Diese Form war für den Nachweis der Lösbarkeit von Vorteil. Da die Materialparameter uniform positiv definit sind, konnten die Gleichungen hierfür mit den inversen Größen $(\mu^\eta)^{-1}$ und $(\varepsilon^\eta)^{-1}$ multipliziert werden.

Auch für die Herleitung der Heterogenen Mehrskalenmethode wird ein vektorwertiges Gleichungssystem betrachtet. Ausgangspunkt sind die effektiven Maxwell-Gleichungen (4.24). Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen Vorgehen ist es hierfür jedoch nicht vorteilhaft, die inversen Materialparameter in die Gleichung miteinzubeziehen. Damit würde man nämlich Mikroprobleme mit den inversen Materialparametern erhalten, ähnlich zu denen in (Hochbruck u. a. 2016, Definition 3, S. 4). Durch den hier vorgestellten Ansatz erhält man hingegen die von der Heterogenen Mehrskalenmethode für elliptische Probleme bekannten elliptischen Mikroprobleme. Dazu werden die folgenden Abbildungen definiert:

Definition 6.1. Es werden für $\psi, \varphi \in L^2(\Omega)^3$ mit $\xi = (\psi, \varphi)^T$ folgende Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{eff}} : L^2(\Omega)^6 &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & \xi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \psi \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \varphi \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C} : H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & \xi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\text{curl } \varphi \\ \text{curl } \psi \end{pmatrix}, \\ j : \mathbb{R}^3 \times (0, T) &\rightarrow L^2(\Omega)^6, & (x, t) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -J_{\text{ext}}(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Mit obiger Definition und $u^{\text{eff}} = (H^{\text{eff}}, E^{\text{eff}})^T \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ können die Maxwell-Gleichungen (4.24a) und (4.24b) äquivalent in die Form

$$\mathcal{M}^{\text{eff}} \partial_t u^{\text{eff}}(x, t) = \mathcal{C} u^{\text{eff}}(x, t) + j(t) \quad (6.1)$$

umgeschrieben werden.

Zusätzlich werden nun zwei Bilinearformen definiert, um obiges Gleichungssystem in schwacher Form zu beschreiben.

Definition 6.2. Für $\psi, \varphi, \bar{\psi}, \bar{\varphi} \in L^2(\Omega)^3$ mit $\xi = (\psi, \varphi)^T, \bar{\xi} = (\bar{\psi}, \bar{\varphi})^T$ werden folgende Bilinearformen definiert:

$$\begin{aligned} m^{\text{eff}} : L^2(\Omega)^6 \times L^2(\Omega)^6 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ s : (H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)) \times (H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)) &\rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei die Abbildungsvorschriften durch

$$\begin{aligned} m^{\text{eff}}(\xi, \bar{\xi}) &= (\mathcal{M}^{\text{eff}} \xi, \bar{\xi})_{L^2(\Omega)^6} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) \psi \cdot \bar{\psi} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) \varphi \cdot \bar{\varphi} \, dx, \\ s(\xi, \bar{\xi}) &= (\mathcal{C} \xi, \bar{\xi})_{L^2(\Omega)^6} = \int_{\Omega} \bar{\varphi} \cdot \text{curl } \psi - \bar{\psi} \cdot \text{curl } \varphi \, dx \end{aligned}$$

gegeben sind.

Damit lautet die schwache Formulierung von Gleichung (6.1), welche man als das $L^2(\Omega)^6$ -Skalarprodukt hiervon mit einer $L^2(\Omega)^6$ -Funktion erhält, wie folgt:

Effektives Maxwell-System. Finde $u^{\text{eff}} \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ mit

$$m^{\text{eff}}(\partial_t u^{\text{eff}}(t), \xi) = s(u^{\text{eff}}(t), \xi) - (J_{\text{ext}}(t), \varphi)_{L^2(\Omega)^3}, \quad (6.2)$$

für alle $\xi = (\psi, \varphi) \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ und den Anfangs- und Randbedingungen (4.25).

Es ist wichtig zu beachten, dass lediglich zur besseren Lesbarkeit auf die explizite Angabe der Ortsabhängigkeit der Funktionen $\xi, \psi, \varphi, \bar{\xi}, \bar{\psi}$ und $\bar{\varphi}$ verzichtet wird. Diese sind im Allgemeinen vom Ort $x \in \Omega$ abhängig.

Im nächsten Schritt soll das Gleichungssystem mit der in Kapitel 5 beschriebenen Vorgehensweise diskretisiert werden. Dazu wird eine zulässige Zerlegung \mathcal{T}_H des Gebiets Ω eingeführt. Weiter wird eine Quadraturformel gewählt, die (5.2) erfüllt. Schließlich erhält man mit (5.3) für $\xi_H = \begin{pmatrix} \psi_H \\ \varphi_H \end{pmatrix}, \bar{\xi}_H = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_H \\ \bar{\varphi}_H \end{pmatrix}$ die diskreten Bilinearformen

$$\begin{aligned} m_H^{\text{eff}} &: (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \times (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \rightarrow \mathbb{R}, \\ s_H &: (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \times (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} m_H^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x_{K,m}) \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x_{K,m}) \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right), \\ s_H(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\psi_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \bar{\varphi}_H)(x_{K,m}) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \varphi_H)(x_{K,m}) \right). \end{aligned}$$

Bis zu diesem Punkt entspricht das Vorgehen der allgemeinen Vorgehensweise bei der Finite-Elemente-Methode. Mit $u_H^{\text{eff}}, \xi_H = \begin{pmatrix} \psi_H \\ \varphi_H \end{pmatrix} \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ erhält man somit als Ergebnis die semi-diskrete Maxwell-Gleichung

$$m_H^{\text{eff}}(\partial_t u_H^{\text{eff}}(t), \xi_H) = s_H(u_H^{\text{eff}}(t), \xi_H) - \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_H(x_{K,m}), \quad (6.3)$$

wobei $J_{\text{ext},H} \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$ eine Approximation an J_{ext} beschreibt. Da die effektiven Materialparameter $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ jedoch nicht explizit gegeben sind, sondern an jedem Punkt erst durch Lösen der Zellprobleme (4.27) und anschließendes Einsetzen in (4.34) bestimmt werden müssen, ist es nicht ohne weiteres möglich, Gleichung (6.3) numerisch zu lösen. Dies ist der Ansatzpunkt der Heterogenen Mehrskalenmethode. Anstatt die diskrete Bilinearform m_H^{eff} exakt zu bestimmen, wird diese unter Verwendung der Bestimmungsgleichungen für die effektiven Materialparameter (4.34) durch eine noch zu definierende Bilinearform m_H^{HMM} approximiert.

Bisher wurden die Zellprobleme stets auf dem Einheitswürfel Y betrachtet. Durch eine Variablentransformation können diese jedoch ebenso auf dem skalierten Einheitswürfel $Y_\eta := \left(-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right)^3$ betrachtet werden. Diese Variante wird im Folgenden verwendet, da hiermit die später eingeführten Mikroprobleme anschaulicher dargestellt werden können.

Zunächst werden also die Definitionen der effektiven Materialparameter in die Bilinearform m_H^{eff} eingesetzt und es folgt

$$\begin{aligned}
 m_H^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x_{K,m}) \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right. \\
 &\quad \left. + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x_{K,m}) \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right) \\
 &\stackrel{(4.34)}{=} \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\int_{Y_\eta} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \psi_{H,\chi}(x_{K,m}, y) \cdot \bar{\psi}_{H,\chi}(x_{K,m}, y) dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{Y_\eta} \varepsilon \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \varphi_{H,\chi}(x_{K,m}, y) \cdot \bar{\varphi}_{H,\chi}(x_{K,m}, y) dy \right).
 \end{aligned}$$

Die Definitionen der Funktionen $\psi_{H,\chi}, \bar{\psi}_{H,\chi}, \varphi_{H,\chi}, \bar{\varphi}_{H,\chi}$ sowie die weiteren Schritte werden exemplarisch für die Funktion $\psi_{H,\chi}$ vorgestellt. Das Vorgehen für $\bar{\psi}_{H,\chi}$ verläuft analog, für die Funktionen $\varphi_{H,\chi}$ und $\bar{\varphi}_{H,\chi}$ muss lediglich μ durch ε ersetzt werden.

Die Funktion $\psi_{H,\chi}$ ist also zu einem Quadraturpunkt $x_{K,m}$ gegeben als

$$\psi_{H,\chi}(x_{K,m}, y) := \left(I - D_y \chi_\mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) \psi_H(x_{K,m}) \quad \text{für } y \in Y_\eta. \quad (6.4)$$

Durch das tiefgestellte χ wird hierbei die Abhängigkeit von den Lösungen der Zellprobleme (4.27) verdeutlicht.

Im nächsten Schritt wird aus den Zellproblemen (4.27) ein elliptisches Problem hergeleitet, mit denen $\psi_{H,\chi}$ eindeutig bestimmt werden können. Dazu wird die Funktion Ψ_H als Potential von $\psi_{H,\chi}$ definiert, sodass also

$$\text{grad}_y \Psi_H \equiv \psi_{H,\chi}$$

gilt. Dabei ist Ψ_H für $y \in Y_\eta$ gegeben als

$$\Psi_H(x_{K,m}, y) = \underbrace{(y - x_{K,m}) \cdot \psi_H(x_{K,m})}_{=:\Psi_{H,\text{lin}}(x_{K,m}, y)} - \underbrace{\eta \chi_\mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \cdot \psi_H(x_{K,m})}_{=:\Psi_{H,\#}(x_{K,m}, y)}.$$

Die Funktion $\Psi_{H,\text{lin}} \in S^1(Y_\eta)$ ist durch ψ_H explizit gegeben. Lediglich die Funktion $\Psi_{H,\#} \in W_{\#}^{1,2}(Y_\eta)/\mathbb{R}$ muss zu jedem Quadraturpunkt $x_{K,m}$ bestimmt werden. Dabei folgt durch Vergleich mit den effektiven Zellproblemen (4.27) (nach Skalierung von Y zu Y_η), dass $\Psi_H \in S^1(Y_\eta) + W_{\#}^{1,2}(Y_\eta)/\mathbb{R}$ mit der schwachen Lösung von

$$\int_{Y_\eta} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \text{grad}_y \Psi_H(x_{K,m}, y) \cdot \text{grad}_y v(y) dy = 0$$

für alle $v \in W_{\#}^{1,2}(Y_{\eta})$ übereinstimmt. Diese ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Zellprobleme ebenfalls eindeutig lösbar. Einsetzen von $D_y \Psi_H = D_y \Psi_{H,\text{lin}} + D_y \Psi_{H,\#}$ ergibt schließlich die elliptischen Bestimmungsgleichungen für $\Psi_{H,\#} \in W_{\#}^{1,2}(Y_{\eta})/\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{Y_{\eta}} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \text{grad}_y \Psi_{H,\#}(x_{K,m}, y) \cdot \text{grad}_y v(y) dy = \\ - \int_{Y_{\eta}} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \text{grad}_y \Psi_{H,\text{lin}}(x_{K,m}, y) \cdot \text{grad}_y v(y) dy \end{aligned} \quad (6.5)$$

für alle $v \in W_{\#}^{1,2}(Y_{\eta})$.

Bis zu diesem Punkt wurde die Bilinearform m_H^{eff} lediglich umgeformt. Jedoch müssen hierbei die exakten Lösungen von (6.5) in $W_{\#}^{1,2}(Y_{\eta})/\mathbb{R}$ bestimmt werden. Bei der Heterogenen Mehrskalenmethode wird hierfür eine Zerlegung \mathcal{T}_h des Gebiets Y_{η} eingeführt. Dann wird die Lösung der Gleichung (6.5) im Raum $S_{\#}^1(\mathcal{T}_h)$ approximiert. Dies ergibt die folgenden elliptischen Mikroprobleme:

HMM-Mikroprobleme. Finde $\Psi_{H,h,\#} \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \int_{Y_{\eta}} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \text{grad}_y \Psi_{H,h,\#}(x_{K,m}, y) \cdot \text{grad}_y v(y) dy = \\ - \int_{Y_{\eta}} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \text{grad}_y \Psi_{H,\text{lin}}(x_{K,m}, y) \cdot \text{grad}_y v(y) dy \end{aligned} \quad (6.6)$$

für alle $v \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h)$.

Damit kann nun die Bilinearform m_H^{HMM} definiert werden.

Definition 6.3 (HMM-Bilinearform). Die HMM-Bilinearform lautet somit

$$m_H^{\text{HMM}} : (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \times (V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)) \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\begin{aligned} m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) = \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\int_{Y_{\eta}} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \psi_{H,h}(x_{K,m}, y) \cdot \bar{\psi}_{H,h}(x_{K,m}, y) dy \right. \\ \left. + \int_{Y_{\eta}} \varepsilon \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \varphi_{H,h}(x_{K,m}, y) \cdot \bar{\varphi}_{H,h}(x_{K,m}, y) dy \right). \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \psi_{H,h} &= \text{grad}_y \Psi_{H,\text{lin}} + \text{grad}_y \Psi_{H,h,\#}, \\ \bar{\psi}_{H,h} &= \text{grad}_y \bar{\Psi}_{H,\text{lin}} + \text{grad}_y \bar{\Psi}_{H,h,\#}, \\ \varphi_{H,h} &= \text{grad}_y \Phi_{H,\text{lin}} + \text{grad}_y \Phi_{H,h,\#}, \\ \bar{\varphi}_{H,h} &= \text{grad}_y \bar{\Phi}_{H,\text{lin}} + \text{grad}_y \bar{\Phi}_{H,h,\#}, \end{aligned}$$

mit den Lösungen $\text{grad}_y \Psi_{H,h,\#}, \text{grad}_y \bar{\Psi}_{H,h,\#}, \text{grad}_y \Phi_{H,h,\#}, \text{grad}_y \bar{\Phi}_{H,h,\#} \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h)$ der Mikroprobleme (6.6).

6 Heterogene Mehrskalenmethode (HMM)

Schließlich kann die Heterogene Mehrskalenmethode für das Maxwell-System (4.2) formuliert werden. Diese lautet:

HMM-Maxwell-System. Finde $u_H^{\text{HMM}} : [0, T] \rightarrow V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ mit

$$m_H^{\text{HMM}}(\partial_t u_H^{\text{HMM}}(t), \xi_H) = s_H(u_H^{\text{HMM}}(t), \xi_H) - \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_H(x_{K,m}) \quad (6.7)$$

für alle $\xi_H = (\psi_H, \varphi_H) \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$. Mit $u_H^{\text{HMM}} = (H_H^{\text{HMM}}, E_H^{\text{HMM}})$ gelten zusätzlich die Anfangsbedingungen

$$H_H^{\text{HMM}}(x, 0) = H_{H,0}^{\text{HMM}}(x), \quad E_H^{\text{HMM}}(x, 0) = E_{H,0}^{\text{HMM}}(x) \quad (6.8)$$

für fast alle $x \in \Omega$ mit Approximationen $H_{H,0}^{\text{HMM}} \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H)$ und $E_{H,0}^{\text{HMM}} \in V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ an die Anfangswerte aus (4.2g).

In Abbildung 1 ist ein Überblick zur Vorgehensweise der Heterogenen Mehrskalenmethode in 2D skizziert. Dabei sind in blau die Quadraturpunkte der Makrozerlegung \mathcal{T}_H dargestellt. Um jeden solchen Punkt wird dann eine skalierte Einheitszelle Y_η gebildet, auf der die Mikroprobleme gelöst werden. Dazu wird diese wiederum entsprechend der Mikrozerlegung \mathcal{T}_h zerlegt.

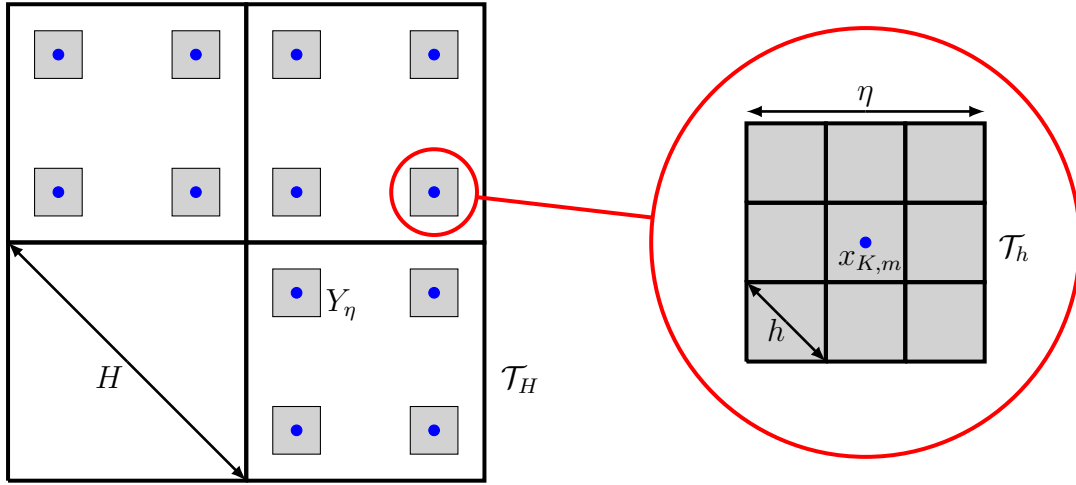


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Heterogenen Mehrskalenmethode in 2D, angelehnt an (Ciarlet u. a. 2017, Abb. 1, S. 16)

Zur numerischen Lösung wird auch zur Zerlegung \mathcal{T}_h der Mikroelemente eine Quadraturformel gewählt, mit der die Integrale approximiert werden können. Im Folgenden wird hierzu angenommen, dass die verwendete Quadratur so gewählt wird, dass der dadurch entstehende Approximationsfehler vernachlässigt werden kann.

Die Herleitung der Heterogenen Mehrskalenmethode ist hiermit abgeschlossen. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die Bilinearform m_H^{HMM} ähnlich wie die m_H^{eff} formuliert werden kann. Dies ist insbesondere bei der Fehlerabschätzung von Vorteil, da sich die dort auftretende Differenz zwischen diesen beiden Bilinearformen damit stark vereinfacht. Grundlage hierfür ist die Definition der HMM-Materialparameter.

6.2 HMM-Materialparameter

In (Abdulle 2012, Abschnitt 5.1, S. 699 ff.) wird ein Vorgehen erläutert, wie aus den elliptischen Mikroproblemen (4.27) die HMM-Materialparameter $\boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}$ bestimmt werden können. Mit diesen lässt sich die im vorigen Abschnitt definierte Bilinearform m_H^{HMM} in ähnlicher Form wie die ursprüngliche diskrete Bilinearform m_H^{eff} schreiben. Diese Form wird im nächsten Abschnitt zum Nachweis der Wohldefiniertheit der Heterogenen Mehrskalenmethode und im anschließenden Abschnitt zur Fehleranalyse verwendet. In der Implementierung werden die HMM-Materialparameter jedoch nie explizit berechnet.

Ausgangspunkt ist zunächst die Definition 6.3 der HMM-Bilinearform. Dabei kann gezeigt werden, dass für die Funktionen $\psi_{H,h}$, $\bar{\psi}_{H,h}$, $\varphi_{H,h}$ und $\bar{\varphi}_{H,h}$ eine ähnliche Form wie in (6.4) existiert. Es gilt also exemplarisch für $\psi_{H,h}$ und $\varphi_{H,h}$

$$\begin{aligned}\psi_{H,h}(x_{K,m}, y) &= \left(I - D_y \chi_{\mu,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) \psi_H(x_{K,m}), \\ \varphi_{H,h}(x_{K,m}, y) &= \left(I - D_y \chi_{\varepsilon,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) \varphi_H(x_{K,m}),\end{aligned}$$

mit $y \in Y_\eta$ und einem Quadraturpunkt $x_{K,m}$. Dabei sind $\chi_{\mu,h}, \chi_{\varepsilon,h} \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R}$ die Lösungen der diskreten effektiven Zellprobleme

$$\begin{aligned}\int_{Y_\eta} \left(\mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \left(I - D_y \chi_{\mu,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) \right)^T \text{grad}_y v_h(y) dy &= 0 \quad \forall v_h \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h), \\ \int_{Y_\eta} \left(\varepsilon \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \left(I - D_y \chi_{\varepsilon,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) \right)^T \text{grad}_y v_h(y) dy &= 0 \quad \forall v_h \in S_{\#}^1(\mathcal{T}_h).\end{aligned}\tag{6.9}$$

Setzt man dies in die Bestimmungsgleichung von m_H^{HMM} in Definition 6.3 ein, so folgt mit den HMM-Materialparametern

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}(x_{K,m}) &:= \int_{Y_\eta} \mu \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \left(I - D_y \chi_{\mu,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right)^T \left(I - D_y \chi_{\mu,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) dy, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}(x_{K,m}) &:= \int_{Y_\eta} \varepsilon \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \left(I - D_y \chi_{\varepsilon,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right)^T \left(I - D_y \chi_{\varepsilon,h} \left(x_{K,m}, \frac{y}{\eta} \right) \right) dy\end{aligned}$$

die Identität

$$m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) = \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}(x_{K,m}) \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right. \\ \left. + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}(x_{K,m}) \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right). \quad (6.10)$$

Diese Bilinearform unterscheidet sich von der diskreten effektiven Bilinearform m_H^{eff} nur durch die Materialkoeffizienten $\boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}$.

Wie für die effektiven Größen in Lemma 4.6 übertragen sich die Eigenschaften von μ^η und ε^η dann auch auf die HMM-Materialparameter.

Lemma 6.4. *Die HMM-Permeabilität $\boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}$ und die HMM-Permittivität $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}$ sind symmetrisch, uniform positiv definit und beschränkt mit denselben Schranken $\Lambda, \lambda > 0$ wie μ^η und ε^η aus Gleichung (4.1).*

Der Beweis dieses Lemmas kann analog zum Beweis von Lemma 4.6 der effektiven Materialparameter durchgeführt werden. Dabei müssen die effektiven Zellprobleme durch die diskreten effektiven Zellprobleme (6.9) ersetzt werden.

Als letztes Resultat in diesem Kapitel wird schließlich eine Fehlerabschätzung zwischen den HMM-Materialparametern und den effektiven Koeffizienten präsentiert. Diese zeigt, dass die HMM-Parameter für konstantes η quadratisch im Zelldurchmesser h der Mikrozerlegung gegen die effektiven Größen konvergieren. Ein solches Resultat ist bereits aus der Betrachtung elliptischer Probleme bekannt. Wie beispielsweise in (Abdulle 2012, Lemma 5.2, S. 700) gezeigt wird, gilt nämlich:

Lemma 6.5. *Unter den Voraussetzungen*

$$\begin{aligned} \mu^\eta|_K \in W^{1,\infty}(K), \quad |\mu^\eta|_{W^{1,\infty}(K)} \leq C_K \eta^{-1}, \quad \text{für alle } K \in T_H, \\ \varepsilon^\eta|_K \in W^{1,\infty}(K), \quad |\varepsilon^\eta|_{W^{1,\infty}(K)} \leq C_K \eta^{-1}, \quad \text{für alle } K \in T_H \end{aligned} \quad (6.11)$$

an die Materialparameter gelten für alle Quadraturpunkte $x_{K,m}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{K \in T_H \\ m=1,\dots,M}} \|\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}(x_{K,m})\|_F \leq C \left(\frac{h}{\eta}\right)^2, \\ \sup_{\substack{K \in T_H \\ m=1,\dots,M}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}(x_{K,m})\|_F \leq C \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von h und η .

Dieser Fehler wird im Umfeld der Heterogenen Mehrskalenmethode als Mikrofehler bezeichnet und taucht in dieser Form auch in den dieses Kapitel abschließenden Fehlerabschätzungen auf.

Bevor diese jedoch betrachtet werden, wird zunächst die Wohlgestelltheit der Heterogenen Mehrskalenmethode nachgewiesen.

6.3 Wohlgestelltheit

Damit die Heterogene Mehrskalenmethode als numerisches Verfahren überhaupt Sinn ergibt, muss für (6.7) stets eine eindeutige Lösung existieren. Dies kann auf die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines inhomogenen linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Satz 6.6. *Zur Heterogenen Mehrskalenmethode für das Maxwell-System (6.7) existiert eine eindeutige Lösung $u_H^{\text{HMM}} \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$.*

Beweis. Mit der zum diskreten Ansatzraum $V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ gegebenen globalen Basis $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ können alle Funktionen u dieses Raumes in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N k_n(t) \Phi_n(x)$$

dargestellt werden. Dabei sind die Koeffizientenfunktionen $k_1, k_2, \dots, k_N : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eindeutig definiert. Setzt man diesen Ansatz auch für die Lösung des HMM-Maxwell-Systems ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m_H^{\text{HMM}} \left(\sum_{n=1}^N \partial_t k_n(t) \Phi_n, \Phi_H \right) &= s_H \left(\sum_{n=1}^N k_n(t) \Phi_n, \Phi_H \right) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_H(x_{K,m}) \end{aligned}$$

für alle $\Phi_H = (\psi_H, \varphi_H) \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$. Anstatt mit allen Funktionen Φ_H zu testen, genügt es, dies mit allen Basisfunktionen durchzuführen. Damit, und da m_H^{HMM} und s_H bilineare Abbildungen sind, folgt für $\ell = 1, 2, \dots, N$

$$\sum_{n=1}^N m_H^{\text{HMM}}(\Phi_n, \Phi_\ell) \partial_t k_n(t) = \sum_{n=1}^N k_n(t) s_H(\Phi_n, \Phi_\ell) - \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_\ell(x_{K,m}).$$

Nun definiert man die Matrizen $M, S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ durch

$$M_{n\ell} := m_H^{\text{HMM}}(\Phi_n, \Phi_\ell), \quad S_{n\ell} := s_H(\Phi_n, \Phi_\ell)$$

und die vektorwertige Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ durch

$$f_n(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_\ell(x_{K,m}).$$

Mit der vektorwertigen Funktion $k := (k_1, k_2, \dots, k_N)$ entspricht Gleichung (6.7) dann dem Differentialgleichungssystem

$$Mk' = Sk + f(t).$$

Da die HMM-Materialparameter wie im vorigen Abschnitt gezeigt uniform positiv definit und beschränkt sind, ist M weiter invertierbar und man erhält schließlich

$$k' = M^{-1}Sk + M^{-1}f(t).$$

Dieses lineare System inhomogener gewöhnlicher Differentialgleichungen besitzt unter Beachtung der Anfangswerte (6.8) eine eindeutige Lösung k^* (vgl. (Forster 2011, Satz 1, Kapitel 13, S. 166 ff.)). Damit ist die eindeutige Lösung des HMM-Maxwell-Systems gegeben als

$$u = \sum_{n=1}^N k_n^* \Phi_n.$$

□

Damit ist nachgewiesen, dass die Heterogene Mehrskalenmethode für die Maxwell-Gleichungen stets eine Lösung besitzt. Es bleibt aber die Frage, inwiefern es sich dabei um eine Approximation an die Lösung der effektiven Maxwell-Gleichungen handelt. Diese wird im nächsten Abschnitt beantwortet.

6.4 Fehleranalyse

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Abschätzung für den Fehler zu bestimmen, der bei der Approximation der effektiven Lösungen der Maxwell-Gleichungen durch die Heterogene Mehrskalenmethode gemacht wird. Diese liefert dann zugleich Aussagen über die Konvergenzordnung des Verfahrens bezüglich der Makro-Gittergröße H und der Mikro-Gittergröße h . Dabei erhält man die Fehlerabschätzung durch Anwendung von (Hipp u. a. 2017, Theorem 3.2, S. 13 f.), wobei die Heterogene Mehrskalenmethode als nicht-konforme Methode betrachtet wird.

Dafür werden zunächst einige Räume und Normen definiert.

Definition 6.7. Es sei $X = L^2(\Omega)^6$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\xi, \bar{\xi})_X := m^{\text{eff}}(\xi, \bar{\xi}) \quad \text{für } \xi, \bar{\xi} \in X$$

und $\mathcal{V} = H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\zeta, \bar{\zeta})_{\mathcal{V}} := (\zeta_1, \bar{\zeta}_1)_{H(\text{curl}, \Omega)} + (\zeta_2, \bar{\zeta}_2)_{H_0(\text{curl}, \Omega)} \quad \text{für } \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}.$$

Außerdem sei der Raum $X_H = V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\xi_H, \bar{\xi}_H)_{X_H} := m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) \quad \text{für } \xi_H, \bar{\xi}_H \in X_H$$

versehen. Allen Räumen wird die durch ihr Skalarprodukt induzierte Norm zugeordnet.

Dass durch die Bilinearformen tatsächlich Skalarprodukte gegeben sind, wird im folgenden Lemma gezeigt. Weiterhin werden dort für die spätere Fehleranalyse benötigte Normäquivalenzen gezeigt.

Lemma 6.8. *Die durch m^{eff} und m_H^{HMM} gegebenen Skalarprodukte sind wohldefiniert und die dadurch induzierten Normen sind jeweils äquivalent zur $L^2(\Omega)^6$ -Norm. Es gilt also für $\xi \in X$, $\xi_H \in X_H$*

$$\sqrt{\lambda}\|\xi\|_{L^2(\Omega)^6} \leq \|\xi\|_X \leq \sqrt{\Lambda}\|\xi\|_{L^2(\Omega)^6} \quad \text{für } \xi \in X, \quad (6.13)$$

$$\sqrt{\lambda}\|\xi_H\|_{L^2(\Omega)^6} \leq \|\xi_H\|_{X_H} \leq \sqrt{\Lambda}\|\xi_H\|_{L^2(\Omega)^6} \quad \text{für } \xi_H \in X_H. \quad (6.14)$$

Beweis. In diesem Beweis wird lediglich die positive Definitheit der Bilinearformen zum Nachweis der Wohldefiniertheit betrachtet. Die weiteren Eigenschaften folgen direkt aus den jeweiligen Definitionen der Bilinearformen.

Die positive Definitheit von m^{eff} folgt direkt aus der positiven Definitheit der effektiven Materialparameter $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$, welche in Lemma 4.6 gezeigt wird. Auch die Schranken der Normäquivalenz werden dort bewiesen.

Für die HMM-Bilinearform m_H^{HMM} basiert der Beweis ebenfalls auf dem Nachweis der uniformen positiven Definitheit der Materialparameter, welcher in Lemma 6.4 gezeigt wird. Damit gilt zunächst mit Gleichung (6.10)

$$m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) \geq \lambda \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) + \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right).$$

Da die gewählte Quadraturformel nach (5.2) für Polynome aus $\mathcal{Q}^{2k,2k,2k}(K)$ exakt ist und $\xi_H, \bar{\xi}_H \in (\mathcal{Q}^{k,k,k}(K))^3$ gilt, kann die Summe über die Quadraturpunkte durch das Integral über die Elemente $K \in \mathcal{T}_H$ ersetzt werden. Da es sich weiter bei \mathcal{T}_H um eine zulässige Zerlegung handelt, kann die Summe der Integrale über die einzelnen Elemente schließlich zu einem Integral über Ω zusammengefasst werden. Es folgt

$$m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) \geq \lambda \int_{\Omega} \psi_H(x) \cdot \bar{\psi}_H(x) + \varphi_H(x) \cdot \bar{\varphi}_H(x) dx = \lambda(\xi_H, \bar{\xi}_H)_{L^2(\Omega)^6}.$$

Damit ist zugleich die untere Schranke der Normäquivalenz gezeigt. Die obere Schranke kann auf dieselbe Weise nachgerechnet werden. \square

Das folgende Korollar zeigt, dass die neu eingeführten Räume allesamt Hilberträume sind. Dies ist eine wichtige Grundlage für die spätere Fehlerabschätzung.

Korollar 6.9. *Die in Definition 6.7 eingeführten Räume X , \mathcal{V} und X_H sind Hilberträume.*

Beweis. (i) Für den Raum \mathcal{V} wird dies bereits in Satz 2.6 gezeigt.

(ii) Auch für den Raum X ist bereits alles gezeigt, da die Behauptung direkt aus der Normäquivalenz der durch m^{eff} induzierten Norm und der $L^2(\Omega)$ -Norm folgt.

- (iii) Da der Raum X_H ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $L^2(\Omega)$ ist und die durch m_H^{HMM} induzierte Norm nach Lemma 6.8 ebenfalls äquivalent zur $L^2(\Omega)$ -Norm ist, folgt die Behauptung. \square

Ziel der nun folgenden Untersuchung ist eine Fehlerabschätzung zwischen der Lösung $u^{\text{eff}} \in H(\text{curl}, \Omega) \times H_0(\text{curl}, \Omega)$ des effektiven Maxwell-Systems (6.2) und der HMM-Lösung $u_H^{\text{HMM}} \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ des HMM-Maxwell-Systems (6.7). Dabei treten Differenzen der Bilinearformen dieser beiden Systeme auf. Die Notation dazu wird in der folgenden Definition vorbereitet.

Definition 6.10. Für $\xi_H, \bar{\xi}_H \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ werden folgende Bilinearformen definiert:

$$\begin{aligned} \Delta m : X_H \times X_H &\rightarrow \mathbb{R}, & \Delta m(\xi_H, \bar{\xi}_H) &:= |m^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) - m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H)|, \\ \Delta s : X_H \times X_H &\rightarrow \mathbb{R}, & \Delta s(\xi_H, \bar{\xi}_H) &:= |s(\xi_H, \bar{\xi}_H) - s_H(\xi_H, \bar{\xi}_H)|. \end{aligned}$$

Eine wichtige Voraussetzung für die Abschätzung am Ende dieses Kapitels ist, dass diese Differenzen beschränkt sind und insbesondere

$$\begin{aligned} \Delta m(\xi_H, \bar{\xi}_H) &\rightarrow 0 & \text{für } H, h \rightarrow 0 \text{ und } \xi_H, \bar{\xi}_H \in X_H, \\ \Delta s(\xi_H, \bar{\xi}_H) &\rightarrow 0 & \text{für } H, h \rightarrow 0 \text{ und } \xi_H, \bar{\xi}_H \in X_H \end{aligned}$$

gezeigt werden kann.

Bei Δs handelt es sich um einen Quadraturfehler, der auf Grund der an die Quadratur gestellten Forderung (5.2) stets verschwindet. Es kann also gezeigt werden, dass $\Delta s \equiv 0$ gilt.

Lemma 6.11. Für $\xi_H, \bar{\xi}_H \in X_H$ gilt

$$\Delta s(\xi_H, \bar{\xi}_H) = 0.$$

Beweis. Aus den Definitionen von s und s_H folgt mit $\xi_H = \begin{pmatrix} \psi_H \\ \varphi_H \end{pmatrix}, \bar{\xi}_H = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_H \\ \bar{\varphi}_H \end{pmatrix} \in X_H$

$$\begin{aligned} \Delta s(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \left| \int_{\Omega} \bar{\varphi}(x) \cdot (\text{curl } \psi(x)) - \bar{\psi}(x) \cdot (\text{curl } \varphi(x)) dx \right. \\ &\quad \left. - \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \psi_H)(x_{K,m}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \varphi_H)(x_{K,m}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \left(\left| \int_K \bar{\varphi}(x) \cdot (\text{curl } \psi(x)) dx - \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \psi_H)(x_{K,m}) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_K \bar{\psi}(x) \cdot (\text{curl } \varphi(x)) dx - \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \cdot (\text{curl } \varphi_H)(x_{K,m}) \right| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei verschwinden in der letzten Abschätzung beide Terme, da die Quadratur nach der Voraussetzung für Polynome aus $\mathcal{Q}^{2k,2k,2k}(K)$ exakt ist. \square

Im Gegensatz zu Δs ist Δm kein Quadraturfehler. Durch eine weitere Aufspaltung kann diese Bilinearform jedoch durch einen Quadraturfehler und einen Anteil, der im Umfeld der Heterogenen Mehrskalenmethode als HMM-Fehler bezeichnet wird, betragsmäßig nach oben abgeschätzt werden. Dies ergibt für $\xi_H, \bar{\xi}_H \in V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H)$ die Abschätzung

$$\Delta m(\xi_H, \bar{\xi}_H) \leq \Delta m_{\text{Quad}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) + \Delta m_{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H),$$

wobei die Bilinearformen durch

$$\begin{aligned} \Delta m_{\text{Quad}} : X_H \times X_H &\rightarrow \mathbb{R}, & \Delta m_{\text{Quad}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &:= |m^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) - m_H^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H)|, \\ \Delta m_{\text{HMM}} : X_H \times X_H &\rightarrow \mathbb{R}, & \Delta m_{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &:= |m_H^{\text{eff}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) - m_H^{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H)| \end{aligned}$$

gegeben sind. Die beiden neu eingeführten Bilinearformen werden nun separat betrachtet. Zunächst wird der sogenannte HMM-Fehler abgeschätzt:

Lemma 6.12. *Unter der Bedingung (6.11) an die Materialkoeffizienten μ^η und ε^η gilt für $u_H, v_H \in X_H$ die Abschätzung*

$$\Delta m_{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) \leq C \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \|\xi_H\|_{L^2(\Omega)}^6 \|\bar{\xi}_H\|_{L^2(\Omega)}^6$$

mit einer Konstanten $C > 0$.

Beweis. Das Einsetzen der Definitionen von m_H^{eff} und m_H^{HMM} ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Delta m_{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left((\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}(x_{K,m})) \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}(x_{K,m})) \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right) \right| \\ &\leq C \sup_{\substack{K \in \mathcal{T}_H \\ m=1, \dots, M}} \|\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\mu}^{\text{HMM}}(x_{K,m})\|_F \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \left| \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right| \\ &\quad + C \sup_{\substack{K \in \mathcal{T}_H \\ m=1, \dots, M}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x_{K,m}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}}(x_{K,m})\|_F \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \left| \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right|. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_F$ die Frobeniusnorm. Zunächst wird nun wie im Beweis zu Lemma 6.11 eingesetzt, dass die Quadraturformel für die hier auftauchenden Produkte von

Funktionen aus einem Teilraum von $(\mathcal{Q}^{k,k,k}(K))^3$ exakt ist. Zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gelten dann die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right| &= |(\psi_H, \bar{\psi}_H)_{L^2(\Omega)^3}| \leq \|\psi_H\|_{L^2(\Omega)^3} \|\bar{\psi}_H\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq \|\xi_H\|_{L^2(\Omega)^6} \|\bar{\xi}_H\|_{L^2(\Omega)^6}, \\ \left| \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right| &= |(\varphi_H, \bar{\varphi}_H)_{L^2(\Omega)^3}| \leq \|\varphi_H\|_{L^2(\Omega)^3} \|\bar{\varphi}_H\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq \|\xi_H\|_{L^2(\Omega)^6} \|\bar{\xi}_H\|_{L^2(\Omega)^6}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung (6.11) an die Materialparameter können, wie in Lemma 6.5 gezeigt, die Materialkoeffizienten durch Gleichung (6.12) abgeschätzt werden. Damit folgt schließlich

$$\Delta m_{\text{HMM}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) \leq C \left(\frac{h}{\eta} \right)^2 \|\xi_H\|_{L^2(\Omega)^6} \|\bar{\xi}_H\|_{L^2(\Omega)^6}.$$

□

Die Bilinearform Δm_{Quad} wird in dieser Arbeit für lokal-periodische Materialparameter nicht abgeschätzt und bleibt deshalb in der ersten Form der Fehlerabschätzung bestehen. Anschließend an diese erste Abschätzung wird jedoch für den Spezialfall periodischer Koeffizienten gezeigt, dass dieser Quadraturfehler dann ebenfalls verschwindet.

Bevor im nächsten Schritt, als Hauptresultat dieses Unterkapitels, die Fehlerabschätzung der semidiskreten Heterogenen Mehrskalenmethode formuliert und bewiesen werden kann, wird zuvor noch eine weitere Abbildung benötigt. Dafür sei $\mathcal{P}_H : X \rightarrow X_H$ gegeben durch

$$(\mathcal{P}_H \xi, \xi_H)_{X_H} = (\xi, \xi_H)_X \quad \text{für alle } \xi_H \in X_H. \quad (6.15)$$

Zunächst ist \mathcal{P}_H wohldefiniert, da X_H nach Korollar 6.9 ein endlichdimensionaler Hilbertraum ist und somit eine Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ dieses Raumes existiert. Zu $\xi \in X$ ist dann $\mathcal{P}_H \xi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$ eindeutig über das Gleichungssystem

$$A\alpha = b$$

mit $A_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{X_H}$ und $b_j = (\xi, \varphi_j)_X$ definiert. Zusätzlich ist \mathcal{P}_H beschränkt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 6.13. *Für $\xi \in X$ gilt*

$$\|\mathcal{P}_H \xi\|_{L^2(\Omega)^6} \leq C \|\xi\|_{L^2(\Omega)^6},$$

mit der Konstanten $C = \frac{\Lambda}{\lambda}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_H \xi\|_{L^2(\Omega)^6}^2 &\stackrel{(6.14)}{\leq} \lambda^{-1} \|\mathcal{P}_H \xi\|_{X_H}^2 = \lambda^{-1} (\mathcal{P}_H \xi, \mathcal{P}_H \xi)_{X_H} \\ &\stackrel{(6.15)}{=} \lambda^{-1} (\xi, \mathcal{P}_H \xi)_X \leq \lambda^{-1} \|\mathcal{P}_H \xi\|_X \|\xi\|_X \stackrel{(6.13)}{\leq} \frac{\Lambda}{\lambda} \|\mathcal{P}_H \xi\|_{L^2(\Omega)^6} \|\xi\|_{L^2(\Omega)^6}, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet wird. \square

Damit sind alle Vorarbeiten geleistet, um die angekündigte Abschätzung zwischen der Lösung des effektiven Maxwell-Systems und der HMM-Approximation zu beweisen.

Satz 6.14. *Erfüllt die Lösung des effektiven Maxwell-Systems (4.24) die zusätzliche Regularitätsbedingung $u^{\text{eff}} \in C^1(0, T; W^{k+1,2}(\Omega)^6)$, dann gilt mit der HMM-Approximation $u_H^{\text{HMM}} \in L^\infty(0, T; V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H))$ zur Zeit $t \in (0, T)$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|u_H^{\text{HMM}}(t) - u^{\text{eff}}(t)\|_{L^2(\Omega)^6} &\leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0^{\text{eff}}\|_{L^2(\Omega)^6} + Ct \|j_H^{\text{HMM}} - \mathcal{P}_H j\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + CH^k |u^{\text{eff}}(t)|_{W^{k+1,2}(\Omega)^6} + Ct \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \|\partial_t u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + Ct H^k (|u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega)^6)} + |\partial_t u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega)^6)}) \\ &\quad + Ct \sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta m_{\text{Quad}}(\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau), v_H) \end{aligned}$$

$$\text{mit } j_H^{\text{HMM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}})^{-1} J_{\text{ext},H} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Grundlage für diesen Beweis ist (Hipp u. a. 2017, Theorem 3.2, S. 13 f.). Dort wird für symmetrische, hyperbolische Systeme eine Fehlerschranke bewiesen. Weiterhin wird für die Anfangswerte und rechte Seite (Hipp u. a. 2017, Theorem 2.9, S. 9) berücksichtigt. Diese Resultate können auf Grund der bisher in diesem Abschnitt vorgestellten Vorbereitungen angewendet werden und es folgt

$$\begin{aligned} \|u_H^{\text{HMM}}(t) - u^{\text{eff}}(t)\|_X &\leq C (\|(I - \mathcal{I}_H)u^{\text{eff}}(t)\|_X + \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0^{\text{eff}}\|_{X_H}) \\ &\quad + Ct \left(\sup_{\tau \in [0,t]} \|j_H^{\text{HMM}}(\tau) - \mathcal{P}_H j(\tau)\|_{X_H} + \sup_{\tau \in [0,t]} \|(I - \mathcal{I}_H)\partial_t u^{\text{eff}}(\tau)\|_X \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta m(\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau), v_H) + \sup_{\tau \in [0,t]} \|(I - \mathcal{I}_H)u^{\text{eff}}(\tau)\|_{\mathcal{V}} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta s(\mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(\tau), v_H) \right). \end{aligned}$$

Zunächst folgt mit Satz 5.8 über die Approximationseigenschaften der Nédélec-Elemente

$$\begin{aligned} \|(I - \mathcal{I}_H)u^{\text{eff}}(t)\|_X &\leq CH^k |u^{\text{eff}}(t)|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \\ \sup_{\tau \in [0,t]} \|(I - \mathcal{I}_H)\partial_t u^{\text{eff}}(\tau)\|_X &\leq CH^k |\partial_t u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega))} \\ \sup_{\tau \in [0,t]} \|(I - \mathcal{I}_H)u^{\text{eff}}(\tau)\|_{\mathcal{V}} &\leq CH^k |u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(\tau) \in X_H$, sodass Lemma 6.11 anwendbar ist. Damit folgt

$$\sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta s(\mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(\tau), v_H) = 0.$$

Weiter gilt $\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau) \in X_H$, weshalb mit Lemma 6.12 und der Normäquivalenz der X_H -Norm und der $L^2(\Omega)^6$ -Norm die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta m(\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau), v_H) &\leq \sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \Delta m_{\text{Quad}}(\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau), v_H) \\ &\quad + C \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \sup_{\tau \in [0,t]} \|\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau)\|_{L^2(\Omega)^6} \sup_{\|v_H\|_{X_H}=1} \|v_H\|_{L^2(\Omega)^6} \end{aligned}$$

folgt. Schließlich gilt unter Anwendung von Lemma 6.13

$$\sup_{\tau \in [0,t]} \sup_{\|v\|_{X_H}=1} \Delta m(\mathcal{P}_H \partial_t u^{\text{eff}}(\tau), v) \leq C \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \|\partial_t u^{\text{eff}}(\tau)\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

In der eben bewiesenen Fehlerabschätzung taucht der Quadraturfehler Δm_{Quad} auf. Dieser hängt von der gewählten Quadraturformel, der effektiven Permeabilität $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und der effektiven Permittivität $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ ab. In der folgenden Bemerkung wird der Spezialfall periodischer Koeffizienten betrachtet.

Lemma 6.15. *Falls die Materialparameter μ und ε Y-periodisch sind, so gilt mit Funktionen $\xi_H, \bar{\xi}_H \in X_H$*

$$\Delta m_{\text{Quad}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) = 0.$$

Beweis. Für den Fall, dass μ und ε Y-periodisch sind, sind die effektiven Größen $\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}$ konstant. Damit gilt

$$\begin{aligned} \Delta m_{\text{Quad}}(\xi_H, \bar{\xi}_H) &= \left| \sum_{K \in T_H} \int_K \boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \psi_H(x) \cdot \bar{\psi}_H(x) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \varphi_H(x) \cdot \bar{\varphi}_H(x) dx \right. \\ &\quad \left. - \sum_{K \in T_H} \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \left(\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right) \right| \\ &\leq \Lambda \sum_{K \in T_H} \left(\left| \int_K \psi_H(x) \cdot \bar{\psi}_H(x) dx - \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \psi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\psi}_H(x_{K,m}) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_K \varphi_H(x) \cdot \bar{\varphi}_H(x) dx - \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} \varphi_H(x_{K,m}) \cdot \bar{\varphi}_H(x_{K,m}) \right| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt wiederum eingesetzt, dass die Quadratur für Polynome aus $\mathcal{Q}^{2k,2k,2k}(K)$ exakt ist. \square

Damit folgt die folgende Fehlerabschätzung für periodische Materialparameter:

Korollar 6.16. *Erfüllt die Lösung des effektiven Maxwell-Systems (4.24) mit periodischen Koeffizienten die zusätzliche Regularitätsbedingung $u^{\text{eff}} \in C^1(0, T; W^{k+1,2}(\Omega)^6)$, dann gilt mit der HMM-Approximation $u_H^{\text{HMM}} \in L^\infty(0, T; V_{\text{curl}}^k(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^k(\mathcal{T}_H))$ zur Zeit $t \in (0, T)$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|u_H^{\text{HMM}}(t) - u^{\text{eff}}(t)\|_{L^2(\Omega)^6} &\leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0^{\text{eff}}\|_{L^2(\Omega)^6} + Ct \|j_H^{\text{HMM}} - \mathcal{P}_H j\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + CH^k |u^{\text{eff}}(t)|_{W^{k+1,2}(\Omega)^6} + Ct \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \|\partial_t u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + Ct H^k (|u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega)^6)} + |\partial_t u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{k+1,2}(\Omega)^6)}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } j_H^{\text{HMM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{HMM}})^{-1} J_{\text{ext},H} \end{pmatrix}.$$

Damit ist gezeigt, dass die Heterogene Mehrskalenmethode (6.7) tatsächlich sinnvolle Approximationen an die Lösungen der effektiven Maxwell-Gleichungen (4.24) liefert. Im nächsten Kapitel wird schließlich die eben bewiesene Fehlerschranke für periodische Koeffizienten durch numerische Beispiele bestätigt.

7 Numerische Beispiele

Nun werden numerische Beispiele präsentiert, die mit der Heterogenen Mehrskalenmethode für die Maxwell-Gleichung berechnet wurden. Dabei wird sowohl die Konvergenzordnung bezüglich der Gitterweite der Makrodiskretisierung als auch jene bezüglich der Gitterweite der Mikrodiskretisierung untersucht. Schließlich wird noch ein Beispiel präsentiert, bei dem die exakte Mehrskalenlösung mit der Lösung der Heterogenen Mehrskalenmethode verglichen wird.

7.1 Allgemeines Setting

7.1.1 Implementierung

Zur Implementierung der Heterogenen Mehrskalenmethode wird die auf C++ aufbauende Software-Bibliothek `deal.II` verwendet. Nach (Bangerth u. a. 2007) stellt diese dabei unter anderem Methoden für folgende Aufgaben zur Verfügung:

- Erzeugung des Gitters und des diskreten Ansatzraums,
- Assemblierung des diskreten Differentialgleichungssystems,
- Lösung linearer Gleichungssysteme,
- Auswertung der Ergebnisse.

Dabei ist die Funktionalität von `deal.II` auf Vierecks- bzw. Hexaedergitter beschränkt. Die in dieser Arbeit verwendete Version 8.4 wird in (Bangerth u. a. 2016) vorgestellt.

7.1.2 Ortsdiskretisierung

Bei den in diesem Kapitel vorgestellten numerischen Beispielen wird stets das Gebiet $\Omega = (0, 2) \times (0, 1) \times (0, 1)$ verwendet, dessen Zerlegung \mathcal{T}_H jeweils aus uniformen Würfeln besteht. Als diskreter Ansatzraum für die hier betrachteten numerischen Beispiele wird $V_{\text{curl}}^1(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^1(\mathcal{T}_H)$ gewählt.

Bei diesen Ansatzräumen ist im Zusammenhang mit der verwendeten Version von `deal.II` Vorsicht geboten, da die dort enthaltene Implementierung der Nédélec-Elemente lediglich für Zerlegungen in Parallelepipede verwendet werden kann. Für die hier verwendeten Zerlegungen trifft diese jedoch stets zu.

Als Quadraturformel wird die zweistufige Gauß-Quadratur verwendet. Diese Quadraturformel im Dreidimensionalen entsteht, indem die eindimensionale Gauß-Quadratur (vgl. (Schwarz u. a. 2011, Beispiel 7.10, S. 323)) jeweils in jede der drei Raumrichtungen angewendet wird. Die Quadraturpunkte stimmen dann komponentenweise mit denen der eindimensionalen Quadraturformel überein. Die Quadraturgewichte wiederum erhält man als Produkt der Gewichte des eindimensionalen Falls. Damit folgen schließlich auf dem Einheitswürfel $\hat{K} = (0, 1)^3$ die Quadraturpunkte und -gewichte aus Abbildung 2. Wie in Kapitel 5 bereits angekündigt, erfüllt diese Quadraturformel die Bedingungen

7 Numerische Beispiele

(Q1) und (Q2) für $k = 1$, da sie für Polynome aus $\mathcal{Q}^{3,3,3}(K)$ exakt ist. Dies ist durch direktes Einsetzen einer Basis aus Monomen dieses Raumes nachweisbar.

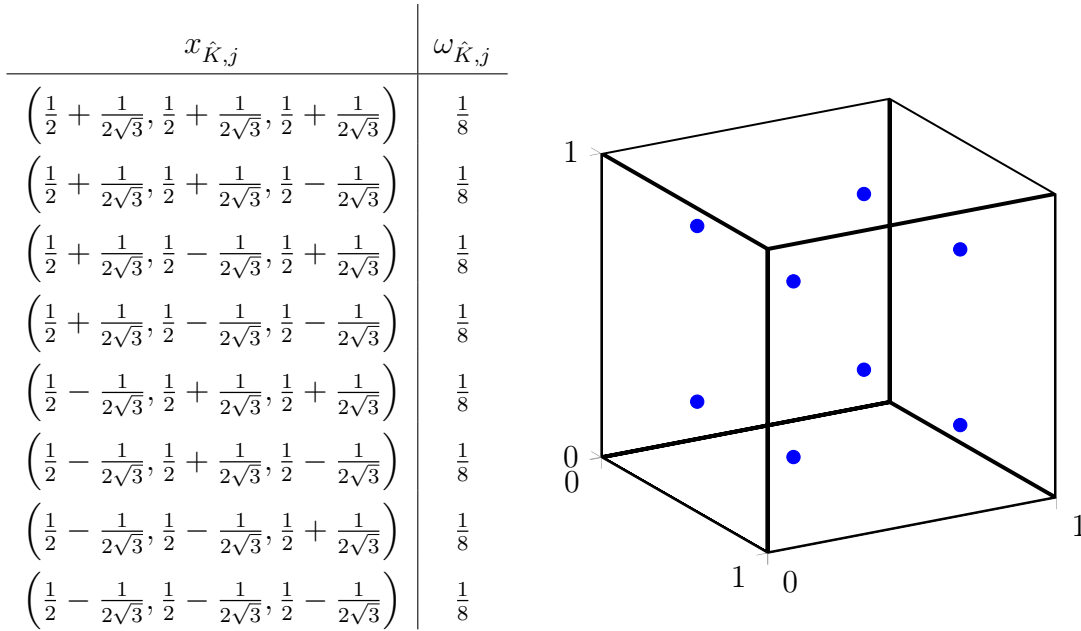


Abbildung 2: Zweistufige Gauß-Quadratur

7.1.3 Zeitintegration

Beim Leapfrog-Verfahren handelt es sich nach (Hochbruck u. a. 2017, S. 54 f.) um ein explizites Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung. Um dieses für die Heterogene Mehrskalennmethode zu formulieren, muss das Verfahren zunächst in ein System von zwei Differentialgleichungen umgewandelt werden. Dazu seien für eine Basis $\{\psi_H^1, \psi_H^2, \dots\}$ von $V_{\text{curl}}^1(\mathcal{T}_H)$ und eine Basis $\{\varphi_H^1, \varphi_H^2, \dots\}$ von $V_{\text{curl},0}^1(\mathcal{T}_H)$ die folgenden Matrizen definiert:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_H^{\text{HMM}})_{ij} &:= m_H^{\text{HMM}} \left(\begin{pmatrix} \psi_H^i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_H^j \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\
 (\mathbf{M}_E^{\text{HMM}})_{ij} &:= m_H^{\text{HMM}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_H^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_H^j \end{pmatrix} \right), \\
 (\mathbf{C}_H)_{ij} &:= s_H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_H^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_H^j \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\
 (\mathbf{C}_E)_{ij} &:= -s_H \left(\begin{pmatrix} \psi_H^i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_H^j \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Außerdem sei

$$(\mathbf{j})_i := \sum_{m=1}^M \omega_{K,m} J_{\text{ext},H}(x_{K,m}, t) \cdot \varphi_H^i(x_{K,m}).$$

Das HMM-Maxwell-System (6.7) kann damit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_H^{\text{HMM}} \partial_t H_V^{\text{HMM}}(t) &= -C_E E_V^{\text{HMM}}(t), \\ \mathbf{M}_E^{\text{HMM}} \partial_t E_V^{\text{HMM}}(t) &= C_H H_V^{\text{HMM}}(t) - \mathbf{j} \end{aligned}$$

mit Vektoren $E_V^{\text{HMM}}(t)$ und $H_V^{\text{HMM}}(t)$ zu den oben eingeführten Basen von $V_{\text{curl}}^1(\mathcal{T}_H)$ und $V_{\text{curl},0}^1(\mathcal{T}_H)$. Das Leapfrog-Verfahren für den Zeitschritt $n + 1$ mit Zeitschrittweite $\tau > 0$ lautet dafür schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_H^{\text{HMM}} (H_{V,n+\frac{1}{2}}^{\text{HMM}} - H_{V,n}^{\text{HMM}}) &= -\frac{\tau}{2} C_E E_{V,n}^{\text{HMM}}, \\ \mathbf{M}_E^{\text{HMM}} (E_{V,n+1}^{\text{HMM}} - E_{V,n}^{\text{HMM}}) &= \tau C_H H_{V,n+\frac{1}{2}}^{\text{HMM}} - \frac{\tau}{2} (\mathbf{j}_{n+1} + \mathbf{j}_n), \\ \mathbf{M}_H^{\text{HMM}} (H_{V,n+1}^{\text{HMM}} - H_{V,n+\frac{1}{2}}^{\text{HMM}}) &= -\frac{\tau}{2} C_E E_{V,n+1}^{\text{HMM}}. \end{aligned}$$

Dabei ist die Zeitschrittweite durch eine CFL-Bedingung beschränkt. Für die im Folgenden vorgestellten numerischen Beispiele wird τ jedoch stets klein genug gewählt, dass diese erfüllt und das Verfahren stabil ist.

7.2 Erstes Beispiel: Ohne elektrische Stromdichte

Es sei $a^\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für $\eta := 0.00625$ definiert als

$$a^\eta(x) := \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi \frac{x_1}{\eta}\right) \right) \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi \frac{x_2}{\eta}\right) \right) \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi \frac{x_3}{\eta}\right) \right).$$

Dann werden die magnetische Permeabilität und elektrische Permittivität definiert durch

$$\mu^\eta(x) := a^\eta(x), \quad \varepsilon^\eta(x) := a^\eta(x).$$

In diesem Fall sind auch die effektiven Größen isotrop. In Jikov u. a. 1994, Abschnitt 1.2, S. 17 wird für diesen Spezialfall gezeigt, dass diese von der Form

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} \equiv \mathbf{I}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} \equiv \mathbf{I}_3$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^3$ sind.

In diesem Beispiel wird keine rechte Seite verwendet. Es gilt also

$$J_{\text{ext}} \equiv 0, \quad J_{\text{ext},H} \equiv 0.$$

Schließlich werden für das effektive magnetische und elektrische Feld die Anfangswerte

$$H_0^{\text{eff}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0^{\text{eff}}(x) = \begin{pmatrix} -\cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \\ 0 \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Omega$$

gesetzt. Damit ist das Maxwell-System genau so definiert, dass die analytische Lösung des effektiven Systems bekannt ist. Diese lautet für $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$H^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} -\pi^2\sqrt{3} \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ 2\pi^2\sqrt{3} \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ \pi^2\sqrt{3} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$E^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} -\cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \cos\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ 0 \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \cos\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \end{pmatrix}.$$

Für die HMM-Approximation werden die Anfangswerte auf den diskreten Ansatzraum projiziert. Diese lauten

$$H_{H,0}^{\text{HMM}} := \mathcal{P}_H H_0, \quad E_{H,0}^{\text{HMM}} := \mathcal{P}_H E_0.$$

Bei der Simulation wird hierbei das Leapfrog-Verfahren mit Zeitschrittweite $\tau = \frac{1}{100}$ und Endzeit $T = 1$ angewendet.

Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse für diese Rahmenbedingungen diskutiert. Dabei wird, wie in der Fehleranalyse im Kapitel zuvor, der Fehler zwischen der Lösung der Heterogenen Mehrskalermethode u_H^{HMM} und der exakten homogenisierten Lösung u^{eff} betrachtet. Dabei liegt der Schwerpunkt der Betrachtung auf der Konvergenz in den zwei verschiedenen Skalen im Ort. Dazu wird mit $\|u_H^{\text{HMM}} - u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ der maximale Fehler im Zeitintervall $(0, T)$ abgebildet.

Abbildung 3a zeigt den maximalen Fehler zwischen der Lösung der Heterogenen Mehrskalermethode und der exakten homogenisierten Lösung im Zeitintervall $(0, T)$ über dem Durchmesser H der Makrozellen für verschiedene Durchmesser h der Mikrozellen. Dabei ist gut zu erkennen, dass für die groben Mikrozerlegungen $h = 0.0054$ und $h = 0.0027$ der Mikrofehler der Ordnung h^2 aus der Fehlerabschätzung aus Korollar 6.16 dominiert und keine Konvergenz abhängig von H zu beobachten ist. Für die feineren Zerlegungen $h = 0.0014$ und $h = 0.0007$ ist die lineare Konvergenz in H zwar anfänglich zu beobachten, für feinere Makrozerlegungen \mathcal{T}_H dominiert jedoch auch hier der Mikrofehler. Erst für die feinste Mikrozerlegung $h = 0.0003$ zeigt sich für alle hier betrachteten Makrozerlegungen lineare Konvergenz in H .

In Abbildung 3b ist die Betrachtung umgedreht. Dort ist der HMM-Fehler für eine Auswahl an Makrozerlegungen über dem Mikrodurchmesser h dargestellt. Dabei zeigt sich, dass bei den beiden groben Makrozerlegungen $H = 0.866$ und 0.433 die Terme in Abhängigkeit von H dominieren und somit keine deutliche Konvergenz in h zu beobachten ist. Für die feineren Makrozerlegungen $H \in \{0.217, 0.108, 0.054\}$ liegt das Plateau des Makrofehlers hingegen tief genug, dass zumindest eine Konvergenz in h sichtbar wird. Um jedoch die Konvergenzordnung in h genau ablesen zu können, reichen die abgebildeten Simulationsergebnisse nicht aus.

7 Numerische Beispiele

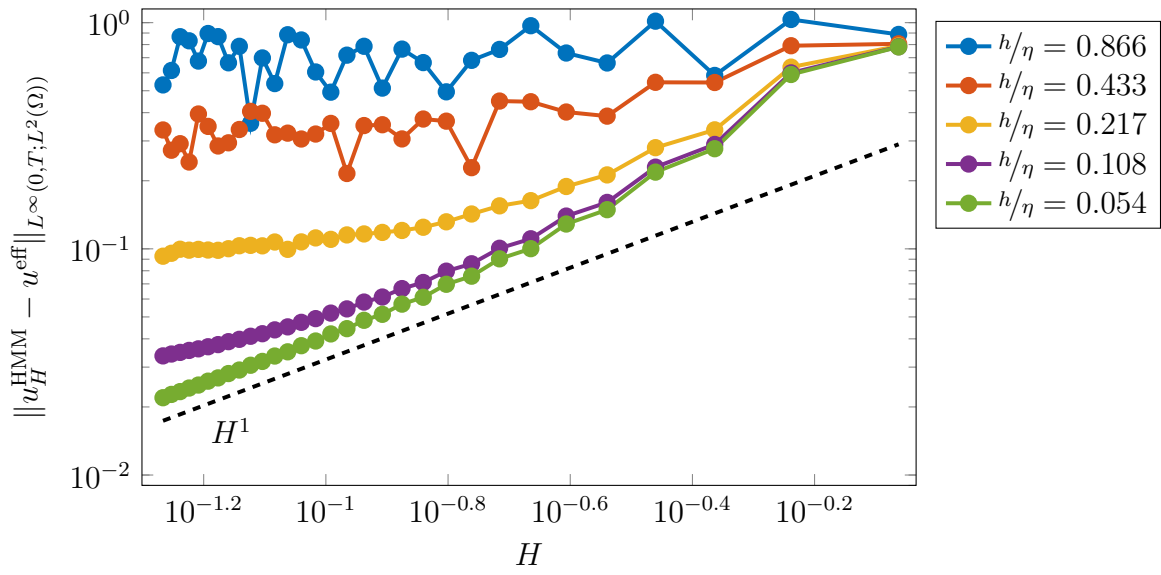
Um diese genauer bestimmen zu können, betrachtet man stattdessen den Fehler zwischen der Lösung der Heterogenen Mehrskalenmethode u_H^{HMM} und der diskreten effektiven Lösung u_H^{eff} . Um diese zu bestimmen, wird das effektive Maxwell-System (4.24) mit derselben Zerlegung \mathcal{T}_H und demselben diskreten Ansatzraum $V_{\text{curl}}^1(\mathcal{T}_H) \times V_{\text{curl},0}^1(\mathcal{T}_H)$ wie die Heterogene Mehrskalenmethode diskretisiert und anschließend ebenso mit dem Leapfrog-Verfahren über die Zeit integriert. Dabei verbleibt von der Fehlerabschätzung aus Korollar 6.16 lediglich der Mikrofehler, es gilt nämlich

$$\|u_H^{\text{HMM}}(t) - u_H^{\text{eff}}(t)\|_{L^2(\Omega)^6} \leq Ct \left(\frac{h}{\eta}\right)^2 \|\partial_t u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

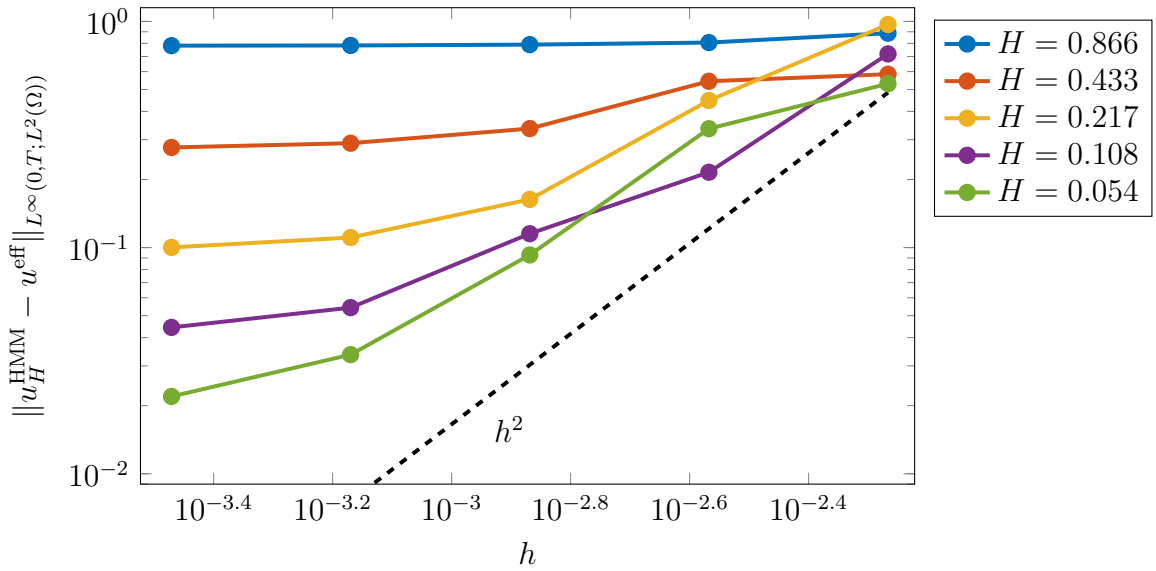
Abbildung 4a zeigt hierzu den maximalen Fehler im Zeitintervall $(0, T)$ über dem Durchmesser H der Makrozellen. Wie zu erwarten ist, kann keine Konvergenz in H beobachtet werden. Dass der Fehler in H sogar leicht wächst, ist vermutlich auf die mit der Verfeinerung in H einhergehende deutliche Zunahme an Rechenoperationen zurückzuführen.

Deutlich interessanter in diesem Zusammenhang ist Abbildung 4b, welche denselben Fehler über dem Mikrodurchmesser h zeigt. Hierbei ist klar die quadratische Konvergenz in h zu erkennen.

7 Numerische Beispiele



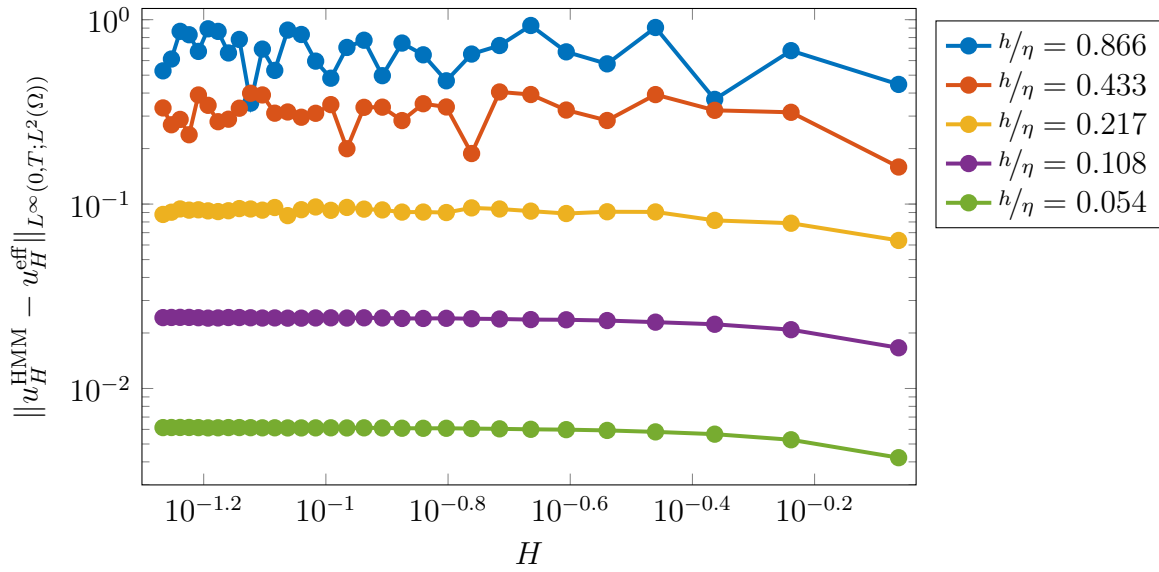
(a) über dem Durchmesser H der Makrozellen



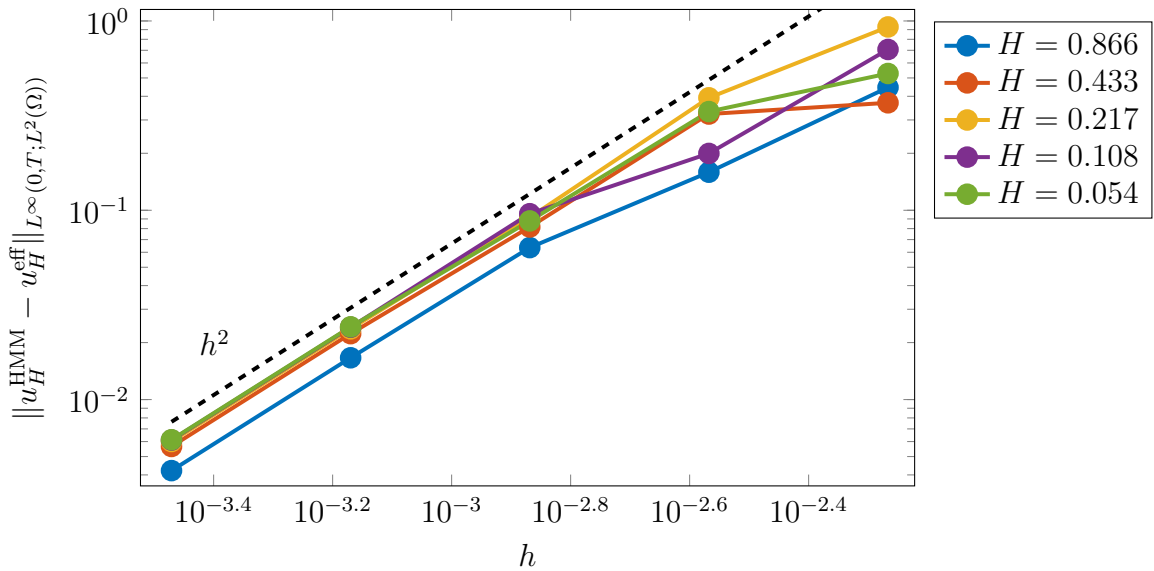
(b) über dem Durchmesser h der Mikrozellen

Abbildung 3: HMM-Fehler zu Abschnitt 7.2

7 Numerische Beispiele



(a) über dem Durchmesser H der Makrozellen



(b) über dem Durchmesser h der Mikrozellen

Abbildung 4: Mikrofehler zu Abschnitt 7.2

7.3 Zweites Beispiel: Mit elektrischer Stromdichte

In diesem Beispiel werden dieselben Materialparameter μ^n und ε^n wie im ersten Beispiel verwendet. Es wird jedoch die rechte Seite

$$J(x, t) = \begin{pmatrix} -\cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \exp(-t) \\ -\sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \exp(-t) \\ -\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \exp(-t) \end{pmatrix}$$

betrachtet. Um den Projektionsfehler der rechten Seite bei der Fehleranalyse auszuschließen, sei

$$J_{\text{ext}}(x, t) := \mathcal{P}_H J(x, t), \quad J_{\text{ext},H}(x, t) := \mathcal{P}_H J(x, t).$$

In diesem Fall werden für das magnetische und elektrische Feld die Anfangswerte

$$H_0^{\text{eff}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_0^{\text{eff}}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \\ \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Omega$$

gesetzt. Damit ist das Maxwell-System genau so definiert, dass die analytische Lösung des effektiven Systems bekannt ist. Diese lautet für $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$H^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \exp(-t) \\ \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \exp(-t) \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \exp(-t) \end{pmatrix}.$$

Die Heterogene Mehrskalenmethode verwendet wie zuvor die projizierten Anfangswerte. Ebenfalls wie im vorigen Beispiel wird bei der Simulation das Leapfrog-Verfahren mit Zeitschrittweite $\tau = \frac{1}{100}$ und Endzeit $T = 1$ angewendet.

Simulationsergebnisse

Auch zu diesem Beispiel wird der Fehler zwischen der Lösung der Heterogenen Mehrskalenmethode u_H^{HMM} und der effektiven Lösung u^{eff} betrachtet. In Abbildung 5a ist dieser Fehler über dem Makrozellendurchmesser H für verschiedene Mikrozelldurchmesser h abgebildet. Dabei sieht man deutlich die lineare Konvergenz in H sowie die Fehlerplateaus für $h = 0.0054$ und $h = 0.0027$, bei denen der Mikrofehler dominiert.

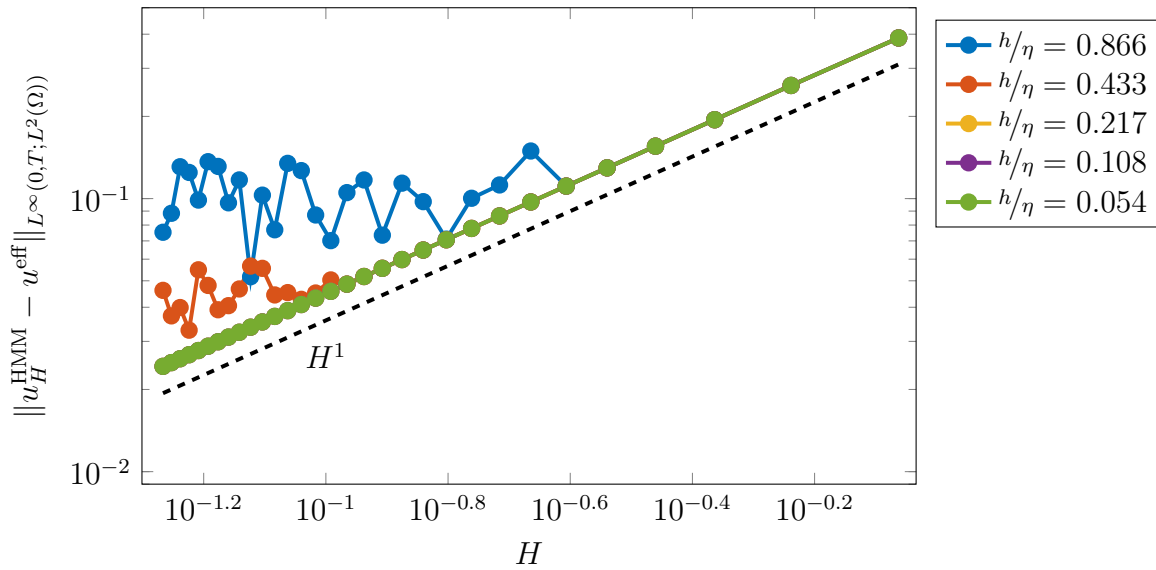
Im Gegensatz zum ersten Beispiel fällt hier auf, dass der Fehler nur auf diesen Plateaus vom Mikrozelldurchmesser h abhängt. Sonst stimmt der Fehler für alle h überein. Dies liegt vermutlich daran, dass die hierbei betrachtete exakte Lösung rotationsfrei ist. Es gilt also $\text{curl} H = 0$ und $\text{curl} E = 0$. Dadurch vereinfacht sich das zu integrierende System deutlich, denn abgesehen von Integrationsfehlern sind die Gleichungen für das magnetische und das elektrische Feld damit entkoppelt.

Diese Beobachtung wird auch bei Betrachtung des HMM-Fehlers über dem Mikrozelldurchmesser h in Abbildung 5b und der Betrachtung des Mikrofehlers über dem

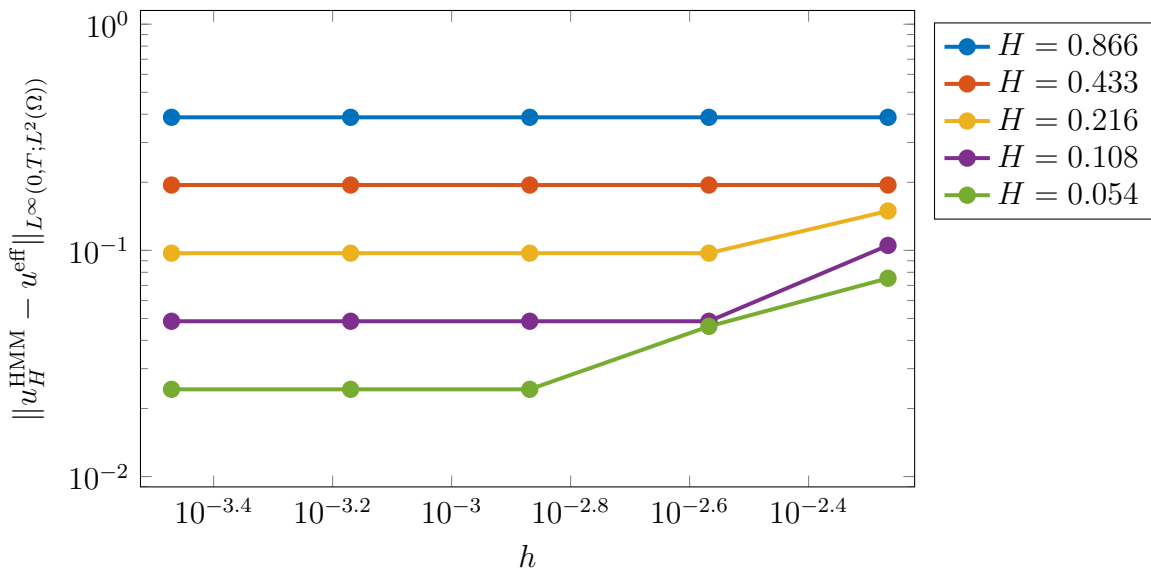
7 Numerische Beispiele

Makrozellendurchmesser H in Abbildung 6a deutlich, da die Fehlerplateaus beinahe exakt konstant sind.

In Abbildung 6b wird schließlich wie beim ersten Beispiel der Mikrofehler über dem Mikrozellendurchmesser h dargestellt. Wie zuvor zeigt sich quadratische Konvergenz.



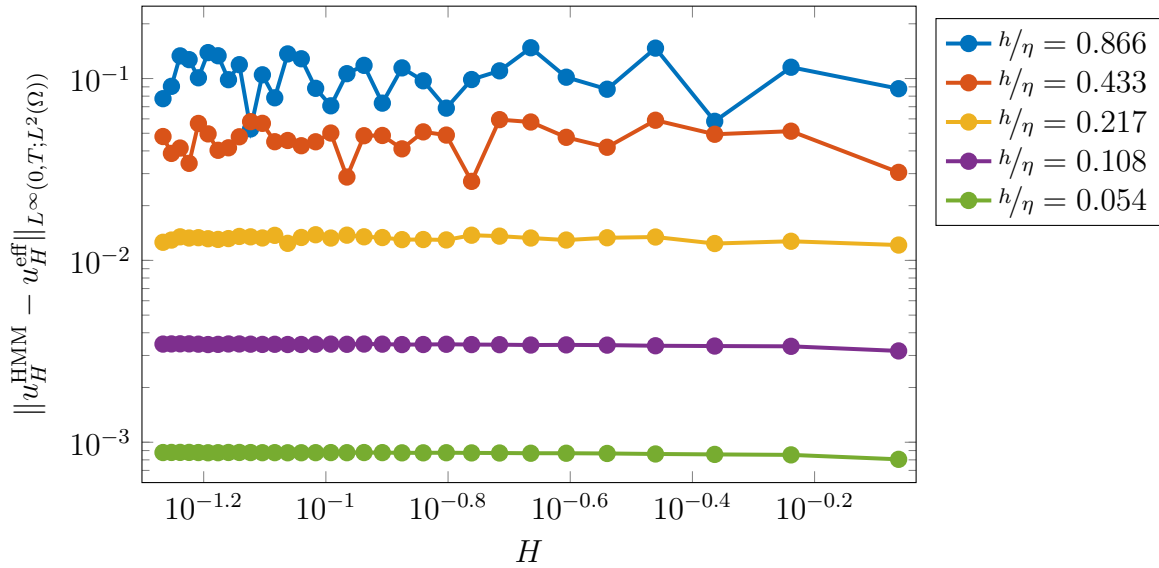
(a) über dem Durchmesser H der Makrozellen



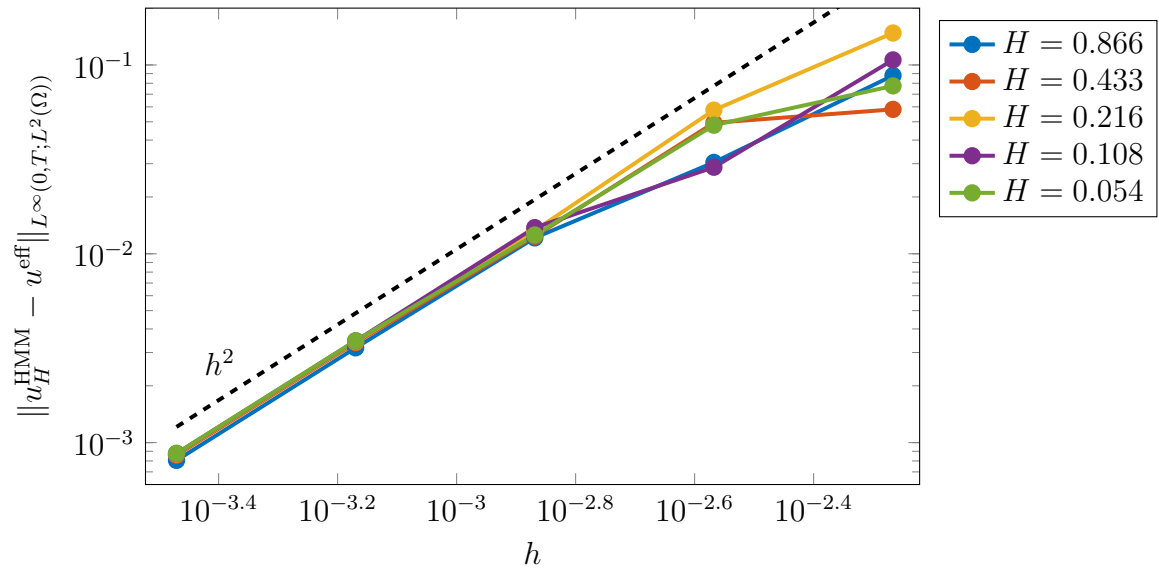
(b) über dem Durchmesser h der Mikrozellen

Abbildung 5: HMM-Fehler zu Abschnitt 7.3

7 Numerische Beispiele



(a) über dem Durchmesser H der Makrozellen



(b) über dem Durchmesser h der Mikrozellen

Abbildung 6: Mikrofehler zu Abschnitt 7.3

7.4 Drittes Beispiel: Vergleich zwischen exakter Lösung und HMM-Lösung

Im dritten Beispiel werden dieselben Materialparameter wie zuvor, jetzt jedoch für den Fall $\eta = 0.08$ betrachtet. Damit ist η groß genug gewählt, dass das Maxwell-System (4.2) für E^η und H^η direkt gelöst werden kann. Die Anfangswerte und rechte Seite stimmen mit denen aus dem zweiten Beispiel überein.

Im Unterschied zu den vorigen Beispielen wird mit $\Omega = (0, 1)^3$ nur das halbe Gebiet verwendet. Zur Bestimmung von E^η und H^η wird dieses je Raumrichtung in 50 Zellen zerlegt. Dies ergibt insgesamt 125000 Zellen. Damit entspricht η immerhin der Kantenlänge von 4 Zellen. Zur Berechnung der HMM-Lösungen E_H^{HMM} und H_H^{HMM} wird eine deutlich gröbere Zerlegung verwendet. Diese besteht aus lediglich 20 Zellen je Raumrichtung. Die beiden Zerlegungen sind in Abbildung 7 dargestellt.

Im folgenden Abschnitt werden die damit erhaltenen Simulationsergebnisse diskutiert.

Simulationsergebnisse

Da für dieses Beispiel dieselben Parameter wie im vorigen Fall verwendet werden, sind auch in diesem Fall beide Felder rotationsfrei. Damit ist das magnetische Feld abgesehen von numerischen Fehlern konstant 0. Deshalb wird im Folgenden lediglich das elektrische Feld weiter untersucht.

Wie zu erwarten ist, führen die periodischen Materialparameter zu einem lokal periodischen elektrischen Feld E^η . Diese lokal periodischen Änderungen, welche das homogenisierte Verhalten überlagern, sind in Abbildung 8 dargestellt. Bei der Heterogenen Mehrskalenmethode gehen sie zugunsten des deutlich geringeren Rechenaufwands verloren.

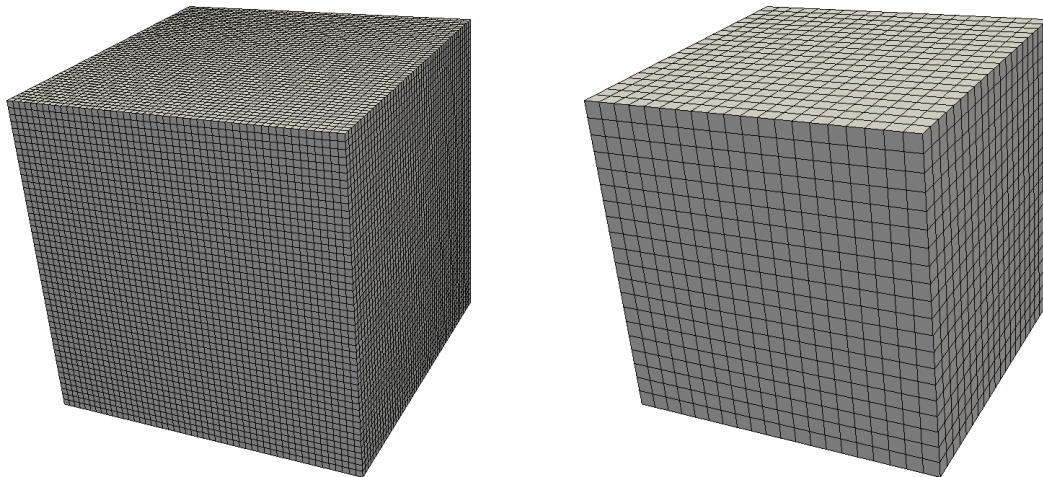
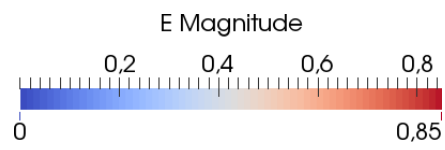
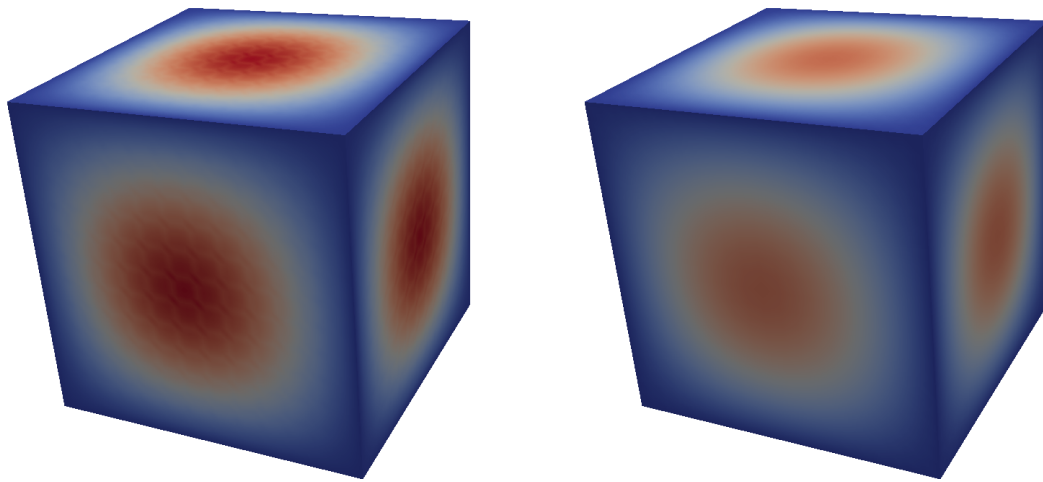
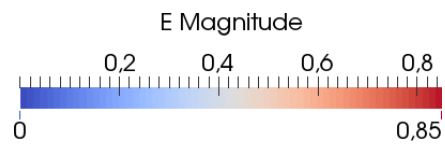
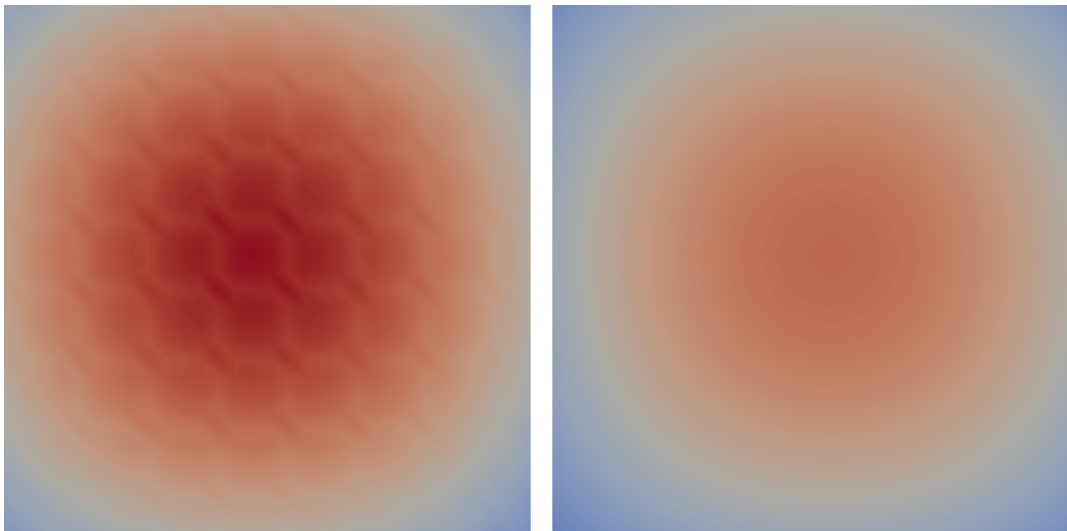


Abbildung 7: Zerlegungen des Einheitswürfels: 50 Zellen pro Raumrichtung (links) und 20 Zellen pro Raumrichtung (rechts).

7 Numerische Beispiele



(a) auf der Oberfläche $\partial\Omega$



(b) auf einem Ausschnitt der Seitenfläche $y = 1$

Abbildung 8: Simulationsergebnisse zu Abschnitt 7.4. Dargestellt ist der Betrag von E^n auf feinem Gitter (links) und E_H^{HMM} auf grobem Gitter (rechts) zur Zeit $t = 0.4$.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend folgt eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Schritte in dieser Arbeit:

Das Ziel dieser Arbeit war die Formulierung der Heterogenen Mehrskalermethode für die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen erster Ordnung sowie deren Fehleranalyse. Dazu wurde zunächst in Kapitel 2 ein Überblick über die Maxwell-Gleichungen und deren Wohlgestelltheit präsentiert. Zusammen mit der Einführung der Zweiskalenkonvergenz in Kapitel 3 konnte damit in Kapitel 4 das in dieser Arbeit betrachtete Modellproblem der zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen auf lokal-periodischen, linearen, stationären und isotropen Materialien formuliert werden. Außerdem wurde gezeigt, dass die Lösungen dieses Systems unabhängig von den hochoszillatorischen Schwankungen beschränkt werden können. Dieses Resultat stellte die Basis für die anschließend durchgeführte Homogenisierung dar, wodurch die effektiven Maxwell-Gleichungen erhalten wurden.

Im nächsten Kapitel wurde die numerische Betrachtung der Maxwell-Gleichungen vorbereitet. Dazu wurden in Kapitel 5 die auf den Nédélec-Elementen basierenden diskreten Ansatzräume vorgestellt. Diese wurden in Kapitel 6 zusammen mit den analytischen Resultaten aus den vorherigen Kapiteln verwendet, um die Heterogene Mehrskalermethode zu formulieren. Zusammen mit dem anschließenden Nachweis der Wohldefiniertheit des Verfahrens und der Fehleranalyse stellt dies das zentrale Resultat dieser Arbeit dar. Abschließend wurde das Verfahren, wie in Kapitel 7 erläutert, in der auf C++ aufbauenden Software-Bibliothek `deal.II` implementiert und durch numerische Beispiele getestet.

Dabei wurde die Fehleranalyse lediglich für das semidiskrete Verfahren durchgeführt. Der Fehler, der zusätzlich durch die numerische Zeitintegration entsteht, wurde somit nicht berücksichtigt. Der nächste Schritt besteht hierbei folglich darin, auch die Zeitintegration in die Analyse mit einzubeziehen und dadurch schließlich eine Fehleranalyse der Volldiskretisierung zu erhalten. Dabei ist sowohl die Verwendung von expliziten als auch von impliziten Verfahren möglich.

Als Ausblick können weiterhin auch bei der Wahl der diskreten Ansatzräume Alternativen untersucht werden. Bei den in dieser Arbeit betrachteten diskreten Räumen, welche auf den Nédélec-Elementen erster Familie beruhen, handelt es sich um konforme Ansatzräume. Möglicherweise kann das Verfahren jedoch in ähnlicher Weise auch für nicht-konforme Ansatzräume, welche beispielsweise bei der Discontinuous-Galerkin-Methode auftreten, formuliert werden.

Literaturverzeichnis

- Abdulle, A. (2009). „The finite element heterogeneous multiscale method: a computational strategy for multiscale PDEs“. In: *GAKUTO International Series Mathematical Sciences and Applications* 31, S. 135–184.
- Abdulle, A. (2012). „Discontinuous Galerkin finite element heterogeneous multiscale method for elliptic problems with multiple scales“. In: *Mathematics of Computation* 81.278, S. 687–713.
- Allaire, G. (1992). „Homogenization and Two-scale Convergence“. In: *SIAM J. Math. Anal.* 23.6, S. 1482–1518.
- Amrouche, C., P. G. Ciarlet und P. Ciarlet (2007). „Vector and scalar potentials, Poincaré’s theorem and Korn’s inequality“. In: *Comptes Rendus Mathématique* 345.11, S. 603–608.
- Atkinson, K. und W. Han (2009). *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York.
- Bangerth, W., R. Hartmann und G. Kanschat (2007). „deal.II – a General Purpose Object Oriented Finite Element Library“. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 33.4, S. 24/1–24/27.
- Bangerth, W. u. a. (2016). „The deal.II Library, Version 8.4“. In: *Journal of Numerical Mathematics* 24.3, S. 135–141.
- Ciarlet, P. G., S. Fliss und C. Stohrer (2017). „On the approximation of electromagnetic fields by edge finite elements. Part 2: A heterogeneous multiscale method for Maxwell’s equations“. In: *Comput. Math. Appl.*
- Emmrich, E. (1999). „Discrete versions of Gronwall’s lemma and their application to the numerical analysis of parabolic problems“. Preprint no. 637, Fachbereich Mathematik, Technische Universität Berlin.
- Forster, O. (2011). *Analysis 2*. Grundkurs Mathematik. Vieweg+Teubner.
- Henning, P., M. Ohlberger und B. Verfürth (2016). „A new Heterogeneous Multiscale Method for time-harmonic Maxwell’s equations“. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 54.6, S. 3493–3522.
- Hipp, D., M. Hochbruck und C. Stohrer (2017). „Unified error analysis for non-conforming spatial discretizations of wave-type equations“. Stand 04. Mai 2017.
- Hochbruck, M. (2016). „Finite Element Methods“. Vorlesungsskript, Karlsruher Institut für Technologie.
- Hochbruck, M., Tobias Jahnke und Roland Schnaubelt (2015). „Convergence of an ADI splitting for Maxwell’s equations“. In: *Numerische Mathematik* 129.3, S. 535–561.
- Hochbruck, M. und C. Stohrer (2016). *Finite element heterogeneous multiscale method for time-dependent Maxwell’s equations*. CRC 1173-Preprint 2016/25. Karlsruhe Institute of Technology.
- Hochbruck, M. und A. Sturm (2017). „Numerical Methods for Maxwell’s Equations“. Vorlesungsskript, Karlsruher Institut für Technologie.
- Holmbom, A. (1997). „Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results“. In: *Applications of Mathematics* 42.5, S. 321–343.

- Jikov, V. V., S. M. Kozlov und O. A. Oleinik (1994). *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer.
- Monk, P. (1993). „An analysis of Nédélec’s method for the spatial discretization of Maxwell’s equations“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 47.1, S. 101–121.
- Nédélec, J. C. (1980). „Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 “. In: *Numerische Mathematik* 35.3, S. 315–341.
- Papanicolau, G., A. Bensoussan und J. L. Lions (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science.
- Patrikalakis, N. M. und T. Maekawa (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer Berlin Heidelberg.
- Schneebeli, A. (2003). „An $H(\text{curl};\Omega)$ -conforming FEM: Nédélec elements of first type“.
- Schwab, A. J. (2013). *Begriffswelt der Feldtheorie*. Springer Berlin Heidelberg.
- Schwarz, H. R. und N. Köckler (2011). *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Schweizer, B. (2013). *Partielle Differentialgleichungen: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- Schweizer, B. (2015). „Homogenisierungstheorie“. Vorlesungsskript, Technische Universität Dortmund.
- Wellander, N. (1998). „Homogenization of Some Linear and Nonlinear Partial Differential Equations“. Dissertation. Luleå University of Technology.
- Wellander, N. (2001). „Homogenization of the Maxwell Equations: Case I. Linear Theory“. In: *Applications of Mathematics* 46.1, S. 29–51.
- Werner, D. (2011). *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.
- Yue, X. und W. E (2007). „The Local Microscale Problem in the Multiscale Modeling of Strongly Heterogeneous Media: Effects of Boundary Conditions and Cell Size“. In: *J. Comput. Phys.* 222.2, S. 556–572.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den 08. Mai 2017