

Masterarbeit

# Semilineare Wellengleichungen mit dynamischen Randbedingungen

Jan Leibold

29.09.2017

Betreuung: Prof. Dr. Marlis Hochbruck

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

## Danksagung

Ich bedanke mich bei Marlis Hochbruck für die Betreuung dieser Arbeit und das interessante Thema. Bereits seit zwei Jahren ermöglicht sie mir es, als wissenschaftliche Hilfskraft an aktueller mathematischer Forschung mitzuwirken und dies konnte ich mit dieser Arbeit fortsetzen. Für diese Erfahrungen und alles was ich in der Zeit lernen konnte bin ich sehr dankbar.

Außerdem geht mein Dank an David Hipp für das Korrekturlesen der Beweise, die unzähligen Stunden, die ich mich mit ihm über verschiedene Aspekte dieser Arbeit austauschen konnte und seine sehr gute Vorarbeit, die diese Arbeit erst möglich gemacht hat.

Schließlich danke ich Lorena Arzner für die Unterstützung während des Schreibens dieser Arbeit und Simon Kohler, an den ich mich stets mit analytischen Fragen wenden konnte.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Inhalt . . . . .	1
1.3. Aufbau der Arbeit . . . . .	1
1.4. Notationen . . . . .	2
<b>2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen</b>	<b>5</b>
2.1. Semilineare Evolutionsgleichungen in Hilberträumen . . . . .	5
2.2. Analyse abstrakter Semidiskretisierungen . . . . .	14
2.3. Zeitdiskretisierung mit Crank-Nicolson . . . . .	23
<b>3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung</b>	<b>32</b>
3.1. Analyse des kontinuierlichen Problems . . . . .	32
3.2. Abstrakte Semidiskretisierung . . . . .	36
3.3. Zeitdiskretisierung mit Crank-Nicolson . . . . .	44
<b>4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen</b>	<b>46</b>
4.1. Formulierung der Gleichung . . . . .	46
4.2. Analytische Wohlgestellttheit . . . . .	54
<b>5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen</b>	<b>56</b>
5.1. Die Bulk-Surface Finite Elemente Methode . . . . .	56
5.2. Die semidiskretisierte Gleichung . . . . .	62
5.3. Fehlerabschätzung der Semidiskretisierung . . . . .	65
5.4. Numerische Beispiele und Implementierung . . . . .	70
<b>6. Fazit und Ausblick</b>	<b>75</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>76</b>
A.1. Lineare Evolutionsgleichungen und Halbgruppen . . . . .	76
A.2. Sonstige Sätze . . . . .	78

# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

Die Idee zu dieser Arbeit entstammt [8]. Dort werden Finite Elemente Diskretisierungen linearer Wellengleichungen mit dynamischen Randbedingungen untersucht. Dazu wird ein Framework eingeführt, um die Diskretisierungen abstrakt auf dem Level von Evolutionsgleichungen untersuchen zu können. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Theorie und deren Ergebnisse auf semilineare Gleichungen zu erweitern.

## 1.2. Inhalt

Entsprechend den Zielen ist diese Arbeit zweigeteilt. Sie enthält einen theoretischen Teil, in dem die abstrakte Theorie zur Finite Elemente Diskretisierung linearer Evolutionsgleichungen aus [8] auf semilineare Evolutionsgleichungen erweitert wird. Diese Theorie umfasst sowohl konforme als auch nichtkonforme Finite Elemente Diskretisierungen. Mittels Halbgruppentheorie wird eine allgemeine Fehlerabschätzung hergeleitet, die auf verschiedene Beispiele von Finiten Elementen angewendet und für diese konkretisiert werden kann.

Im zweiten Teil werden semilineare Wellengleichungen mit kinetischen Randbedingungen untersucht. Eine Beispielgleichung hierfür ist

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (0, T) \times \Omega, \quad (1.1a)$$

$$u_{tt} + \partial_n u - \Delta_\Gamma u = |u|^{q-1} u, \quad (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.1b)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad u_t(0, x) = v^0(x), \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1c)$$

für  $q \geq 1$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und  $\Delta_\Gamma$  der Laplace-Beltrami Operator ist. Eine geeignete Finite Elemente Diskretisierung wird vorgestellt. Sowohl kontinuierliche als auch diskretisierte Gleichung lassen sich zu semilinearen Evolutionsgleichungen in geeigneten Hilberträumen umformulieren. Mit Hilfe der abstrakten Theorie aus dem ersten Teil wird die Wohlgestelltheit der analytischen Gleichung gezeigt und eine Fehlerabschätzung für die Diskretisierung hergeleitet.

Desweiteren wird jeweils auf Zeitintegration der semidiskretisierten Gleichung mit dem Crank-Nicolson Verfahren eingegangen und ein Abschätzung des Volldiskretisierungsfehlers gezeigt.

## 1.3. Aufbau der Arbeit

In den Kapiteln 2 und 3 findet sich die abstrakte Theorie. Dabei geht es in Kapiteln 2 zunächst um die Theorie semilinearer Evolutionsgleichungen erster Ordnung und deren

## 1. Einleitung

Wohlgestelltheit. Anschließend werden allgemeine Finite Elemente Diskretisierungen solcher Evolutionsgleichungen eingeführt und es werden abstrakte Fehlerabschätzungen gezeigt. Damit wird in Kapitel 3 die Wohlgestelltheit abstrakter Wellengleichungen zweiter Ordnung und eine allgemeine Fehlerabschätzung für deren Semidiskretisierung bewiesen.

Kapitel 4 und 5 befassen sich mit der Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen. Diese wird in Kapitel 4 vorgestellt, als Evolutionsgleichung umformuliert und auf Wohlgestelltheit untersucht. In Kapitel 5 wird eine Finite Elemente Diskretisierung für diese Gleichung vorgestellt für welche anschließend mit den Resultaten aus Kapitel 3 eine Fehlerabschätzung bewiesen wird. Numerische Experimente zur Validierung der Ergebnisse schließen die Arbeit ab.

Im Anhang in Kapitel A finden sich zitierte Resultate, die in dieser Arbeit verwendet werden.

### 1.4. Notationen

Nachfolgend aufgeführte Notationen werden in dieser Arbeit verwendet.

#### Allgemeine Notationen

- Für einen metrischen Raum  $G$  bezeichnet  $B(x, r) \subset G$  den Ball mit Radius  $r > 0$  um  $x \in G$ .
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  sei stets ein beschränktes Gebiet mit Rand  $\Gamma$ .
- Zu  $\Gamma$  sei  $n: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$  der äußere Normalenvektor. Für eine messbare Funktion  $\phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds$$

Das Oberflächenintegral von  $\phi$  über  $\Gamma$ .

- Im Zusammenhang mit einer numerischen Ortsdiskretisierung ist  $h > 0$  ein geeigneter Diskretisierungsparameter.
- Wir betrachten alle auftretenden zeitabhängigen Gleichungen auf endlichen Zeitintervallen der Form  $[0, T]$  mit  $T > 0$ .
- $C < \infty$  wird als generische Konstante verwendet, die jedoch stets unabhängig von  $h$  und  $T$  ist.
- Ist  $X$  ein Hilbertraum und  $\Phi: [0, T] \rightarrow X$  messbar und beschränkt, so definieren wir

$$\|\Phi\|_{L^\infty([0, T]; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|\Phi(t)\|_X.$$

## Operatoren auf Hilberträumen

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei Hilberträume.

- Für ein Skalarprodukt  $p$  auf  $X$  bezeichnet  $(X, p)$  den Raum ausgestattet mit diesem Skalarprodukt.
- Es bezeichnet  $\mathcal{L}(X, Y)$  der Raum der linearen und beschränkten Operatoren von  $X$  nach  $Y$ . Für die Operatornorm verwenden wir das Symbol

$$\|\cdot\|_{Y \leftarrow X}.$$

Der Dualraum von  $X$  wird mit  $X^*$  bezeichnet.

- Für einen linearen Operator  $S: D(S) \rightarrow X$  bezeichnet  $D(S)$  den Definitionsbereich. Ist der Operator abgeschlossen, so ist  $D(S)$  ein Banachraum mit Norm

$$\|x\|_{D(S)} = \|x\|_X + \|Sx\|_X.$$

Wir versehen  $D(S)$  stets mit dieser Norm.

- Sind  $X = X_1 \times X_2$  und  $Y = Y_1 \times Y_2$  Produkthilberträume und  $S_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y_1), S_2 \in \mathcal{L}(X_2, Y_2)$ , so definieren wir den Operator

$$(S_1, S_2) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

durch

$$(S_1, S_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 x_1 \\ S_2 x_2 \end{bmatrix}$$

für alle  $[x_1, x_2]^T \in X$ .

## Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen Hilberträumen

Eine Funktion  $\Phi: X \rightarrow Y$  zwischen zwei Hilberträumen ist differenzierbar, wenn für jedes  $x \in X$  eine lineare Abbildung

$$[\Phi'(x)] \in \mathcal{L}(X; Y)$$

existiert mit

$$\lim_{\|\eta\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{\|\eta\|_X} \|\Phi(x + \eta) - \Phi(x) - [\Phi'(x)]\eta\|_Y = 0.$$

Dann heißt  $\Phi': X \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$  (*Fréchet-*)*Ableitung* von  $\Phi$  und der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen ist definiert als

$$C^1(X; Y) := \{\Phi \in C(X, Y) \mid \Phi' \in C(X, \mathcal{L}(X; Y))\}.$$

## 1. Einleitung

Für eine Funktion

$$\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$$

definiert auf Hilberträumen  $X_1, \dots, X_n, Y$  bezeichnet  $\partial_i \Phi$  die (Fréchet-)Ableitung von  $\Phi$  nach dem  $i$ -ten Argument.

### Lipschitz-Stetigkeit

In dieser Arbeit treten typischerweise Funktionen folgender Art auf:

$$\Phi: [0, T] \times X \rightarrow Y$$

mit Hilberträumen  $X$  und  $Y$ . Wir nennen  $\Phi$

- *global Lipschitz-stetig* auf  $X$  mit Konstante  $L > 0$ , wenn

$$\Phi(t, \cdot): X \rightarrow Y$$

für alle  $t \in [0, T]$  Lipschitz-stetig mit Konstante  $L$  ist.

- *lokal Lipschitz-stetig* auf  $X$ , wenn für alle  $t_0 \in (0, T]$  und  $M > 0$  ein  $L_{t_0, M} > 0$  existiert, sodass für alle  $\eta_1, \eta_2 \in X$  mit  $\|\eta_1\|_X, \|\eta_2\|_X \leq M$  und für alle  $t \in [0, t_0]$  gilt

$$\|\Phi(t, \eta_1) - \Phi(t, \eta_2)\|_Y \leq L_{t_0, M} \|\eta_1 - \eta_2\|_X. \quad (1.2)$$

**Bemerkung:** Für den Begriff der lokalen Lipschitz-Stetigkeit wird in der Literatur auch die Bezeichnung *Lipschitz-Stetigkeit auf Kugeln* verwendet.

### Lebesgue- und Sobolevräume

Wir setzen in dieser Arbeit die Standardtheorie zu Lebesgue- und Sobolevräumen als bekannt voraus und verwenden dabei folgende Notationen: Es sei  $\mathcal{M} \in \{\Omega, \Gamma\}$ .

- Für  $1 \leq q \leq \infty$  bezeichnen wir mit  $L^q(\mathcal{M})$  die Standard-Lebesgue Räume mit Norm  $\|\cdot\|_{L^q(\mathcal{M})}$ .
- Für  $s > 0$  bezeichnet  $H^s(\mathcal{M}) \subset L^2(\mathcal{M})$  den Sobolevraum der Ordnung  $s$ . Diese Räume sind Hilberträume mit Norm  $\|\cdot\|_{H^s(\mathcal{M})}$ . Zur Definition von  $H^s(\Gamma)$  ist die Randregularität  $\Gamma \in C^k$  für ein  $k \geq s$  erforderlich.
- Für  $s \geq \frac{1}{2}$  und  $u \in H^s(\Omega)$  bezeichnet  $\gamma(u) \in H^{s-1/2}(\Gamma)$  die Spur von  $u$ .

Zur Definition und Eigenschaften von Sobolevräumen auf Mannigfaltigkeiten sei verwiesen auf [7].

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

### 2.1. Semilineare Evolutionsgleichungen in Hilberträumen

Dieser Abschnitt ist eine Einführung in die Theorie semilinearer Evolutionsgleichungen in Hilberträumen. Es wird das funktionalanalytische Framework eingeführt, in dem wir später die allgemeinen Finite Elemente Diskretisierungen durchführen und es werden Resultate zur Wohlgestellttheit der Gleichungen vorgestellt. Dies erweitert dabei das Framework für lineare Evolutionsgleichungen in Hilberträumen aus [8]. Die Wohlgestelltheitsresultate der Gleichungen sowie eine Einführung in die Halbgruppentheorie und zu Evolutionsgleichungen finden sich z.B. im Buch [13].

Es seien stets  $X$  und  $Y$  Hilberträume in einem Gelfand-Tripel

$$Y \xhookrightarrow{d} X \simeq X^* \xhookrightarrow{d} Y^*$$

mit stetigen und dichten Einbettungen.

Für  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$  und  $g: [0, T] \times Y \rightarrow Y^*$  betrachten wir folgende semilineare Evolutionsgleichung:

$$x'(t) + \mathcal{S}x(t) = g(t, x(t)) \quad \text{für } t \in [0, T], \quad (2.1a)$$

$$x(0) = x^0. \quad (2.1b)$$

Solche Probleme sind typisch für variationelle Formulierungen von partiellen Differentialgleichungen. Wir interessieren uns für die Einschränkung des Problems auf den Hilbertraum  $X$ . Dazu sei  $S = \mathcal{S}|_X$  die Einschränkung von  $\mathcal{S}$  auf  $X$ , d.h.

$$S: D(S) := \{y \in Y \mid \mathcal{S}y \in X\} \rightarrow X \quad \text{und} \quad \forall y \in D(S): \mathcal{S}y := Sy.$$

Ab hier betrachten wir stets die Evolutionsgleichung

$$x'(t) + Sx(t) = g(t, x(t)) \quad \text{für } t \in [0, T], \quad (2.2a)$$

$$x(0) = x^0 \in D(S), \quad (2.2b)$$

mit

$$g \in C^1([0, T] \times X; X). \quad (2.2c)$$

Lösungen von (2.2) sind ebenfalls Lösungen von (2.1).

**Notation 2.1.** *Wir verwenden folgende Notationen:*

- $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichne das Skalarprodukt auf  $X$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y: Y^* \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichne die duale Paarung auf  $Y$ .
- $s: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  sei die zu  $\mathcal{S}$  assoziierte Bilinearform auf  $Y$ , d.h.  $s(x, y) = \langle \mathcal{S}x, y \rangle_Y$  für  $x, y \in Y$ .

### Analytische Wohlgestelltheit

Wir untersuchen in diesem Abschnitt (2.2) auf Wohlgestelltheit. Dabei orientieren wir uns an [13, Kapitel 6]. Wohlgestelltheit verstehen wir in dieser Arbeit in folgendem Sinn:

**Definition 2.2** (Lösung und Wohlgestelltheit).

a)  $x: [0, T] \rightarrow X$  heißt

i) **klassische Lösung** von (2.2), falls  $x \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T]; D(S))$  gilt und (2.2) erfüllt ist,

ii) **milde Lösung** von (2.2), falls  $x \in C([0, T]; X)$  mit

$$x(t) = e^{-tS}x^0 + \int_0^t e^{-(t-s)S}g(s, x(s)) ds. \quad (2.3)$$

b) Die (klassische/milde) Lösung von (2.2) heißt **stetig abhängig vom Anfangswert**, falls für jedes  $T > 0$  ein  $C = C(T) > 0$  existiert, sodass für alle Lösungen  $x, y$ , die auf  $[0, T]$  existieren, gilt:

$$\|x - y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq C\|x(0) - y(0)\|_X.$$

c) Die Gleichung (2.2) nennen wir **global wohlgestellt**, falls sie für jedes  $T > 0$  und jedes  $x^0 \in D(S)$  eine eindeutige klassische Lösung besitzt, die stetig vom Anfangswert abhängt.

d) Die Gleichung heißt **lokal wohlgestellt**, falls für jedes  $x^0 \in D(S)$  ein maximales  $t^*(x^0) \in (0, \infty]$  existiert, sodass sie für jedes  $T < t^*(x^0)$  eine eindeutige klassische Lösung besitzt, die stetig vom Anfangswert abhängt. In diesem Fall heißt  $t^*(x^0)$  **maximale Existenzzeit** der Lösung.

**Bemerkung:** Jede klassische Lösung von (2.2) erfüllt (2.3) und ist somit auch eine milde Lösung.

Wir zeigen, dass (2.2) wohlgestellt ist, falls  $\mathcal{S}$  (bzw.  $S$ ) ein Monotoniekriterium erfüllt und  $g$  Lipschitz-stetig ist.

**Definition 2.3** (Maximale und quasimonotone Operatoren).

a) Ein Operator  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$  heißt **quasimonoton**, falls eine Konstante  $c_{\text{qm}} \geq 0$  existiert, sodass

$$\langle \mathcal{S}y, y \rangle_{Y^*} + c_{\text{qm}}\|y\|_X^2 = s(y, y) + c_{\text{qm}}p(y, y) \geq 0, \quad \forall y \in Y \quad (2.4)$$

gilt.

b) Ein quasimonotoner Operator  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, W)$  mit  $W \in \{Y^*, X\}$  heißt **maximal** bzgl.  $W$ , wenn ein  $\lambda > c_{\text{qm}}$  existiert mit  $\text{Bild}(\lambda + \mathcal{S}) = W$ .

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Die Theorie monotoner Operatoren findet sich in [16].

**Lemma 2.4** ([8, Lemma 2.4]). *Für  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$  und seine Einschränkung  $S$  auf  $X$  gilt:*

- a) *Ist  $\mathcal{S}$  quasimonoton mit Konstante  $c_{\text{qm}}$ , dann ist  $-(S + c_{\text{qm}})$  dissipativ.*
- b) *Ist  $\mathcal{S}$  quasimonoton mit Konstante  $c_{\text{qm}}$  und maximal bzgl.  $Y^*$  oder  $X$ , dann erzeugt  $-S$  eine  $C_0$ -Halbgruppe  $(e^{-tS})_{t \geq 0}$  mit  $\|(e^{-tS})_{t \geq 0}\|_{X \leftarrow X} \leq e^{c_{\text{qm}}t}$ .*

*Beweis.* Zu a): Für  $x \in D(S)$  gilt:

$$\begin{aligned} p(-(S + c_{\text{qm}})x, x) &= -p(Sx, x) - c_{\text{qm}}p(x, x) \\ &= -(\langle \mathcal{S}x, x \rangle_Y + c_{\text{qm}}\|x\|_X^2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Zu b): Nach a) ist  $-(S + c_{\text{qm}})$  dissipativ. Da  $\mathcal{S}$  maximal bzgl.  $Y^*$  oder  $X$  ist, existiert ein  $\lambda > c_{\text{qm}}$  mit  $\text{Bild}(\lambda + \mathcal{S}) \supseteq X$  und somit gilt nach Definition des eingeschränkten Operators  $\text{Bild}(\lambda + S) = X$ .

Als nächstes zeigen wir, dass  $D(S)$  dicht in  $X$  liegt. Hierzu sei  $z \in D(S)^\perp$ . Wegen  $\text{Bild}(\lambda + S) = X$  existiert ein  $x \in D(S)$  mit  $(\lambda + S)x = z$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= p(z, x) = p((\lambda + S)x, x) \\ &= p(Sx, x) + c_{\text{qm}}\|x\|_X^2 + (\lambda - c_{\text{qm}})\|x\|_X^2 \geq (\lambda - c_{\text{qm}})\|x\|_X^2, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass  $-(S + c_{\text{qm}})$  nach a) dissipativ ist. Aus der Gleichung folgt wegen  $(\lambda - c_{\text{qm}}) > 0$ , dass  $x = 0$  und somit auch  $z = 0$  gelten muss. Damit ist  $D(S)^\perp = \{0\}$  und  $D(S)$  liegt dicht in  $X$ .

Mit dem Satz von Lumer-Phillips (Satz A.5) folgt, dass  $-(S + c_{\text{qm}})$  eine kontraktive  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt, somit erzeugt auch  $-S$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit  $e^{-tS} = e^{tc_{\text{qm}}}e^{-t(S+c_{\text{qm}})}$  und daraus folgt die Behauptung. □

**Satz 2.5** (Globale Wohlgestellttheit). *Es sei  $g \in C^1([0, T] \times X; X)$  global Lipschitzstetig auf  $X$ . Ferner sei  $-S$  der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(e^{-tS})_{t \geq 0}$  auf  $X$  mit  $\|e^{-tS}\|_{X \leftarrow X} \leq e^{c_{\text{qm}}t}$  für alle  $t \geq 0$ . Dann ist (2.2) global wohlgestellt.*

*Beweis.* Der Beweis besteht aus drei Schritten, vgl. [13, Kapitel 6; Theorem 1.2, Theorem 1.5].

### 1) Existenz und Eindeutigkeit milder Lösungen

Definiere den Operator  $F: C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$  durch

$$(Fx)(t) := e^{-tS}x^0 + \int_0^t e^{-(t-s)S}g(s, x(s)) \, ds. \quad (2.5)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Offensichtlich gilt:

$$x \text{ ist milde Lösung von (2.2)} \iff x \text{ ist Fixpunkt von } F.$$

Der Raum  $(C([0, T]; X), \|\cdot\|_{L^\infty([0, T]; X)})$  ist ein Banachraum. Es gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|(F^n x)(t) - (F^n y)(t)\|_X &\leq \int_0^t \|e^{-(t-t_1)S} [g(s, (F^{n-1}x)(t_1)) - g(s, (F^{n-1}y)(t_1))]\|_X dt_1 \\ &\leq e^{c_{\text{qm}}t} L \int_0^t \|(F^{n-1}x)(t_1) - (F^{n-1}y)(t_1)\|_X dt_1 \\ &\leq \dots \\ &\leq e^{nc_{\text{qm}}t} L^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \|x(t_n) - y(t_n)\|_X dt_1 \dots dt_n \\ &\leq e^{nc_{\text{qm}}t} L^n \frac{t^n}{n!} \|x - y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \end{aligned}$$

und somit

$$\|F^n x - F^n y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq \frac{(e^{c_{\text{qm}}T} LT)^n}{n!} \|x - y\|_{L^\infty([0, T]; X)}.$$

Sei  $n$  so groß, dass  $\frac{(e^{c_{\text{qm}}T} LT)^n}{n!} < 1$  gilt. Dann ist  $F^n$  eine Kontraktion auf  $C([0, T]; X)$  und besitzt somit einen eindeutigen Fixpunkt  $x^* \in C([0, T]; X)$ . Es gilt

$$Fx^* = F(F^n x^*) = F^n(Fx^*),$$

also ist  $Fx^*$  ebenfalls ein Fixpunkt von  $F^n$ . Wegen der Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt  $Fx^* = x^*$  und  $x := x^*$  ist ebenfalls ein Fixpunkt von  $F$  und somit eine milde Lösung von (2.2). Gäbe es eine weitere milde Lösung  $y$ , so wäre  $y$  ebenfalls ein Fixpunkt von  $F$  und somit auch von  $F^n$ , dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Fixpunktes.

Insgesamt besitzt (2.2) also eine eindeutige milde Lösung  $x$ .

**Bemerkung:** Analog sieht man, dass allgemeine Integralgleichungen der Form

$$w(t) = u(t) + \int_0^t e^{-(t-s)S} f(s, w(s)) ds, \quad (2.6)$$

mit  $u \in C([0, T]; X)$  und  $f: [0, T] \times X \rightarrow X$  stetig in der ersten und global Lipschitzstetig in der zweiten Komponente, eine eindeutige Lösung  $w \in C([0, T]; X)$  besitzen.

### II) Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert

Seien  $x, y: [0, T] \rightarrow X$  milde Lösungen von (2.2) zu Anfangswerten  $x^0$  bzw.  $y^0$ . Dann gilt nach Definition der milden Lösung:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\|_X &\leq \|e^{-tS}(x^0 - y^0)\|_X + \int_0^t \|e^{-(t-s)S}(g(x(s)) - g(y(s)))\|_X ds \\ &\leq e^{c_{\text{qm}}t} \|x^0 - y^0\|_X + Le^{c_{\text{qm}}t} \int_0^t e^{-c_{\text{qm}}s} \|x(s) - y(s)\|_X ds \end{aligned}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Dividieren der Gleichung durch  $e^{c_{\text{qm}}t}$  liefert

$$e^{-c_{\text{qm}}t} \|x(t) - y(t)\|_X \leq \|x^0 - y^0\|_X + L \int_0^t e^{-c_{\text{qm}}s} \|x(s) - y(s)\|_X ds.$$

Anwenden der Gronwall-Ungleichung aus Satz A.8 mit  $\Phi(t) = e^{-c_{\text{qm}}t} \|x(t) - y(t)\|_X$  ergibt schließlich

$$\begin{aligned} e^{-c_{\text{qm}}t} \|x(t) - y(t)\|_X &\leq e^{Lt} \|x^0 - y^0\|_X \\ \iff \|x(t) - y(t)\|_X &\leq e^{(L+c_{\text{qm}})t} \|x^0 - y^0\|_X, \end{aligned}$$

und damit die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert:

$$\|x - y\|_{L^\infty([0,T];X)} \leq e^{(L+c_{\text{qm}})T} \|x^0 - y^0\|_X.$$

### III) Milde Lösungen sind klassische Lösungen

Es sei  $x$  die eindeutige milde Lösung von (2.2), wir zeigen, dass  $x$  auch eine klassische Lösung ist.

Die Ableitung einer Funktion nach dem  $i$ -ten Argument wird mit  $\partial_i$  bezeichnet. Wir definieren

$$\begin{aligned} u(t) &:= -S e^{-tS} x^0 + e^{-tS} g(0, x^0) + \int_0^t e^{-(t-s)S} \partial_1 g(s, x(s)) ds, \\ f(t, w) &:= \partial_2 g(t, x(t)) w, \\ (Gw)(t) &:= u(t) + \int_0^t e^{-(t-s)S} f(s, w(s)) ds, \end{aligned}$$

hierbei gilt

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T]; X), \\ f &: [0, T] \times X \rightarrow X, \\ G &: C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X). \end{aligned}$$

Angenommen  $x \in C^1([0, T]; X)$  wäre eine klassische Lösung. Dann gilt wegen den Voraussetzungen  $x^0 \in D(S)$  und  $g \in C^1([0, T] \times X; X)$  mit der Ableitungsregel für Halb-

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

gruppen aus Lemma A.3:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{d}{dt} \left( e^{-tS} x^0 + \int_0^t e^{-(t-s)S} g(s, x(s)) ds \right) \\
&= -S e^{-tS} x^0 + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t e^{-sS} g(t-s, x(t-s)) ds \right) \\
&= -S e^{-tS} x^0 + e^{-tS} g(0, x^0) + \int_0^t e^{-sS} \partial_1 g(t-s, x(t-s)) ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-sS} \partial_2 g(t-s, x(t-s)) x'(t-s) ds \\
&= -S e^{-tS} x^0 + e^{-tS} g(0, x^0) + \int_0^t e^{-(t-s)S} \partial_1 g(s, x(s)) ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-s)S} \partial_2 g(s, x(s)) x'(s) ds \\
&= u(t) + \int_0^t e^{-(t-s)S} f(s, x'(s)) ds \\
&= (G(x'))(t)
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei zweimal die Substitution  $s = t - s$  benutzt.

In  $t$  ist  $f$  stetig und wegen

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_X \leq \underbrace{\|\partial_2 g(t, x(t))\|_{L^\infty([0, T]; X)}}_{< \infty} \|v - w\|_X$$

global Lipschitz-stetig bezüglich dem zweiten Argument. Daher folgt mit der Bemerkung bei (2.6), dass  $G$  einen eindeutigen Fixpunkt  $w \in C([0, T]; X)$  besitzt. Wir rechnen nach, dass  $w$  die Ableitung von  $x$  ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau} (x(t+\tau) - x(t)) - w(t) \\
&= \underbrace{\left[ \frac{1}{\tau} (e^{-(t+\tau)S} x^0 - e^{-tS} x^0) + S e^{-tS} x^0 \right]}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0} \\
&\quad + \int_0^t e^{-sS} \left[ \frac{1}{\tau} (g(t+\tau-s, x(t+\tau-s)) - g(t-s, x(t-s))) \right. \\
&\quad \quad \left. - (\partial_1 g(t-s, x(t-s)) - \partial_2 g(t-s, x(t-s))) w(t-s) \right] ds \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} e^{-sS} g(t+\tau-s, x(t+\tau-s)) ds - e^{-tS} g(0, x_0)}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0}
\end{aligned}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Das mittlere Integral wird weiter abgeschätzt. Nach erneuter Substitution  $s = t - s$  ergibt sich hierfür:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \frac{1}{\tau} (g(s + \tau, x(s + \tau)) - g(s, x(s))) \frac{1}{\tau} - (\partial_1 g(s, x(s)) - \partial_2 g(s, x(s))) w(s) \right] ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)S} \underbrace{\left[ \frac{1}{\tau} (g(s + \tau, x(s + \tau)) - g(s, x(s + \tau))) - \partial_1 g(s, x(s + \tau)) \right]}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0} ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \frac{1}{\tau} (g(s, x(s + \tau)) - g(s, x(s))) - \partial_2 g(s, x(s)) w(s) \right] ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-s)S} \underbrace{[\partial_1 g(s, x(s + \tau)) - \partial_1 g(s, x(s))]}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0} ds
\end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte gelten für alle  $s \in [0, t]$ . Wegen der Stetigkeit der Funktionen und Kompaktheit von  $[0, t]$  konvergieren damit auch die Integrale gegen 0 für  $\tau \rightarrow 0$ . Übrig bleibt erneut nur das mittlere Integral. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$g(s, x(s + \tau)) - g(s, x(s)) = \int_0^1 [\partial_2 g(s, x(s) + \xi(x(s + \tau) - x(s)))] (x(s + \tau) - x(s)) d\xi$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \frac{1}{\tau} (g(s, x(s + \tau)) - g(s, x(s))) - \partial_2 g(s, x(s)) w(s) \right] ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \int_0^1 [\partial_2 g(s, x(s) + \xi(x(s + \tau) - x(s)))] \left( \frac{1}{\tau} (x(s + \tau) - x(s)) - w(s) \right) d\xi \right] ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \int_0^1 \underbrace{[\partial_2 g(s, x(s) + \xi(x(s + \tau) - x(s))) - \partial_2 g(s, x(s))]}_{\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0} w(s) d\xi \right] ds
\end{aligned}$$

Da der Grenzwert im zweiten Integral für alle  $s \in [0, t], \xi \in [0, 1]$  gilt, konvergiert auch die gesamte letzte Zeile gegen 0 für  $\tau \rightarrow 0$ . Alles wieder eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau} (x(t + \tau) - x(t)) - w(t) \\
&= \varepsilon(\tau) + \int_0^t e^{-(t-s)S} \left[ \int_0^1 [\partial_2 g(s, x(s) + \xi(x(s + \tau) - x(s)))] \left( \frac{1}{\tau} (x(s + \tau) - x(s)) - w(s) \right) d\xi \right] ds
\end{aligned}$$

mit  $\varepsilon(\tau) \in X$  und  $\varepsilon(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ . Die Halbgruppe und  $\partial_2 g$  sind beschränkt, somit erhalten wir für  $\tau < \tilde{\tau}$  hinreichend klein

$$\left\| \frac{1}{\tau} (x(t + \tau) - x(t)) - w(t) \right\|_X \leq \|\varepsilon(\tau)\|_X + C \int_0^t \left\| \frac{1}{\tau} (x(s + \tau) - x(s)) - w(s) \right\|_X ds$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

mit

$$C = \max_{\tau \in [0, \bar{\tau}]} \max_{s \in [0, T]} \max_{\xi \in [0, 1]} \|e^{-(t-s)S} [\partial_2 g(s, x(s) + \xi(x(s+\tau) - x(s)))]\|_{\mathcal{L}(X, X)} < \infty.$$

Anwendung der Gronwall-Ungleichung aus Satz A.8 liefert schließlich:

$$\left\| \frac{1}{\tau} (x(t+\tau) - x(t)) - w(t) \right\|_X \leq \|\varepsilon(\tau)\|_X e^{CT} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

Somit ist  $x \in C^1([0, T]; X)$  mit Ableitung  $x' = w$ .

Abschließend bleibt zu zeigen, dass  $x$  auch eine klassische Lösung ist. Definiere

$$y(t) := e^{-tS} x^0 + \int_0^t e^{-(t-s)S} g(s, x(s)) ds$$

Da  $x \in C^1([0, T]; X)$  gilt, ist auch  $s \mapsto g(s, x(s))$  differenzierbar und somit ist  $y$  nach Satz A.7 eine klassische Lösung von

$$y'(t) + Sy(t) = g(t, x(t)) \quad \text{für } t \in [0, T], \quad (2.7a)$$

$$y(0) = x^0. \quad (2.7b)$$

Da  $x$  ebenfalls eine milde Lösung von (2.7) ist, gilt wegen der Eindeutigkeit der milden Lösung  $x = y$ . Somit ist  $x$  eine klassische Lösung von (2.7) und damit auch von (2.2).  $\square$

Unter lokaler Lipschitz-Bedingung ist (2.2) lokal wohlgestellt:

**Satz 2.6** (Lokale Wohlgestellttheit). *Sei  $g \in C^1([0, \infty) \times X; X)$  lokal Lipschitz-stetig auf  $X$  mit Konstante  $L_{t_0, M}$ . Ferner sei  $-S$  der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(e^{-tS})_{t \geq 0}$  auf  $X$  mit  $\|e^{-tS}\|_{X \leftarrow X} \leq e^{c_{\text{qm}} t}$  für alle  $t \geq 0$ . Dann ist (2.2) im Sinne von Definition 2.2 d) lokal wohlgestellt. Außerdem gilt falls  $t^*(x^0) < \infty$ :*

$$\lim_{t \nearrow t^*(x^0)} \|x(t)\|_X = \infty. \quad (2.8)$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass ein  $t_0$  existiert, sodass (2.2) eine eindeutige klassische Lösung auf  $[0, t_0]$  besitzt. Setze

$$M := 2\|x^0\|_X, \\ N := \sup_{s \in [0, 1]} \|g(s, 0)\|_X.$$

Dann gilt für  $F$  definiert in (2.5),  $t_0 \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, t_0]$  und  $x \in C([0, t_0]; X)$  mit

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

$\|x\|_{L^\infty([0,T];X)} \leq M$ :

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t)\|_X &\leq e^{c_{\text{qm}}t} \|x^0\|_X + e^{c_{\text{qm}}t} t \sup_{s \in [0,t]} \|g(s, x(s))\|_X \\
&\leq e^{c_{\text{qm}}t} \frac{M}{2} + e^{c_{\text{qm}}t} t \sup_{s \in [0,t]} \|g(s, x(s)) - g(s, 0)\|_X + e^{c_{\text{qm}}t} t \sup_{s \in [0,t]} \|g(s, 0)\|_X \\
&\leq e^{c_{\text{qm}}t} \frac{M}{2} + e^{c_{\text{qm}}t} t L_{M,1} \sup_{s \in [0,t]} \|x(s)\|_X + e^{c_{\text{qm}}t} t N \\
&\leq e^{c_{\text{qm}}t} \frac{M}{2} + e^{c_{\text{qm}}t} t L_{M,1} M + e^{c_{\text{qm}}t} t N \\
&\leq e^{c_{\text{qm}}t} \left( \frac{M}{2} + t(L_{M,1}M + N) \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{M}{2}.
\end{aligned}$$

Also existiert ein  $t_0 \leq 1$  sodass

$$\|(Fx)(t)\|_X \leq M \quad \text{für alle } t \in [0, t_0]$$

oder anders ausgedrückt,  $F$  bildet  $B(0, M) \subset C([0, t_0]; X)$  in sich selber ab. Außerdem ist  $g$  global Lipschitz-stetig auf dieser Kugel mit Konstante  $L_{M,1}$ . Wie im Beweis von Satz 2.5 Schritt I) lässt sich zeigen, dass  $F$  einen eindeutigen Fixpunkt auf  $B(0, M) \subset C([0, t_0]; X)$  besitzt, also dass (2.2) auf  $[0, t_0]$  eine eindeutige milde Lösung  $x$  in  $B(0, M) \subset C([0, t_0]; X)$  besitzt.

**Bemerkung:** Man sieht an der Rechnung, dass  $t_0$  hierbei nur von  $\|x^0\|_X$ ,  $\sup_{s \in [0,1]} \|g(s, 0)\|_X$ ,  $L_{M,1}$  und  $c_{\text{qm}}$  abhängt.

Setze

$$t^*(x^0) := \sup\{t > 0 \mid (2.2) \text{ mit AW } x^0 \text{ besitzt eine eindeutige milde Lösung auf } [0, t]\}.$$

Nach dem eben Gezeigten ist diese Menge nicht leer und  $t^*(x^0) \in [t_0, \infty]$  ist wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass (2.8) gilt, falls  $t^*(x^0) < \infty$  ist. Angenommen,  $t^*(x^0) < \infty$  und (2.8) gilt nicht. Dann existiert ein  $C > 0$  und eine Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $t_i \nearrow t^*(x^0)$  für  $i \rightarrow \infty$  und  $\|x(t_i)\|_X \leq C$ .

Damit  $x$  für  $\delta > 0$  eine milde Lösung auf  $[0, t_i + \delta]$  ist, muss für  $\tau \in [0, \delta]$  gelten:

$$\begin{aligned}
x(t_i + \tau) &= e^{-tS} x^0 + \int_0^{t_i + \tau} e^{-(t-s)S} g(s, x(s)) ds \\
&= e^{-tS} x^0 + \int_0^{t_i} e^{-(t-s)S} g(s, x(s)) ds + \int_{t_i}^{t_i + \tau} e^{-(t-s)S} g(s, x(s)) ds \\
&= x(t_i) + \int_0^\tau e^{-(t_i + t - s)S} g(t_i + s, x(t_i + s)) ds,
\end{aligned}$$

bzw. mit  $\tilde{x}_i(\tau) := x(t_i + \tau)$  und  $\tilde{g}_i(t, x) = e^{t_i S} g(t_i + t, x)$

$$\tilde{x}_i(\tau) = x(t_i) + \int_0^\tau e^{-(t-s)S} \tilde{g}_i(s, \tilde{x}_i(s)) ds. \quad (2.9)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Dies ist die Integralformulierung einer nichtlinearen Evolutionsgleichung mit einem lokal Lipschitz-stetigen  $\tilde{g}_i \in C^1([0, \infty) \times X; X)$ . Also existiert mit dem bisher Gezeigten ein  $\delta_i > 0$  und  $\tilde{x}_i \in C([0, \delta_i]; X)$  sodass (2.9) für alle  $\tau \in [0, \delta_i]$  erfüllt ist und  $x$  lässt sich somit zu einer milden Lösung auf  $[0, t_i + \delta_i]$  fortsetzen für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Es gilt für alle  $i \in \mathbb{N}$ :

$$\|x(t_i)\|_X \leq C, \\ \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} \|\tilde{g}_i(s, 0)\|_X \leq e^{c_{\text{qm}}(t^*(x^0)+1)} \sup_{s \in [0, t^*(x^0)+1]} \|g(s, 0)\|_X$$

und die lokale Lipschitz-Konstante von  $\tilde{g}_i$  hängt nur von  $c_{\text{qm}}$  und der Lipschitzkonstante von  $g$  ab. Also kann für alle  $t_i$  das gleiche  $\delta > 0$  gewählt werden. Für  $N \in \mathbb{N}$  mit  $t^*(x^0) - t_N \leq \delta$  kann  $x$  somit über  $t^*(x^0)$  hinaus zu einer milden Lösung von (2.2) fortgesetzt werden im Widerspruch zur Definition von  $t^*(x^0)$ . Also gilt

$$\lim_{t \nearrow t^*(x^0)} \|x(t)\|_X = \infty$$

falls  $t^*(x^0) < \infty$ .

Ist  $x$  eine milde Lösung zum Anfangswert  $x^0$  und  $y$  zum Anfangswert  $y^0$  auf  $[0, T]$  mit

$$T < \min\{t^*(x^0), t^*(y^0)\} \quad \text{und} \\ \|x\|_{L^\infty([0, T]; X)}, \|y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq M$$

für ein  $M > 0$ , so erhält man wie im Beweis von Satz 2.5 Abschnitt II) aus der Variationder-Konstanten Formel

$$\|x - y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq e^{(LT, M + c_{\text{qm}})T} \|x^0 - y^0\|_X, \quad (2.10)$$

also die stetige Abhängigkeit vom Anfangswert. Außerdem liefert dies die Eindeutigkeit der milden Lösung, denn ist  $x^0 = y^0$  so folgt aus (2.10)

$$\|x - y\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq 0.$$

Sei nun  $T < t^*(x^0)$  beliebig und  $x \in C([0, T]; X)$  die eindeutige milde Lösung von (2.2). Wie im Beweis von Satz 2.5 Abschnitt III) folgt, dass  $x$  auf  $[0, T]$  auch eine klassische Lösung ist, dort geht an keiner Stelle die globale Lipschitz-Stetigkeit von  $g$  ein.

□

## 2.2. Analyse abstrakter Semidiskretisierungen

Es seien  $X, Y, g$  und  $S$  definiert wie im vorherigen Abschnitt.

In diesem Abschnitt wird eine Fehlerabschätzung für allgemeine Finite Elemente Semidiskretisierungen von (2.2) hergeleitet. Es wird dabei auf [8] aufgebaut, wo allgemeine Semidiskretisierungen linearer Evolutionsgleichungen untersucht werden. Die dortigen Resultate werden auf den semilinearen Fall erweitert.

## Notationen und Definitionen

Mit einem Diskretisierungsparameter  $h > 0$  betrachten wir Semidiskretisierungen folgender allgemeiner Form:

- Der Finite Elemente Raum  $(X_h, p_h(\cdot, \cdot))$  sei ein endlichdimensionaler Hilbertraum,
- $S_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$  sei eine Diskretisierung von  $S$ ,
- $g_h: [0, T] \times X_h \rightarrow X_h$  sei eine Diskretisierung der Nichtlinearität  $g$ ,
- $s_h$  sei die zu  $S_h$  assoziierte Bilinearform, d.h.  $s_h(x_h, y_h) = p_h(S_h x_h, y_h)$  für alle  $x_h, y_h \in X_h$ ,
- $x_h^0$  sei eine Approximation an  $x^0$ .

Dann bezeichnet  $x_h: [0, T] \rightarrow X_h$  die Approximation der unbekanntten Lösung  $x$  von (2.2) und ist bestimmt durch die semidiskretisierte Gleichung

$$x_h'(t) + S_h x_h(t) = g_h(t, x_h(t)) \quad \text{für } t \in [0, T], \quad (2.11a)$$

$$x_h(0) = x_h^0 \in X_h. \quad (2.11b)$$

**Definition 2.7** (Konforme/Nichtkonforme Diskretisierung, [8]). *Wir nennen die Diskretisierung (2.11) von (2.2) **konform**, wenn folgende 3 Bedingungen erfüllt sind:*

- $X_h \subset Y$ ,
- $p_h(x_h, y_h) = p(x_h, y_h)$  für alle  $x_h, y_h \in X_h$ ,
- $s_h(x_h, y_h) = s(x_h, y_h)$  für alle  $x_h, y_h \in X_h$ .

*Diskretisierungen, die mindestens eine der Bedingungen verletzen, heißen **nichtkonform**.*

In der abstrakten Fehleranalyse in dieser Arbeit sind nichtkonforme Semidiskretisierungen zugelassen. In diesem Fall benötigen wir einen injektiven Liftoperator

$$Q_h \in \mathcal{L}(X_h; X),$$

um die numerische Approximation mit der exakten Lösung vergleichen zu können. Mit

$$X_h^l := Q_h(X_h) \subset X$$

wird der geliftete Finite Elemente Raum bezeichnet.

**Definition 2.8** (Räume und Operatoren für die Fehleranalyse).  $Z \xrightarrow{d} X$  sei ein dichter Unterraum von  $X$ .

*Folgende Operatoren werden für die allgemeine Fehleranalyse benötigt:*

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

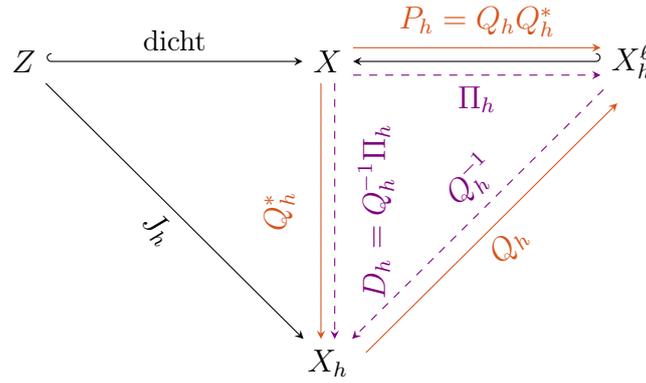


Abbildung 1: Räume und Operatoren in der Semidiskretisierung

- Es sei  $J_h \in \mathcal{L}(Z; X_h)$  mit

$$\|J_h\|_{X_h \leftarrow Z} \leq C_{J_h} \quad (2.12)$$

für ein  $C_{J_h} > 0$  unabhängig von  $h$ . Diesen Operator bezeichnen wir im Folgenden als Referenzoperator.

- $\Pi_h: X \rightarrow X_h^l$  sei die  $X$ -Orthogonalprojektion auf den gelifteten Finite Elemente Raum.
- $Q_h^*: X \rightarrow X_h$  sei die Adjungierte zum Liftoperator, d.h.

$$p_h(Q_h^* x, y_h) = p(x, Q_h y_h) \text{ für alle } x \in X, y_h \in X_h.$$

- $R_h := Q_h^* S - S_h J_h: D(S) \cap Z \rightarrow X_h$  sei der Fehleroperator des linearen Terms.
- $r_h: [0, T] \times Z \rightarrow X_h$  definiert durch

$$r_h(t, x) := Q_h^* g(t, x) - g_h(t, J_h x)$$

bezeichnet den Diskretisierungsfehler der Nichtlinearität.

Der Referenzoperator  $J_h$  sowie  $Z$  müssen für konkrete Beispiele „passend“ gewählt werden. Weiterhin werden für die Fehleranalyse noch folgende Abbildungen benötigt:

- $D_h := Q_h^{-1} \Pi_h: X \rightarrow X_h$ ,
- $P_h := Q_h Q_h^*: X \rightarrow X_h^l$ .

Abbildung 1 veranschaulicht die Beziehungen und Operatoren zwischen den abstrakten Räumen.

### Abstrakte Fehleranalyse

Wir stellen folgende Bedingungen an die Semidiskretisierung:

**Annahme 2.9** (Stabilität).

1)  $S_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$  ist quasimonoton in  $X_h$ , d.h. es existiert ein  $\widehat{c}_{\text{qm}} \geq 0$  mit

$$p_h(S_h x_h, x_h) + \widehat{c}_{\text{qm}} \|x_h\|_{X_h}^2 \geq 0 \text{ f\u00fcr alle } x_h \in X_h.$$

2) Es existieren  $C_{X_h, X} > c_{X_h, X} > 0$  unabh\u00e4ngig von  $h$  mit

$$c_{X_h, X} \|Q_h x_h\|_X \leq \|x_h\|_{X_h} \leq C_{X_h, X} \|Q_h x_h\|_X \text{ f\u00fcr alle } x_h \in X_h. \quad (2.13)$$

Wie in dem analytischen Abschnitt wird die Fehleranalyse f\u00fcr die FE-Semidiskretisierung (2.11) von (2.2) in zwei Schritten durchgef\u00fchrt. Zuerst unter einer globalen Lipschitz-Bedingung an  $g_h$ , dann ohne.

**Fehleranalyse unter globaler Lipschitz-Bedingung an  $g_h$**  Ist  $g_h$  global Lipschitzstetig auf  $X_h$ , so ist (2.11) als gew\u00f6hnliche Differentialgleichung nach dem Satz von Picard-Lindel\u00f6f global wohlgestellt, d.h. f\u00fcr beliebiges  $x_h^0 \in X_h$  besitzt (2.11) eine eindeutige klassische L\u00f6sung  $x_h$ . F\u00fcr die L\u00f6sung der semidiskreten Gleichung gilt dann folgende Fehlerabsch\u00e4tzung:

**Satz 2.10** (Abstraktes Fehlerresultat unter globaler Lipschitz-Bedingung). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.6 und es sei  $T < t^*(x^0)$ . Weiter sei  $x$  die eindeutige L\u00f6sung von (2.2) mit  $x \in C^1([0, T]; Z)$ . Es gelte ferner Annahme 2.9,  $g_h$  sei global Lipschitzstetig auf  $X_h$  mit Konstante  $\widehat{L}$  und  $x_h$  bezeichne die semidiskrete L\u00f6sung von (2.11). Dann gilt f\u00fcr die geliftete semidiskrete L\u00f6sung folgende Fehlerabsch\u00e4tzung:*

$$\begin{aligned} \|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X &\leq C e^{(\widehat{L} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} \left( \|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h} + t \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} \right. \\ &\quad \left. + t \|R_h x\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} + t \|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} \right) \\ &\quad + \|(I - Q_h J_h)x(t)\|_X \end{aligned} \quad (2.14)$$

f\u00fcr alle  $t \in [0, T]$ .

*Beweis.* Der Beweis orientiert sich an [8, Theorem 2.9]. Wir definieren  $e_h = x_h - J_h x$  als diskreten Fehler. Dies ist der Fehler zwischen der numerischen und der mit dem Referenzoperator abgebildeten exakten L\u00f6sung, welcher n\u00e4her untersucht werden muss. Der gesamte Fehler l\u00e4sst sich n\u00e4mlich aufsplitten zu

$$Q_h x_h - x = Q_h e_h + (Q_h J_h - I)x,$$

somit gilt

$$\begin{aligned} \|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X &\leq \|Q_h e_h\|_X + \|(Q_h J_h - I)x\|_X \\ &\leq \frac{1}{c_{X_h, X}} \|e_h\|_{X_h} + \|(Q_h J_h - I)x\|_X, \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

wobei in der zweiten Abschätzung (2.13) verwendet haben.

Für  $e_h$  wird eine Fehlergleichung hergeleitet: Wegen  $X_h^l \subset X$  folgt aus der variationellen Formulierung von (2.2)

$$\begin{aligned} p(x'(t), Q_h y_h) + s(x(t), Q_h y_h) &= p(g(t, x(t)), Q_h y_h) && \text{für alle } y_h \in X_h, \\ \Leftrightarrow p_h(Q_h^* x'(t), y_h) + p_h(Q_h^* S x(t), y_h) &= p_h(Q_h^* g(t, x(t)), y_h) && \text{für alle } y_h \in X_h, \end{aligned}$$

wobei die Definition von  $Q_h^*$  ausgenutzt wurde. Einfügen von Termen und umordnen liefert

$$\begin{aligned} p_h(J_h x'(t), y_h) + s_h(J_h x(t), y_h) &= p_h((J_h - Q_h^*)x'(t), y_h) + p_h((S_h J_h - Q_h^* S)x(t), y_h) \\ &\quad + p_h(Q_h^* g(t, x(t)), y_h) \end{aligned} \tag{2.16}$$

für alle  $y_h \in X_h$ .

Die variationelle Formulierung der semidiskreten Gleichung liest sich

$$p_h(x'_h(t), y_h) + s_h(x_h(t), y_h) = p_h(g_h(t, x_h(t)), y_h) \quad \text{für alle } y_h \in X_h. \tag{2.17}$$

Wegen  $x \in C^1([0, T]; Z)$  und  $J_h \in \mathcal{L}(Z; X_h)$  gilt  $e_h \in C^1([0, T]; X_h)$  mit  $e'_h = x'_h - J_h x'$ . Subtrahieren wir (2.16) von (2.17) erhalten wir damit für den diskreten Fehler folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} p_h(e'_h(t), y_h) + s_h(e_h(t), y_h) &= -p_h((J_h - Q_h^*)x'(t), y_h) + p_h(R_h x(t), y_h) \\ &\quad + p_h(g_h(t, x_h(t)) - Q_h^* g(t, x(t)), y_h) \end{aligned}$$

für alle  $y_h \in X_h$ , bzw.

$$e'_h(t) + S_h e_h(t) = (Q_h^* - J_h)x'(t) + R_h x(t) + g_h(t, x_h(t)) - Q_h^* g(t, x(t)).$$

Nach den Voraussetzungen ist die rechte Seite

$$f(t) := (Q_h^* - J_h)x'(t) + R_h x(t) + g_h(t, x_h(t)) - Q_h^* g(t, x(t))$$

für  $t \in [0, T]$  wohldefiniert und es gilt mit der Variation der Konstanten Formel und Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|e_h(t)\|_{X_h} &\leq \|e^{-tS_h} e_h(0)\|_{X_h} + \int_0^t \|e^{-(t-s)S_h} f(s)\|_{X_h} ds \\ &\leq e^{\hat{c}_{\text{qm}} t} \|e_h(0)\|_{X_h} + e^{\hat{c}_{\text{qm}} t} \int_0^t e^{-\hat{c}_{\text{qm}} s} \|f(s)\|_{X_h} ds, \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{-\hat{c}_{\text{qm}} t} \|e_h(t)\|_{X_h} \leq \|e_h(0)\|_{X_h} + \int_0^t e^{-\hat{c}_{\text{qm}} s} \|f(s)\|_{X_h} ds.$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Es gilt

$$\|f(s)\|_{X_h} \leq \|(Q_h^* - J_h)x'(s)\|_{X_h} + \|R_h x(s)\|_{X_h} + \|g_h(s, x_h(s)) - Q_h^* g(s, x(s))\|_{X_h}$$

und unter Ausnutzung der Lipschitz-Stetigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|g_h(s, x_h(s)) - Q_h^* g(s, x(s))\|_{X_h} \\ & \leq \|g_h(s, J_h x(s)) - Q_h^* g(s, x(s))\|_{X_h} + \|g_h(s, x_h(s)) - g_h(s, J_h x(s))\|_{X_h} \\ & \leq \|r_h(s, x(s))\|_{X_h} + \widehat{L} \|e_h(s)\|_{X_h} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die obige Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} & e^{-\widehat{c}_{\text{qm}} t} \|e_h(t)\|_{X_h} \\ & \leq \|e_h(0)\|_{X_h} + \left[ \int_0^t \overset{\leq 1}{e^{-\widehat{c}_{\text{qm}} s}} \left( \|(Q_h^* - J_h)x'(s)\|_{X_h} + \|R_h x(s)\|_{X_h} + \|r_h(s, x(s))\|_{X_h} \right) \right] \\ & \quad + \widehat{L} \int_0^t e^{-\widehat{c}_{\text{qm}} s} \|e_h(s)\|_{X_h} \, ds \\ & \leq \|e_h(0)\|_{X_h} + t \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} + t \|R_h x\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} \\ & \quad + t \|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} + \widehat{L} \int_0^t e^{-\widehat{c}_{\text{qm}} s} \|e_h(s)\|_{X_h} \, ds. \end{aligned}$$

Anwenden der Gronwall-Ungleichung aus Satz A.8 mit  $\Phi(t) = e^{-\widehat{c}_{\text{qm}} t} \|e_h(t)\|_{X_h}$  und Multiplikation mit  $e^{\widehat{c}_{\text{qm}} t}$  liefert

$$\begin{aligned} \|e_h(t)\|_{X_h} & \leq e^{(\widehat{L} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} \left( \|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h} + t \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} \right. \\ & \quad \left. + t \|R_h x\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} + t \|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0, T]; X_h)} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (2.15) die Behauptung. □

Nun zeigen wir unter geeigneten Stabilitätsannahmen die Konvergenz der Diskretisierung gegen die exakte Lösung, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X = 0.$$

Dafür verwenden wir die Notation

$$\Delta p(x_h, y_h) = p(Q_h x_h, Q_h y_h) - p_h(x_h, y_h) \text{ für } x_h, y_h \in X_h$$

und für  $x_h \in X_h$  definieren wir  $\Delta p(x_h) \in X_h^*$  durch

$$[\Delta p(x_h)](y_h) = \Delta p(x_h, y_h) \text{ für alle } y_h \in X_h.$$

**Annahme 2.11** (Konsistenz). *Es gelte:*

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

- 1) Für alle  $x_h \in X_h$ :  $\|\Delta p(x_h)\|_{X_h^*} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- 2) Für alle  $x \in D(S) \cap Z$ :  $\|R_h x\|_{X_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- 3) Für alle  $t \in [0, T]$ ,  $x \in Z$ :  $\|r_h(t, x)\|_{X_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- 4) Für alle  $x \in Z$ :  $\|(I - Q_h J_h)x\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- 5)  $\|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

**Lemma 2.12** (Quasioptimalität von  $P_h$ , [8, Lemma 2.11]). *Es gelte Annahme 2.9 2) Dann gilt für alle  $x \in X$*

$$\|(P_h - \Pi_h)x\|_X \leq C_{X_h, X} \|\Delta p(Q_h^* x)\|_{X_h^*}.$$

*Beweis.* Mit  $\Pi_h$  und  $D_h$  aus Definition 2.8 gilt

$$\begin{aligned} \|(P_h - \Pi_h)x\|_X^2 &= p((P_h - \Pi_h)x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) \\ &= p(P_h x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) - p(\Pi_h x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) \\ &= p(P_h x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) - p(x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) \\ &= p(Q_h Q_h^* x, Q_h(Q_h^* - D_h)x) - p_h(Q_h^* x, (Q_h^* - D_h)x) \\ &= \Delta p(Q_h^* x, (Q_h^* - D_h)x) \end{aligned}$$

und mit Annahme 2.9 2)

$$\|(P_h - \Pi_h)x\|_X = \|Q_h(Q_h^* - D_h)x\|_X \geq \frac{1}{C_{X_h, X}} \|(Q_h^* - D_h)x\|_{X_h}.$$

Falls  $(Q_h^* - D_h)x = 0$  folgt  $\|(P_h - \Pi_h)x\|_X = 0$  und die Behauptung ist erfüllt. Andernfalls gilt

$$\begin{aligned} \|(P_h - \Pi_h)x\|_X &\leq \|(P_h - \Pi_h)x\|_X^2 \frac{C_{X_h, X}}{\|(Q_h^* - D_h)x\|_{X_h}} \\ &= C_{X_h, X} \frac{\Delta p(Q_h^* x, (Q_h^* - D_h)x)}{\|(Q_h^* - D_h)x\|_{X_h}} \\ &\leq C_{X_h, X} \max_{\|y_h\|_{X_h}=1} \Delta p(Q_h^* x, y_h) = C_{X_h, X} \|\Delta p(Q_h^* x)\|_{X_h^*}. \end{aligned}$$

□

**Satz 2.13** (Konvergenz der Semidiskretisierung unter globaler Lipschitz-Bedingung). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.10 und zusätzlich Annahme 2.11. Außerdem sei die Lipschitz-Konstante  $\widehat{L}$  von  $g_h$  unabhängig von  $h$ . Dann konvergiert die geliftete semidiskrete Lösung gegen die exakte Lösung, d.h.*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X = 0 \text{ für alle } t \in [0, T].$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

*Beweis.* Wir verwenden die Fehlerabschätzung (2.14) aus Satz 2.10 und zeigen, dass dort alle Terme konvergieren. Der einzigen Terme, wessen Konvergenz nicht direkt aus Annahme 2.11 folgt ist

$$\|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0,T];X_h)}.$$

Es gilt für  $z \in Z$  mit (2.13):

$$\begin{aligned} \|(Q_h^* - J_h)z\|_{X_h} &\leq C_{X_h,X} \|(P_h - Q_h J_h)z\|_X \\ &\leq C_{X_h,X} (\|(P_h - I)z\|_X + \|(I - Q_h J_h)z\|_X) \\ &\leq C_{X_h,X} (\|(P_h - \Pi_h)z\|_X + \|(\Pi_h - I)z\|_X + \|(I - Q_h J_h)z\|_X). \end{aligned}$$

Wegen der Bestapproximationseigenschaft von  $\Pi_h$  gilt

$$\|(\Pi_h - I)z\|_X \leq \|(I - Q_h J_h)z\|_X$$

und wegen Annahme 2.11 4)

$$\|(I - Q_h J_h)z\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

$\|(P_h - \Pi_h)z\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  gilt aufgrund von Lemma 2.12.

Somit folgt die Behauptung, da nach Voraussetzung  $x(t), x'(t) \in Z$  für alle  $t \in [0, T]$  gilt und  $e^{(\widehat{L} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} = e^{(\widehat{L} + \widehat{c}_{\text{qm}})t}$  unabhängig von  $h$  ist.  $\square$

**Fehleranalyse unter lokaler Lipschitz-Bedingung an  $g_h$**  Ist die diskretisierte Nichtlinearität  $g_h$  lokal Lipschitz-stetig auf  $X_h$  so folgt aus der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf, dass (2.11) lokal wohlgestellt ist, d.h. für alle  $x_h^0 \in X_h$  existiert ein  $t_h^*(x_h^0)$ , sodass (2.11) für alle  $T < t_h^*(x_h^0)$  eine eindeutige klassische Lösung  $x_h \in C^1([0, T] \times X_h; X_h)$  besitzt.

Das folgende Hauptresultat dieses Kapitels liefert eine Fehlerabschätzung für  $x_h$  und zeigt unter weiteren Voraussetzungen, dass  $t_h^*(x_h^0) > t^*(x^0)$  gilt und der Fehler gegen 0 konvergiert:

**Satz 2.14** (Fehlerabschätzung und Konvergenz unter lokaler Lipschitz-Bedingung). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.6 und Annahme 2.9. Außerdem sei  $g_h$  lokal Lipschitz-stetig auf  $X_h$  mit Konstante  $\widehat{L}_{T,M}$  unabhängig von  $h$ . Die Lösung  $x$  von (2.2) erfülle  $x \in C^1([0, t^*(x^0)]; Z)$  und  $x_h$  bezeichne die Lösung von (2.11).*

a) *Es sei  $T < \min\{t^*(x^0), t_h^*(x_h^0)\}$ . Dann gilt für die geliftete semidiskrete Lösung die Fehlerabschätzung*

$$\|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X \leq C e^{(\widehat{L}_{T,M} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} E_h(t) + \|(I - Q_h J_h)x(t)\|_X \quad (2.18)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

mit

$$E_h(t) := \|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h} + t \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0,T];X_h)} \\ + t \|R_h x\|_{L^\infty([0,T];X_h)} + t \|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0,T];X_h)}$$

für alle  $t \in [0, T]$ . Hierbei ist

$$M_h = \max\{C_{J_h} \|x\|_{L^\infty([0,T];Z)}, \|x_h\|_{L^\infty([0,T];X_h)}\}.$$

b) Es sei  $T < t^*(x^0)$  und  $M := 2C_{J_h} \|x\|_{L^\infty([0,T];Z)}$ . Außerdem gelte

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_h(t) \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (2.19)$$

Dann gibt es ein  $h^* > 0$ , sodass  $x_h$  für alle  $h < h^*$  auf  $[0, T]$  existiert mit

$$\|x_h\|_{L^\infty([0,T];X_h)} \leq M.$$

Außerdem gilt die Fehlerabschätzung (2.18) mit  $M_h = M$ .

Gilt zusätzlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(I - Q_h J_h)x(t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T], \quad (2.20)$$

so konvergiert die geliftete semidiskretisierte Lösung, d.h.

$$\|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad t \in [0, T].$$

**Bemerkung:** Eine hinreichende Bedingung für (2.19) und (2.20) sind die Konsistenzbedingungen aus Annahme 2.11, dies sieht man wie im Beweis von Satz 2.13.

*Beweis. Zu a):* Sowohl  $x$  als auch  $x_h$  existieren auf  $[0, T]$  nach der Wahl  $T$ . Man erhält die Fehlerabschätzung exakt wie in dem Beweis von Satz 2.10, lediglich in dem Schritt bei dem die Lipschitz-Stetigkeit ausgenutzt wird, muss die globale gegen die lokale Lipschitz-Konstante ersetzt werden. Hierfür ist  $M_h$  passend gewählt.

*Zu b):* Definiere

$$T_h := \sup \left\{ t \in (0, t_h^*(x_h^0)) \mid \|x_h\|_{L^\infty([0,T];X_h)} \leq M \right\},$$

als die maximale Zeit, während der die diskrete Lösung in  $X_h$  durch  $M$  beschränkt bleibt. Es gilt  $T_h < t_h^*(x_h^0)$ .

Für alle  $t \leq \min\{T, T_h\}$  gilt mit der Definition von  $M$ :

$$\|x_h(t)\|_{X_h} \leq \|x_h(t) - J_h x(t)\|_{X_h} + \|J_h x(t)\|_{X_h} \\ \leq \|x_h(t) - J_h x(t)\|_{X_h} + \frac{M}{2}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Bei dem ersten Term handelt es sich um  $\|e_h\|_{X_h}$  und somit folgt mit (2.19)

$$\|x_h(t) - J_h x(t)\|_{X_h} \leq C e^{(\widehat{L}_{T,M} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} E_h(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Wegen  $\|x_h(t)\|_{X_h} \rightarrow \frac{M}{2}$  für  $h \rightarrow 0$  existiert somit ein  $h^* > 0$  mit  $\|x_h(t)\|_{X_h} \leq \frac{3}{4}M$  für alle  $h < h^*$  und  $t \leq \min\{T, T_h\}$ . Wegen der Stetigkeit von  $x_h$  und der Definition von  $T_h$  gilt daher für alle  $h < h^*$ :

$$T_h > \min\{T, T_h\}.$$

Also ist nur  $\min\{T, T_h\} = T$  möglich und deswegen gilt  $t_h^*(x_h^0) > T_h > T$ . Außerdem zeigt dies

$$\|x_h\|_{L^\infty([0,T]; X_h)} < M.$$

Die Fehlerabschätzung folgt dann direkt aus a) und die Konvergenz aus den Konsistenzbedingungen wie im Beweis von Satz 2.13. □

### 2.3. Zeitdiskretisierung mit Crank-Nicolson

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich der Volldiskretisierungsfehler nach Zeitdiskretisierung der semidiskreten Gleichung verhält. Exemplarisch wird die Analyse für das Crank-Nicolson Verfahren durchgeführt. Dieser Abschnitt erweitert dabei [8, Chapter 2.8] vom linearen auf den semilinearen Fall.

#### Die volldiskretisierte Gleichung

Ausgangspunkt ist die semidiskrete Gleichung: Finde  $x_h: [0, T] \rightarrow X_h$  mit

$$\begin{aligned} x_h'(t) + S_h x_h(t) &= g_h(t, x_h(t)) && \text{für } t \in [0, T], \\ x_h(0) &= x_h^0 \in X_h. \end{aligned}$$

Die Zeitschrittweite bezeichnen wir mit  $\tau > 0$  und definieren

- $t^n := \tau n$ ,
- $g_h^n(\cdot) := g_h(t^n, \cdot): X_h \rightarrow X_h$ .

Dabei stellen wir in diesem Abschnitt die gleichen Voraussetzungen wie bei Satz 2.14, insbesondere sei  $g_h^n$  also lokal Lipschitz-stetig auf  $X_h$  mit Konstante  $\widehat{L}_{t^n, M}$  unabhängig von  $h$ .

Die Crank-Nicolson Approximation  $x_h^n \approx x_h(t^n)$  ist gegeben durch

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

$$x_h^{n+1} = x_h^n - \frac{\tau}{2} S_h (x_h^{n+1} + x_h^n) + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) + g_h^n(x_h^n)), \quad n \geq 0 \quad (2.21)$$

mit Startwert  $x_h^0$  aus der semidiskreten Gleichung.

Mit den Operatoren

$$R_+ := I + \frac{\tau}{2} S_h \quad \text{und} \quad R_- := I - \frac{\tau}{2} S_h$$

lässt sich das Verfahren auch schreiben als

$$R_+ x_h^{n+1} = R_- x_h^n + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) + g_h^n(x_h^n)), \quad n \geq 0. \quad (2.22)$$

Die ist eine nichtlineare Gleichung, bei der wir für die nachfolgende Analyse zunächst annehmen, dass die auftauchenden Iterierten  $x_h^n$  für  $n = 1 \dots, n^*$  für ein  $n^* > 0$  existieren. Dann sei

$$M := \max\{C_{J_h} \|x\|_{L^\infty([0,T];Z)}, \max_{n=0}^{n^*} \|x_h^n\|_{X_h}\},$$

wobei  $x$  die exakte Lösung von (2.2) ist.

Sowohl  $n^*$  als auch  $M$  hängen offensichtlich von  $\tau$  und  $h$  ab, zur Übersichtlichkeit wird jedoch darauf verzichtet, dies in der Notation festzuhalten.

### Stabilität

Wir betrachten hier das Schema (2.22) mit allgemeiner rechter Seite  $f^{n+1} \in X_h$ :

$$R_+ y_h^{n+1} = R_- y_h^n + f^{n+1}, \quad n \geq 0 \quad (2.23)$$

und Startwert  $y_h^0 \in X_h$ .

Für  $\tau \widehat{c}_{\text{qm}} < 2$  gilt ([8, Lemma 2.14])

- $R_+$  ist invertierbar mit  $\|R_+^{-1}\|_{X_h \leftarrow X_h} \leq 1$ ,
- $R := R_+^{-1} R_-$  erfüllt

$$\|R y_h\|_{X_h} \leq e^{\tau \widehat{c}_{\text{qm}}} \|y_h\|_{X_h} \quad (2.24)$$

für alle  $y_h \in X_h$ .

Somit erhalten wir für  $\tau \widehat{c}_{\text{qm}} < 2$  durch auflösen der Rekursion (2.23) die Darstellung

$$\begin{aligned} y_h^{n+1} &= R y_h^n + R_+^{-1} f^{n+1} \\ &= \dots \\ &= R^{n+1} y_h^0 + \sum_{m=0}^n R^{n-m} R_+^{-1} f^{m+1} \end{aligned}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

und daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|y_h^{n+1}\|_{X_h} &\leq \|R^{n+1}y_0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n \|R^{n-m}R_+^{-1}f^{m+1}\|_{X_h} \\ &\leq e^{(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}}\|y_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(n-m)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}}\|f^{m+1}\|_{X_h}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

### Fehleranalyse

Wir interessieren uns für den Volldiskretisierungsfehler  $e^n = Q_h x_h^n - \widetilde{x}^n$ , hierbei ist  $\widetilde{x}^n := x(t^n)$ . Diesen splitten wir, wie im Beweis von Satz 2.10, auf:

$$e^n = Q_h e_h^n + (Q_h J_h - \text{I})\widetilde{x}^n \quad \text{mit} \quad e_h^n = x_h^n - J_h \widetilde{x}^n.$$

Mit (2.13) gilt

$$\begin{aligned} \|e^n\|_X &\leq \|Q_h e_h^n\|_X + \|(Q_h J_h - \text{I})\widetilde{x}^n\|_X \\ &\leq \frac{1}{c_{X_h, X}} \|e_h^n\|_{X_h} + \|(Q_h J_h - \text{I})\widetilde{x}^n\|_X. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Im Folgenden wird für  $e_h^n$  eine Fehlergleichung hergeleitet. Dazu sei

$$g^n(\cdot) := g(t^n, \cdot): X \rightarrow X.$$

Die exakte Lösung erfüllt wegen der Differentialgleichung (2.2)

$$\frac{\tau}{2} (x'(t^{n+1}) + x'(t^n)) + \frac{\tau}{2} S (\widetilde{x}^{n+1} + \widetilde{x}^n) = \frac{\tau}{2} (g^{n+1}(\widetilde{x}^{n+1}) + g^n(\widetilde{x}^n))$$

und daher

$$\widetilde{x}^{n+1} = \widetilde{x}^n - \frac{\tau}{2} S (\widetilde{x}^{n+1} + \widetilde{x}^n) + \frac{\tau}{2} (g^{n+1}(\widetilde{x}^{n+1}) + g^n(\widetilde{x}^n)) + \delta^{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (2.27)$$

mit Defekten  $\delta^{n+1}$

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} &= \widetilde{x}^{n+1} - \widetilde{x}^n - \frac{\tau}{2} (x'(t^{n+1}) + x'(t^n)) \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} x'(t) dt - \frac{\tau}{2} (x'(t^{n+1}) + x'(t^n)). \end{aligned}$$

Bei diesen handelt es sich somit um Quadraturfehler der Trapezregel und für diese gilt

$$\|\delta^{n+1}\|_X \leq C\tau^3 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([t^n, t^{n+1}]; X)}. \quad (2.28)$$

Multiplizieren von (2.27) mit  $J_h$  liefert

$$J_h \widetilde{x}^{n+1} = J_h \widetilde{x}^n - \frac{\tau}{2} J_h S (\widetilde{x}^{n+1} + \widetilde{x}^n) + \frac{\tau}{2} (J_h g^{n+1}(\widetilde{x}^{n+1}) + J_h g^n(\widetilde{x}^n)) + J_h \delta^{n+1}. \quad (2.29)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Subtrahieren wir diese Gleichung von (2.21) erhalten wir

$$\begin{aligned}
e_h^{n+1} &= e_h^n - \frac{\tau}{2} S_h (x_h^{n+1} + x_h^n) + \frac{\tau}{2} J_h S (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) + g_h^n(x_h^n) - J_h g^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) - J_h g^n(\tilde{x}^n)) - J_h \delta^{n+1} \\
&= e_h^n - \frac{\tau}{2} S_h (e_h^{n+1} + e_h^n) + \frac{\tau}{2} (J_h S - S_h J_h) (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) - J_h g^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) + g_h^n(x_h^n) - J_h g^n(\tilde{x}^n)) - J_h \delta^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wie im semidiskreten Fall verwenden wir zur Darstellung der Diskretisierungsfehler den linearen Fehleroperator  $R_h = Q_h^* S - S_h J_h$  und den nichtlinearen Fehleroperator

$$r_h^n(x) := r_h(t^n, x) = Q_h^* g^n(x) - g_h^n(J_h x).$$

Durch Umstellen der Terme und erneutes Einsetzen von Gleichung (2.27) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&e_h^{n+1} - e_h^n + \frac{\tau}{2} S_h (e_h^{n+1} + e_h^n) \\
&= \frac{\tau}{2} (J_h - Q_h^*) S (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) + \frac{\tau}{2} R_h (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) - J_h g^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) + g_h^n(x_h^n) - J_h g^n(\tilde{x}^n)) \\
&\quad - J_h \delta^{n+1} \\
&\stackrel{(2.27)}{=} - (J_h - Q_h^*) (\tilde{x}^{n+1} - \tilde{x}^n) + \frac{\tau}{2} R_h (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) - Q_h^* g^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) + g_h^n(x_h^n) - Q_h^* g^n(\tilde{x}^n)) \\
&\quad - Q_h^* \delta^{n+1} \\
&= - (J_h - Q_h^*) (\tilde{x}^{n+1} - \tilde{x}^n) + \frac{\tau}{2} R_h (\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n) - \frac{\tau}{2} (r_h^{n+1}(\tilde{x}^{n+1}) + r_h^n(\tilde{x}^n)) \\
&\quad + \frac{\tau}{2} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) - g_h^{n+1}(J_h \tilde{x}^{n+1}) + g_h^n(x_h^n) - g_h^n(J_h \tilde{x}^n)) \\
&\quad - Q_h^* \delta^{n+1} \\
&:= f^{n+1}.
\end{aligned}$$

Darauf können wir nun Abschätzung (2.25) anwenden und erhalten

$$\|e_h^{n+1}\|_{X_h} \leq e^{(n+1)\tau\hat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(n-m)\tau\hat{c}_{\text{qm}}} \|f^{m+1}\|_{X_h}. \quad (2.30)$$

Wir schätzen zunächst einzelne Terme von  $f^{n+1}$  weiter ab:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \|(J_h - Q_h^*) (\tilde{x}^{n+1} - \tilde{x}^n)\|_{X_h} &= \left\| (J_h - Q_h^*) \int_{t^n}^{t^{n+1}} x'(t) dt \right\|_{X_h} \\
&\leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|(J_h - Q_h^*) x'(t)\|_{X_h} dt \\
&\leq \tau \|(J_h - Q_h^*) x'\|_{L^\infty([t^n, t^{n+1}]; X_h)}
\end{aligned}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

- Mit (2.13) und (2.28) gilt:

$$\|Q_h^* \delta^{n+1}\|_{X_h} \leq c_{X_h, X}^{-1} \|\delta^{n+1}\|_X \leq C\tau^3 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([t^n, t^{n+1}]; X_h)}$$

- Wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $g_h$  gilt für  $t^n \leq T$  und  $\|x_h^n\|_{X_h}, \|J_h \tilde{x}^n\|_{X_h} \leq M$ :

$$\|g_h^n(x_h^n) - g_h^n(J_h \tilde{x}^n)\|_{X_h} \leq \widehat{L}_{T, M} \|e_h^n\|_{X_h}.$$

Damit gilt insgesamt

$$\|f^{n+1}\|_{X_h} \leq d^{n+1} + \widehat{L}_{T, M} \frac{\tau}{2} (\|e_h^{n+1}\|_{X_h} + \|e_h^n\|_{X_h})$$

mit

$$\begin{aligned} d^{n+1} &= \tau \|(J_h - Q_h^*)x'\|_{L^\infty([t^n, t^{n+1}]; X_h)} + \frac{\tau}{2} \|R_h(\tilde{x}^{n+1} + \tilde{x}^n)\|_{X_h} \\ &\quad + \frac{\tau}{2} (\|r_h^{n+1}(\tilde{x}^{n+1})\|_{X_h} + \|r_h^n(\tilde{x}^n)\|_{X_h}) \\ &\quad + C\tau^3 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([t^n, t^{n+1}]; X_h)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Setzen wir dies wieder in (2.30) ein, ergibt sich mit  $\widehat{c}_{\text{qm}} \geq 0$

$$\begin{aligned} \|e_h^{n+1}\|_{X_h} &\leq e^{(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(n-m)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} d^{m+1} \\ &\quad + \widehat{L}_{T, M} \frac{\tau}{2} \sum_{m=0}^n e^{(n-m)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} (\|e_h^{m+1}\|_{X_h} + \|e_h^m\|_{X_h}) \\ &\leq e^{(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(n-m)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} d^{m+1} + \widehat{L}_{T, M} \tau \sum_{m=0}^{n+1} e^{(n+1-m)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^m\|_{X_h}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $e^{-(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}}$  liefert

$$e^{-(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^{n+1}\|_{X_h} \leq \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(-m-1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} d^{m+1} + \widehat{L}_{T, M} \tau \sum_{m=0}^{n+1} e^{-m\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^m\|_{X_h}$$

Für  $\widehat{L}_{T, M} \tau < 1$  liefert das diskrete Gronwall Lemma aus Satz A.9

$$e^{-(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} \|e_h^{n+1}\|_{X_h} \leq e^{\frac{\widehat{L}_{T, M}(n+1)\tau}{1-\widehat{L}_{T, M}\tau}} \left( \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n e^{(-m-1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}}} d^{m+1} \right),$$

also folgt

$$\begin{aligned} \|e_h^{n+1}\|_{X_h} &\leq e^{(n+1)\tau\widehat{c}_{\text{qm}} + \frac{\widehat{L}_{T, M}(n+1)\tau}{1-\widehat{L}_{T, M}\tau}} \left( \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n d^{m+1} \right) \\ &\leq e^{\left(\widehat{c}_{\text{qm}} + \frac{\widehat{L}_{T, M}}{1-\widehat{L}_{T, M}\tau}\right)t^{n+1}} \left( \|e_h^0\|_{X_h} + \sum_{m=0}^n d^{m+1} \right). \end{aligned} \tag{2.32}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Schließlich gilt mit Gleichung (2.31):

$$\sum_{m=0}^n d^{m+1} \leq t^{n+1} \left( \|(J_h - Q_h^*)x'\|_{L^\infty([0,T];X_h)} + \max_{m=0}^{n+1} \|R_h x(t^m)\|_{X_h} \right. \\ \left. + \max_{m=0}^{n+1} \|r_h^m(x(t^m))\|_{X_h} + \tau^2 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([0,T];X)} \right) \quad (2.33)$$

Zur Formulierung des Hauptresultates dieses Abschnittes benötigen wir folgende Definition:

**Definition 2.15** (Lokale Eindeutigkeit). *Wir nennen eine Iterierte  $x_h^{n+1}$  von (2.21) lokal eindeutig, wenn Ein Ball  $B$  um  $x_h^n$  existiert, in dem  $x_h^{n+1}$  die einzige Lösung von (2.21) ist.*

**Satz 2.16** (Volldiskretisierungsfehler des Crank-Nicolson Verfahrens). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.14. Weiter gelte  $x \in C^3([0, t^*(x^0)]; X)$  für die Lösung von (2.2) und  $x_h^n$  sei die Lösung von (2.21).*

a) *Es sei  $T < t^*(x^0)$  und  $x_h^n$  existiere für alle  $t^n \leq T$ . Weiter sei*

$$M = \max\{C_{J_h} \|x\|_{L^\infty([0,T];Z)}, \max_{t^n \leq T} \|x_h^n\|_{X_h}\}$$

*und  $\tau \max\{\widehat{L}_{T,M}, \frac{\widehat{c}_{qm}}{2}\} < 1$ . Dann gilt für alle  $n > 0$  mit  $t^n = n\tau \leq T$  für die geliftete volldiskrete Lösung die Fehlerabschätzung*

$$\|Q_h x_h^n - x(t^n)\|_X \leq C e^{\left(\widehat{c}_{qm} + \frac{\widehat{L}_{T,M}}{1 - \widehat{L}_{T,M}\tau}\right)t^n} \left( E_h(t^n) + t^n \tau^2 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([0,T];X)} \right) \\ + \|(I - Q_h J_h)x(t^n)\|_X \quad (2.34)$$

*mit*

$$E_h(t) := \|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h} + t \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{L^\infty([0,T];X_h)} \\ + t \|R_h x\|_{L^\infty([0,T];X_h)} + t \|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0,T];X_h)}$$

*für  $t \in [0, T]$*

b) *Es sei  $T < t^*(x^0)$  und  $M := 2C_{J_h} \|x\|_{L^\infty([0,T];Z)}$ . Außerdem gelte*

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_h(t^n) \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t^n \in [0, T]. \quad (2.35)$$

*Dann gibt es  $\tau^*, h^* > 0$ , sodass für alle  $h < h^*$  und alle  $\tau < \tau^*$  gilt:  $x_h^n$  existiert lokal eindeutig für alle  $n$  mit  $t^n \leq T$  und erfüllt*

$$\max_{t^n \leq T} \|x_h^n\|_{X_h} \leq M.$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Außerdem gilt die Fehlerabschätzung (2.34).

Gilt zusätzlich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(I - Q_h J_h)x(t^n)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t^n \in [0, T], \quad (2.36)$$

so konvergiert die geliftete volldiskretisierte Lösung, d.h.

$$\|Q_h x_h^n - x(t^n)\|_X \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0, \quad \text{für alle } t^n \in [0, T].$$

### Bemerkung:

- In b) ist  $\tau^*$  unabhängig von  $h$ .
- Eine hinreichende Bedingung für (2.35) und (2.36) sind die Konsistenzbedingungen aus Annahme 2.11.

*Beweis. Zu a):* Die Fehlerabschätzung folgt aus den Gleichungen (2.26), (2.32) und (2.33).

*Zu b):* Zu zeigen ist die eindeutige Existenz der Iterierten und ihre Beschränktheit, die Fehlerabschätzung folgt dann aus a) und die Konvergenz direkt aus den Voraussetzungen.

Wir definieren

$$n^* := \max \{n \geq 0 \mid x_h^m, m = 0, \dots, n \text{ existieren lokal eindeutig mit } \max_{m=0}^n \|x_h^m\|_{X_h} \leq M\}.$$

Hierbei hängt  $n^*$  von  $\tau$  und  $h$  ab. Wir zeigen durch Widerspruch, dass für hinreichend kleine  $\tau$  und  $h$  gilt:  $t^{n^*+1} > T$ .

Es sei  $\tau \max\{\widehat{L}_{T,M}, \frac{\widehat{c}_{qm}}{2}\} < 1$  und wir nehmen  $t^{n^*+1} \leq T$  an. Es gilt

$$\|x_h^{n^*}\|_{X_h} \leq \|x_h^{n^*} - J_h x(t^{n^*})\|_{X_h} + \overbrace{\|J_h x(t^{n^*})\|_{X_h}}^{\leq \frac{M}{2}}$$

und außerdem wegen der Abschätzung des diskreten Fehlers und (2.35)

$$\begin{aligned} \|x_h^{n^*} - J_h x(t^{n^*})\|_{X_h} &= \|e_h^{n^*}\|_{X_h} \\ &\leq C e^{\left(\widehat{c}_{qm} + \frac{\widehat{L}_{T,M}}{1 - \widehat{L}_{T,M}\tau}\right)t^{n^*}} \left(E_h(t^{n^*}) + t^{n^*}\tau^2 \|x^{(3)}\|_{L^\infty([0,T];X)}\right) \\ &\xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Also existieren  $h^*, \tau^* > 0$ , sodass für alle  $h < h^*$  und  $\tau < \tau^*$  gilt:

$$\|x_h^{n^*}\|_{X_h} \leq \frac{2}{3}M. \quad (2.37)$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

Im Rest des Beweises sei  $h < h^*$  fest und wir setzen  $n = n^*$ . Die nichtlineare Gleichung für  $x_h^{n+1}$  ist gegeben durch

$$x_h^{n+1} = Rx_h^n + \frac{\tau}{2}R_+^{-1} (g_h^{n+1}(x_h^{n+1}) + g_h^n(x_h^n)) = G(x_h^{n+1}) \quad (2.38)$$

mit

$$G(x_h) := Rx_h^n + \frac{\tau}{2}R_+^{-1} (g_h^{n+1}(x_h) + g_h^n(x_h^n)). \quad (2.39)$$

Wir setzen

$$D^n := \{y_h \in X_h \mid \|y_h - Rx_h^n\|_{X_h} \leq \frac{M}{6}\}.$$

Wegen (2.24) gilt

$$\|Rx_h^n\|_{X_h} \leq e^{\tau\widehat{c}_{\text{qm}}}\|x_h^n\|_{X_h}$$

und daraus folgt mit (2.37)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|Rx_h^n\|_{X_h} \leq \frac{2}{3}M.$$

Somit gilt nach eventueller weiterer Einschränkung von  $\tau^*$  für alle  $\tau < \tau^*$

$$\|Rx_h^n\|_{X_h} \leq \frac{5}{6}M$$

und daraus

$$D^n \subset \{y_h \in X_h \mid \|y_h\|_{X_h} \leq M\}. \quad (2.40)$$

Wir zeigen im Folgenden mit dem Banach'schen Fixpunktsatz, dass  $G$  auf  $D^n$  einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, dieser ist dann eine Lösung von (2.38).

*Kontraktion:* Für  $\tau < \frac{1}{\widehat{L}_{T,M}}$  und  $x_h, y_h \in D^n$  gilt wegen (2.40) und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $g_h$

$$\begin{aligned} \|G(x_h) - G(y_h)\|_{X_h} &= \frac{\tau}{2}\|g_h^{n+1}(x_h) - g_h^{n+1}(y_h)\|_{X_h} \\ &\leq \tau \frac{\widehat{L}_{T,M}}{2}\|x_h - y_h\|_{X_h} \\ &< 1 \end{aligned}$$

also ist  $G$  eine Kontraktion auf  $D^n$ .

*Selbstabbildung:* Für alle  $y_h \in X_h$  mit  $\|y_h\|_{X_h} \leq M$  und alle  $t \in [0, T]$  gilt wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von  $g_h$  und (2.13)

$$\begin{aligned} &\|g_h(t, x_h)\|_{X_h} \\ &\leq \|g_h(t, x_h) - g_h(t, J_h x^0)\|_{X_h} + \|g_h(t, J_h x^0) - Q_h^* g(t, x^0)\|_{X_h} + \|Q_h^* g(t, x^0)\|_{X_h} \\ &\leq L_{T,M}\|x_h - J_h x^0\|_{X_h} + r_h(t, x^0) + \|Q_h^* g(t, x^0)\|_{X_h} \\ &\leq 2ML_{T,M} + r_h(t, x^0) + c_{X_h, X}^{-1}\|Q_h^* g(t, x^0)\|_X \\ &\leq B_{T,M} \end{aligned}$$

## 2. Diskretisierung semilinearer Evolutionsgleichungen

mit einer Konstante  $B_{T,M} < \infty$ . Wegen  $r_h(t, x^0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  lässt sich  $B_{T,M}$  dabei unabhängig von  $h$  wählen.

Daraus erhalten wir für  $x_h \in D^n$  mit (2.39), der Beschränktheit von  $R_+^{-1}$  und (2.40):

$$\begin{aligned} \|G(x_h) - Rx_h^n\|_{X_h} &\leq \frac{\tau}{2} \|R_+^{-1}(g_h^{n+1}(x_h) + g_h^n(x_h^n))\|_{X_h} \\ &\leq \frac{\tau}{2} \|g_h^{n+1}(x_h) + g_h^n(x_h^n)\|_{X_h} \\ &\leq \tau B_{T,M}. \end{aligned}$$

Somit gilt nach weiterer Einschränkung von  $\tau^*$  für alle  $\tau < \tau^*$ :

$$\|G(x_h) - Rx_h^n\|_{X_h} \leq \frac{M}{6}.$$

Für diese  $\tau$  ist  $G$  auf  $D^n$  eine kontraktive Selbstabbildung und besitzt nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt. Dies ist ein Widerspruch zu der Definition von  $n^*$  und damit ist die Behauptung gezeigt.

Nach dem Beweis hängt  $\tau^*$  nicht von  $h$ , sondern lediglich von  $M, T, \widehat{L}_{T,M}, \widehat{c}_{\text{qm}}, B_{T,M}$  und  $\|x^{(3)}\|_{L^\infty([0,T];X)}$  ab.  $\square$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Resultate aus Kapitel 2 auf abstrakte Wellengleichungen zweiter Ordnung angewendet. Wir orientieren uns dabei an [8, Kapitel 4] und erweitern die dort vorgestellten Resultate für lineare Wellengleichungen zweiter Ordnung auf den semilinearen Fall.

#### 3.1. Analyse des kontinuierlichen Problems

Es seien  $H$  und  $V$  zwei Hilberträume mit zugehörigen Normen  $\|\cdot\|_m$  bzw.  $\|\cdot\|_V$ , welche ein Gelfand-Tripel bilden:

$$V \xhookrightarrow{d} H \simeq H^* \xhookrightarrow{d} V^*.$$

Insbesondere existiert ein  $C_V > 0$ , sodass

$$\|v\|_m \leq C_V \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V \text{ gilt.}$$

Außerdem sei  $m(\cdot, \cdot)$  das zu  $\|\cdot\|_m$  gehörende Skalarprodukt auf  $H$ .

Wir betrachten folgende variationelle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

Finde  $u: [0, T] \rightarrow V$  mit

$$\langle u'', \varphi \rangle_V + b(u', \varphi) + a(u, \varphi) = \langle f(t, u, u'), \varphi \rangle_V \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in (0, T], \quad (3.1a)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0, \quad (3.1b)$$

wobei

$$f \in C^1([0, T] \times V \times H; H) \quad (3.1c)$$

lokal Lipschitz-stetig auf  $V \times H$  ist.

Außerdem gelte für die Bilinearformen  $a$  und  $b$ :

#### Annahme 3.1.

1)  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig, symmetrisch und erfülle die Garding-Ungleichung

$$a(v, v) + c_G \|v\|_m^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{für alle } v \in V$$

mit Konstanten  $c_G \geq 0$  und  $\alpha > 0$ .

2)  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und es existiere ein  $\beta_{\text{qm}} \geq 0$  mit

$$b(v, v) + \beta_{\text{qm}} \|v\|_m^2 \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

Unter Annahme 3.1 induzieren die Bilinearformen  $a$  und  $b$  Operatoren  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V^*)$  durch

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_V = a(u, v), \quad \langle \mathcal{B}u, v \rangle_V = b(u, v), \quad \text{für alle } u, v \in V \quad (3.2)$$

und (3.1) lässt sich äquivalent formulieren als Evolutionsgleichung zweiter Ordnung in  $V^*$ :

$$u''(t) + \mathcal{B}u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad (3.3a)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0. \quad (3.3b)$$

Für unsere Analyse benötigen wir den Raum  $V$  mit einem zu  $a$  passenden Skalarprodukt. Es gilt:  $\tilde{a}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\tilde{a}(u, v) := a(u, v) + c_G m(u, v) \quad \text{für } u, v \in V$$

ist wegen Annahme 3.1 koerziv und definiert deshalb ein Skalarprodukt auf  $V$ . Wir setzen  $\tilde{V} := (V, \tilde{a})$  mit zugehöriger Norm  $\|\cdot\|_{\tilde{a}}$ .

Wegen der Garding-Ungleichung ist die Einbettung  $\tilde{V} \hookrightarrow H$  ebenfalls stetig, denn für alle  $\varphi \in \tilde{V}$  gilt

$$\|\varphi\|_m \leq C_V \|\varphi\|_V \leq C_V \alpha^{-1/2} \|\varphi\|_{\tilde{a}}. \quad (3.4)$$

#### Wohlgestelltheit des kontinuierlichen Problems

Wie in [15] oder [8] formulieren wir das Problem (3.3) in eine Gleichung erster Ordnung um, um die Wohlgestelltheitsresultate aus Kapitel 2.1 anwenden zu können. Dazu nennen wir  $u' = v$  und setzen

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix}, \quad g(t, x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u(t), v(t)) \end{bmatrix}, \quad x^0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{bmatrix}.$$

Als Hilberträume für die erste Ordnung Formulierung verwenden wir

$$Y = \tilde{V} \times V, \quad X = \tilde{V} \times H,$$

ausgestattet mit dem Produktskalarprodukt. Damit hat (3.3) die Form (2.1).

$A: D(A) \rightarrow H$  und  $B: D(B) \rightarrow H$  seien die Einschränkungen von  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  auf  $H$ . Es gilt

$$D(A) \times D(B) \subset D(S) = \{x \in Y \mid \mathcal{S}x \in X\} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \tilde{V} \times V \mid \mathcal{A}u + \mathcal{B}v \in H \right\}. \quad (3.5)$$

In folgendem Lemma werden die Voraussetzungen von Satz 2.6 nachgerechnet:

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

**Lemma 3.2** ([8, Lemma 2.11]). *Ist Annahme 3.1 erfüllt, dann ist  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$  quasimonoton mit*

$$c_{\text{qm}} = \frac{1}{2}c_G C_V \alpha^{-1/2} + \beta_{\text{qm}} \geq 0 \quad (3.6)$$

und maximal bzgl.  $Y^*$ . Insbesondere erzeugt  $\mathcal{S}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe  $(e^{-t\mathcal{S}})_{t \geq 0}$  auf  $X$  mit

$$\|e^{-t\mathcal{S}}\|_{X \leftarrow X} \leq e^{c_{\text{qm}} t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

*Beweis.* Da wir die Identifikation  $X^* \simeq X$  benutzen gilt auch  $\tilde{V}^* \simeq \tilde{V}$  und damit  $Y^* = \tilde{V}^* \times V^* \simeq \tilde{V} \times V^*$ . Für  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$  gilt wegen (3.4) auch  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\tilde{V}, V^*)$ . Zusammen mit  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V^*)$  folgt daraus direkt  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$ .

Zur Quasimonotonie: Für  $x = [u, v]^T$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}x, x \rangle_Y &= -\tilde{a}(v, u) + \langle \mathcal{A}u + \mathcal{B}v, v \rangle_V = -a(v, u) - c_G m(v, u) + a(u, v) + b(v, v) \\ &\geq -c_G \|v\|_m \|u\|_m - \beta_{\text{qm}} \|v\|_m^2 \\ &\geq -c_G \|v\|_m C_V \alpha^{-1/2} \|u\|_{\tilde{a}} - \beta_{\text{qm}} \|v\|_m^2 \\ &\geq -\frac{1}{2} c_G C_V \alpha^{-1/2} (\|u\|_{\tilde{a}}^2 + \|v\|_m^2) - \beta_{\text{qm}} \|v\|_m^2 \\ &\geq c_{\text{qm}} (\|u\|_{\tilde{a}}^2 + \|v\|_m^2), \end{aligned}$$

wobei Annahme 3.1, (3.4) und die Young'sche Ungleichung verwendet wurde.

Zur Maximalität: Wir müssen ein  $\lambda > c_{\text{qm}}$  finden, sodass  $\text{Bild}(\lambda + \mathcal{S}) = Y^*$  gilt, also die Gleichung

$$(\lambda + \mathcal{S})x = g \quad \iff \quad \begin{bmatrix} \lambda u - v \\ \lambda v + \mathcal{A}u + \mathcal{B}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

für alle  $g = [g_1, g_2]^T \in Y^*$  eine Lösung  $x = [u, v]^T \in Y$  besitzt. Durch Umstellen der ersten Gleichung nach  $v$  und Einsetzen in die zweite Gleichung kann  $v$  eliminiert werden und es genügt die Gleichung

$$\lambda^2 u + \lambda \mathcal{B}u + \mathcal{A}u = g_2 + \lambda g_1 + \mathcal{B}g_1 \quad \text{in } V^*$$

zu betrachten. Diese ist äquivalent zu der variationellen Formulierung

$$\underbrace{\lambda^2 \langle u, \psi \rangle_V + \lambda b(u, \psi) + a(u, \psi)}_{:=\Lambda(u, \psi)} = \underbrace{\langle g_2, \psi \rangle_V + \lambda \langle g_1, \psi \rangle_V + \langle \mathcal{B}g_1, \psi \rangle_V}_{:=l(\psi)} \quad \text{für alle } \psi \in V. \quad (3.7)$$

Wir wollen den Satz von Lax-Milgram (Satz A.10) anwenden. Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- $l \in V^*$ , da  $g_1 \in \tilde{V} \hookrightarrow V^*$  und  $g_2, \mathcal{B}g_1 \in V^*$ ,

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

- $\Lambda: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt, da  $a$  und  $b$  stetig sind.

Ferner ist  $\Lambda$  für  $\lambda > \beta_{\text{qm}}/2 + (\beta_{\text{qm}}^2/4 + c_G)^{1/2}$  koerziv, denn

$$\Lambda(u, u) = \lambda^2 \|u\|_m^2 + \lambda b(u, u) + a(u, u) \geq \underbrace{(\lambda^2 - \lambda\beta_{\text{qm}} - c_G)}_{>0} \|u\|_m^2 + \alpha \|u\|_V^2,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass  $b$  monoton ist und  $a$  die Garding-Ungleichung erfüllt. Mit Lax-Milgram existiert also für alle  $\lambda > \beta_{\text{qm}}/2 + (\beta_{\text{qm}}^2/4 + c_G)^{1/2}$  und  $g = [g_1, g_2]^\top \in Y^*$  eine eindeutige Lösung  $u \in V$  von 3.7. Dies zeigt die Maximalität von  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Satz 3.3** (Lokale Wohlgestelltheit). *Es gelte die Annahme 3.1. Außerdem seien  $u^0, v^0 \in V$  und  $\mathcal{A}u^0 + \mathcal{B}v^0 \in H$ . Dann ist (3.3) lokal wohlgestellt, genauer gilt:*

- *Es existiert ein  $t^*(u^0, v^0) \in (0, \infty]$ , sodass (3.3) für alle  $T < t^*(u^0, v^0)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^2([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V)$  besitzt.*
- *Falls  $t^*(u^0, v^0) < \infty$ , so gilt*

$$\lim_{t \rightarrow t^*(u^0, v^0)} (\|u(t)\|_a^2 + \|u'(t)\|_m^2)^{1/2} = \infty. \quad (3.8)$$

- *Es sei  $\tilde{u}$  eine weitere Lösung mit Anfangswerten  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}^0, \tilde{u}'(0) = \tilde{v}^0$ , die auf  $[0, T]$  existiert und*

$$M := \sup_{t \in [0, T]} \max \left\{ (\|u(t)\|_a^2 + \|u'(t)\|_m^2)^{1/2}, (\|\tilde{u}(t)\|_a^2 + \|\tilde{u}'(t)\|_m^2)^{1/2} \right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & (\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_a^2 + \|u'(t) - \tilde{u}'(t)\|_m^2)^{1/2} \\ & \leq e^{(L_{T,M} + c_{\text{qm}})T} \left( \|u^0 - \tilde{u}^0\|_a^2 + \|v^0 - \tilde{v}^0\|_m^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

für alle  $t \in [0, T]$ , wobei  $L_{T,M}$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f$  und  $c_{\text{qm}}$  durch (3.6) gegeben ist.

Gilt außerdem  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H)$ , so folgt zusätzlich  $u \in C([0, T]; D(A))$ .

*Beweis.* Nach Lemma 3.2 ist  $\mathcal{S}$  quasimonoton. Außerdem folgt aus

$$f \in C^1([0, T] \times V \times H; H)$$

auch

$$g \in C^1([0, T] \times X; X)$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

und da  $f$  lokal Lipschitz-stetig auf  $V \times H$  ist, ist  $g$  auch lokal Lipschitz-stetig auf  $X$ . Somit lässt sich Satz 2.6 anwenden und es existiert ein  $t^*(u^0, v^0) \in (0, \infty]$ , sodass (3.3) für alle  $T < t^*(u^0, v^0)$  eine eindeutige Lösung  $u$  besitzt mit

$$x = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \in C^1([0, T]; \tilde{V} \times H) \cap C([0, T]; D(S)).$$

Daraus erhalten wir  $u'' \in C([0, T]; H)$ ,  $u' \in C([0, T]; \tilde{V})$  und mit (3.4) folgt  $u' \in C([0, T]; V)$ . (3.8) folgt ebenfalls direkt aus Satz 2.6. Die Stabilitätsabschätzung folgt aus (2.10).

Ist  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H)$ , so gilt  $D(S) = D(A) \times V$  wegen (3.5), somit folgt  $u \in C([0, T]; D(A))$ .  $\square$

## 3.2. Abstrakte Semidiskretisierung

Wir betrachten nun allgemeine Finite Elemente Semidiskretisierungen von (3.1). Ziel ist eine allgemeine Fehlerabschätzung und ein Konvergenzresultat unter Konsistenzbedingungen basierend auf den Resultaten aus Kapitel 2.2.

**Form der Semidiskretisierung** Wir verwenden folgende Notationen:

- $V_h$  sei ein endlichdimensionaler Vektorraum in dem die Approximation liegen soll.
- $m_h$  sei die Diskretisierung von  $m$  und ein Skalarprodukt auf  $V_h$ , wir setzen  $H_h := (V_h, m_h)$ .
- $Q_h^V \in \mathcal{L}(H_h, V)$  sei ein linearer Operator, den wir im Folgenden als Liftoperator bezeichnen.
- Die Bilinearformen  $a_h, b_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$  seien Diskretisierungen von  $a$  bzw.  $b$ .
- $u_h^0, v_h^0 \in V_h$  und  $f_h: [0, T] \times V_h \rightarrow V_h$  seien Approximationen an  $u^0, v^0$  und  $f$ .

Die Finite Elemente Approximation  $u_h: [0, T] \rightarrow V_h$  der Lösung von (3.1) ist gegeben als Lösung der diskretisierten Gleichung

$$m_h(u_h'', \varphi_h) + b_h(u_h', \varphi_h) + a_h(u_h, \varphi_h) = m_h(f_h(t, u_h, u_h'), \varphi_h) \quad \forall t \in (0, T], \varphi_h \in V_h, \quad (3.9a)$$

$$u_h(0) = u_h^0, \quad u_h'(0) = v_h^0. \quad (3.9b)$$

Wir formulieren die variationelle Gleichung in eine Evolutionsgleichung zweiter Ordnung um. Dazu definieren wir  $A_h, B_h \in \mathcal{L}(H_h, H_h)$  durch

$$m_h(A_h u_h, \varphi_h) = a_h(u_h, \varphi_h), \quad m_h(B_h u_h, \varphi_h) = b_h(u_h, \varphi_h) \quad \text{für alle } u_h, \varphi_h \in V_h.$$

Dann ist (3.9) äquivalent zu

$$u_h''(t) + B_h u_h'(t) + A_h u_h(t) = f_h(t, u_h(t), u_h'(t)), \quad (3.10a)$$

$$u_h(0) = u_h^0, \quad u_h'(0) = v_h^0. \quad (3.10b)$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

Da nicht  $V_h \subset V$  gefordert wird, deckt die Analyse auch nichtkonforme Diskretisierungen ab. Es werden jedoch folgende Annahmen getroffen:

**Annahme 3.4** (Stabilität). Für alle  $u_h, \varphi_h \in V_h$  gelte

1)  $a_h$  sei symmetrisch und es existiere eine Konstante  $\widehat{c}_G$ , sodass

$$\widetilde{a}_h(u_h, \varphi_h) := a_h(u_h, \varphi_h) + \widehat{c}_G m_h(u_h, \varphi_h)$$

positiv definit ist. Somit definiert  $\widetilde{a}_h$  ein Skalarprodukt auf  $V_h$  es sei  $\widetilde{V}_h := (V_h, \widetilde{a}_h)$ .

2) Es existiert eine Konstante  $\widehat{C}_V > 0$  sodass  $\|\varphi_h\|_{m_h} \leq \widehat{C}_V \|\varphi_h\|_{\widetilde{a}_h}$  gilt.

3) Es existiert ein  $\widehat{\beta}_{\text{qm}} \geq 0$  sodass  $b_h + \widehat{\beta}_{\text{qm}} m_h$  monoton ist.

4) Es gibt Konstanten  $C_H \geq c_H > 0$  mit

$$c_H \|Q_h^V \varphi_h\|_m \leq \|\varphi_h\|_{m_h} \leq C_H \|Q_h^V \varphi_h\|_m. \quad (3.11)$$

5) Es gibt Konstanten  $\widetilde{C}_V \geq \widetilde{c}_V > 0$  mit

$$\widetilde{c}_V \|Q_h^V \varphi_h\|_{\widetilde{a}} \leq \|\varphi_h\|_{\widetilde{a}_h} \leq \widetilde{C}_V \|Q_h^V \varphi_h\|_{\widetilde{a}}. \quad (3.12)$$

6)  $f_h: [0, T] \times \widetilde{V}_h \times H_h \rightarrow H_h$  ist lokal Lipschitz-stetig auf  $\widetilde{V}_h \times H_h$

Alle Konstanten seien dabei unabhängig von  $h$ .

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist (3.10) lokal wohlgestellt, d.h. für es alle  $u_h^0, v_h^0 \in V_h$  existiert ein  $t_h^*(u_h^0, v_h^0) \in (0, \infty]$  sodass (3.10) für alle  $T < t_h^*(u_h^0, v_h^0)$  eine eindeutige klassische Lösung  $u_h \in C^2([0, T]; H_h) \cap C^1([0, T]; V_h)$  besitzt.

**Semidiskretisierung in erster Ordnung Formulierung** Analog zum kontinuierlichen Problem setzen wir  $X_h = \widetilde{V}_h \times H_h$  mit Produktskalarprodukt und

$$x_h(t) = \begin{bmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{bmatrix}, \quad S_h = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A_h & B_h \end{bmatrix}, \quad g_h(t, x_h(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_h(t, u_h(t), v_h(t)) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Damit ist (3.10) äquivalent zu der ersten Ordnung Formulierung (2.11). Den Liftoperator  $Q_h: X_h \rightarrow X = \widetilde{V} \times H$  definieren wir als

$$Q_h \begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Q_h^V u_h \\ Q_h^V v_h \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

#### Fehlerabschätzung und Konvergenz

Um eine Fehlerabschätzung und ein Konvergenzresultat für die Semidiskretisierung der allgemeinen Wellengleichung zweiter Ordnung zu erhalten, wenden wir Satz 2.14 auf die

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

erste Ordnung Formulierung an. Dazu definieren wir zunächst die restlichen erforderlichen Operatoren aus dem allgemeinen Framework aus Kapitel 2.2 für die allgemeine Wellengleichung.

Die adjungierten Liftoperatoren  $Q_h^{H*}: H \rightarrow H_h$  und  $Q_h^{V*}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}_h$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} m_h(Q_h^{H*}u, \varphi_h) &= m(u, Q_h^V \varphi_h) && \text{für alle } u \in H, \varphi_h \in V_h, \text{ bzw.} \\ \tilde{a}_h(Q_h^{V*}u, \varphi_h) &= \tilde{a}(u, Q_h^V \varphi_h) && \text{für alle } u \in \tilde{V}, \varphi_h \in \tilde{V}_h. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Da jeder Operator die gleiche Norm wie seine Adjungierte besitzt und wegen Annahme 3.4 4) und 5) gilt

$$\|Q_h^{H*}\|_{H_h \leftarrow H} = \|Q_h^V\|_{H \leftarrow H_h} \leq \frac{1}{c_H} \quad \text{und} \quad (3.15)$$

$$\|Q_h^{V*}\|_{\tilde{V}_h \leftarrow \tilde{V}} = \|Q_h^V\|_{\tilde{V} \leftarrow \tilde{V}_h} \leq \frac{1}{\tilde{c}_V}. \quad (3.16)$$

Weiter setzen wir  $P_h^H := Q_h^V Q_h^{H*}$ ,  $P_h^V := Q_h^V Q_h^{V*}$ .

$\Pi_h^H: H \rightarrow Q_h^V(V_h)$  und  $\Pi_h^V: \tilde{V} \rightarrow Q_h^V(V_h)$  seien die  $H$ - bzw.  $\tilde{V}$ -Orthogonalprojektion auf den gelifteten diskreten Raum. Wir benutzen folgende Notation für Fehler in den Skalarprodukten: Für  $u_h, \varphi_h \in V_h$  sei

$$\begin{aligned} \Delta m(u_h, \varphi_h) &:= m(Q_h^V u_h, Q_h^V \varphi_h) - m_h(u_h, \varphi_h), \text{ bzw.} \\ \Delta \tilde{a}(u_h, \varphi_h) &:= \tilde{a}(Q_h^V u_h, Q_h^V \varphi_h) - \tilde{a}_h(u_h, \varphi_h). \end{aligned}$$

Wie in Lemma 2.12 erhalten wir mit  $H$  bzw.  $\tilde{V}$  anstelle von  $X$ :

$$\|(P_h^H - \Pi_h^H)v\|_m \leq C_H \|\Delta m(Q_h^{H*}v)\|_{H_h^*} \quad \text{und} \quad (3.17a)$$

$$\|(P_h^V - \Pi_h^V)u\|_{\tilde{a}} \leq \tilde{C}_V \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*}u)\|_{\tilde{V}_h^*} \quad (3.17b)$$

für alle  $u \in \tilde{V}, v \in H$ .

Es sei  $Z^V$  ein Hilbertraum mit  $Z^V \xrightarrow{d} V$  und  $I_h \in \mathcal{L}(Z^V; H_h)$  sei ein Interpolationsoperator mit

$$\|I_h\|_{\tilde{V}_h \leftarrow Z^V} \leq C_{I_h}, \quad (3.18)$$

für ein  $C_{I_h}$  unabhängig von  $h$ .

Den Referenzoperator in der ersten Ordnung Formulierung definieren wir als

$$J_h := (Q_h^{V*}, I_h).$$

Für  $Z := \tilde{V}_h \times Z^V$  gilt dann

$$J_h \in \mathcal{L}(Z; X_h)$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

mit

$$\|J_h\|_{X_h \leftarrow Z} \leq C_{J_h} := \max \left\{ \frac{1}{\tilde{c}_V}, C_{I_h} \right\}. \quad (3.19)$$

Die Bedingungen aus Definition 2.8 sind also erfüllt.

Für  $R_h$  und  $r_h$  aus Definition 2.8 folgt mit dieser Wahl von  $J_h$ :

$$R_h x = \begin{bmatrix} -(Q_h^{V*} - I_h)v \\ Q_h^{H*}(Au + \mathcal{B}v) - (A_h Q_h^{V*}u + B_h I_h v) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

für  $x = [u, v]^T \in Z \cap D(S)$  und

$$r_h(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_h^{H*}f(t, u, v) - f_h(t, Q_h^{V*}u, I_h v) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

für  $x = [u, v]^T \in Z, t \in [0, T]$ .

Um mithilfe von Satz 2.14 eine Fehlerabschätzung für die Semidiskretisierung zu erhalten, benötigen wir Abschätzungen für  $R_h$  und  $r_h$ . Für  $r_h$  folgt aus (3.21):

$$\|r_h(t, x)\|_{X_h} \leq \|Q_h^{H*}f(t, u, v) - f_h(t, Q_h^{V*}u, I_h v)\|_{m_h}. \quad (3.22)$$

Die Abschätzung für den linearen Fehlerterm liefert folgendes Lemma:

**Lemma 3.5** ([8, Lemma 5.4]). *Es gelte Annahme 3.4. Dann gilt für  $x = [u, v]^T \in Z \cap D(S)$ :*

$$\begin{aligned} \|R_h x\|_{X_h} \leq C & \left( \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*}v)\|_{\tilde{V}_h^*} + \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*}u)\|_{\tilde{V}_h^*} + \|\Delta m(Q_h^{H*}u)\|_{H_h^*} \right. \\ & + \|(I - \Pi_h^V)v\|_{\tilde{a}} + \|(I - \Pi_h^V)u\|_{\tilde{a}} + \|(I - \Pi_h^H)u\|_{m_h} + \|(I - Q_h^V I_h)v\|_{\tilde{a}} \\ & \left. + \max_{\|\psi_h\|_{m_h}=1} |b(v, Q_h^V \psi_h) - b_h(I_h v, \psi_h)| \right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Um die Abschätzung zu zeigen, nutzen wir

$$\|R_h x\|_{X_h} = \max_{\|y_h\|_{X_h}=1} p(R_h x, y_h).$$

Dazu sei  $y_h = [\varphi_h, \psi_h]^T \in X_h$  mit  $\|y_h\|_{X_h} = 1$ . Aus (3.20) ergibt sich

$$\begin{aligned} p_h(R_h x, y_h) &= -\tilde{a}_h((Q_h^{V*} - I_h)v, \varphi_h) + m_h(Q_h^{H*}(Au + \mathcal{B}v) - (A_h Q_h^{V*}u + B_h I_h v), \psi_h) \\ &= -\underbrace{\tilde{a}_h((Q_h^{V*} - I_h)v, \varphi_h)}_{(*)} + \underbrace{a(u, Q_h^V \psi_h) - a_h(Q_h^{V*}u, \psi_h)}_{(**)} \\ &\quad + b(v, Q_h^V \psi_h) - b_h(I_h v, \psi_h) \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

Die Terme  $(\star)$  und  $(\star\star)$  werden weiter abgeschätzt.

Für  $(\star)$  gilt mit  $Q_h^V Q_h^{V*} = P_h^V$  und  $\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h} \leq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h((Q_h^{V*} - I_h)v, \varphi_h) &\leq \|(Q_h^{V*} - I_h)v\|_{\tilde{a}_h} \\ &\leq \tilde{C}_V \|(P_h^V - Q_h^V I_h)v\|_{\tilde{a}} \\ &\leq \tilde{C}_V (\|(P_h^V - I)v\|_{\tilde{a}} + \|(I - Q_h^V I_h)v\|_{\tilde{a}}) \\ &\leq C \left( \|(I - \Pi_h^V)v\|_{\tilde{a}} + \|\Delta\tilde{a}(Q_h^{V*}v)\|_{\tilde{V}_h^*} + \|(I - Q_h^V I_h)v\|_{\tilde{a}} \right), \end{aligned}$$

wobei (3.12) und (3.17b) benutzt wurden.

Für  $(\star\star)$  gilt mit  $\|\psi_h\|_{m_h} \leq 1$

$$\begin{aligned} a(u, Q_h^V \psi_h) - a_h(Q_h^{V*}u, \psi_h) &= \underbrace{\tilde{a}(u, Q_h^V \psi_h) - \tilde{a}_h(Q_h^{V*}u, \psi_h)}_{=0} - (c_G m(u, Q_h^V \psi_h) - \hat{c}_G m_h(Q_h^{V*}u, \psi_h)) \\ &\leq |c_G m(u, Q_h^V \psi_h) - \hat{c}_G m_h(Q_h^{V*}u, \psi_h)| \\ &\leq \max\{c_G, \hat{c}_G\} |m_h((Q_h^{H*} - Q_h^{V*})u, \psi_h)| \\ &\leq \max\{c_G, \hat{c}_G\} \|(Q_h^{H*} - Q_h^{V*})u\|_{m_h}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Definition von  $\tilde{a}$  bzw.  $\tilde{a}_h$ , die Adjungiertheit von  $Q_h^{V*}$  und  $Q_h^V$  und anschließend die Cauchy Schwarz Ungleichung ausgenutzt. Wir erhalten weiter mit (3.11), (3.4) und  $Q_h^V Q_h^{H*} = P_h^H$

$$\begin{aligned} \|(Q_h^{H*} - Q_h^{V*})u\|_{m_h} &\leq C_H \|(P_h^H - P_h^V)u\|_m \\ &\leq C_H (\|(P_h^H - I)u\|_m + \|(I - P_h^V)u\|_m) \\ &\leq C_H (\|(P_h^H - I)u\|_m + C_V \alpha^{-1/2} \|(I - P_h^V)u\|_{\tilde{a}}). \end{aligned}$$

Schließlich gilt mit (3.17)

$$\begin{aligned} \|(P_h^H - I)u\|_m &\leq \|(P_h^H - \Pi_h^H)u\|_m + \|(\Pi_h^H - I)u\|_m \\ &\leq C_H \|\Delta m(Q_h^{H*}u)\|_{H_h^*} + \|(I - \Pi_h^H)u\|_m \end{aligned}$$

und analog

$$\|(I - P_h^V)u\|_{\tilde{a}} \leq \tilde{C}_V \|\Delta\tilde{a}(Q_h^{V*}u)\|_{\tilde{V}_h^*} + \|(I - \Pi_h^V)u\|_{\tilde{a}}.$$

Einsetzen der Abschätzungen zu  $(\star)$  und  $(\star\star)$  in Gleichung (3.23) und sortieren der Terme liefert die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.6** (Fehlerabschätzung und Konvergenz der Semidiskretisierung). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.3 und Annahme 3.4. Weiter sei  $\hat{L}_{T,M}$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f_h$  auf  $\tilde{V}_h \times H_h$ . Die Lösung  $u$  von (3.3) erfülle  $u \in C^2([0, T]; Z^V)$  und  $u_h$  sei die Lösung des semidiskreten Problems (3.10).*

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

a) Es sei  $T < \min\{t^*(u^0, v^0), t_h^*(u_h^0, v_h^0)\}$ . Dann erfüllt die geliftete semidiskrete Lösung  $Q_h^V u_h$  die Fehlerabschätzung

$$\|Q_h^V u_h(t) - u(t)\|_{\tilde{a}} + \|Q_h^V u_h'(t) - u'(t)\|_m \leq C e^{(\widehat{L}_{T, M_h} + \widehat{c}_{\text{qm}})t} (1+t) \sum_{i=1}^5 E_i \quad (3.24)$$

für alle  $t \in [0, T]$ . Dabei ist  $C$  unabhängig von  $h$  und  $t$ ,  $\widehat{c}_{\text{qm}} = \widehat{c}_G \widehat{C}_V / 2 + \widehat{\beta}_{\text{qm}}$ ,

$$M_h = \max \left\{ \max \left\{ \frac{1}{\widehat{c}_V}, C_{I_h} \right\} \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V} \times Z^V)}, \left\| \begin{bmatrix} u_h \\ u_h' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V}_h \times H_h)} \right\},$$

und

$$\begin{aligned} E_1 &:= \|u_h^0 - Q_h^{V*} u^0\|_{\tilde{a}_h} + \|v_h^0 - I_h v^0\|_{m_h}, \\ E_2 &:= \|Q_h^{H*} f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - f_h(\cdot, I_h u(\cdot), I_h u'(\cdot))\|_{L^\infty([0, T]; H_h)}, \\ E_3 &:= \|(I - Q_h^V I_h)u\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V})} + \|(I - Q_h^V I_h)u'\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V})} + \|(I - Q_h^V I_h)u''\|_{L^\infty([0, T]; H)}, \\ E_4 &:= \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*} u)\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V}_h^*)} + \|\Delta m(Q_h^{H*} u)\|_{L^\infty([0, T]; H_h^*)} + \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*} u')\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V}_h^*)} \\ &\quad + \|\Delta m(Q_h^{H*} u'')\|_{L^\infty([0, T]; H_h^*)}, \\ E_5 &:= \left\| \max_{\|\psi_h\|_{m_h}=1} |b(u', Q_h^V \psi_h) - b_h(I_h u', \psi_h)| \right\|_{L^\infty(0, t)}. \end{aligned}$$

b) Es sei  $T < t^*(u^0, v^0)$  und  $M := 2 \max \left\{ \frac{1}{\widehat{c}_V}, C_{I_h} \right\} \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V} \times Z^V)}$ . Außerdem gelte

$$E_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 5. \quad (3.25)$$

Dann gibt es ein  $h^* > 0$ , sodass  $u_h$  für alle  $h < h^*$  auf  $[0, T]$  existiert mit

$$\left\| \begin{bmatrix} u_h \\ u_h' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V}_h \times H_h)} \leq M.$$

Außerdem gilt die Fehlerabschätzung (3.24) mit  $M_h = M$  und die geliftete semidiskrete Lösung konvergiert, d.h.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|Q_h^V u_h(t) - u(t)\|_{\tilde{a}} + \|Q_h^V u_h'(t) - u'(t)\|_m = 0, \quad t \in [0, T].$$

*Beweis.* Wir wenden Satz 2.14 mit  $x = [u, u']^\top$  und  $x_h = [u_h, u_h']^\top$  an. Alle Voraussetzungen sind erfüllt:

- $\mathcal{S}$  ist quasimonoton und maximal bzgl.  $Y^*$  wegen Lemma 3.2.

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

- $S_h$  ist mit gleichem Beweis ebenfalls quasimonoton mit Konstante

$$\widehat{c}_{\text{qm}} = \frac{1}{2}\widehat{c}_G\widehat{C}_V + \widehat{\beta}_{\text{qm}}$$

und maximal (bzgl.  $X_h$ ), da wegen Annahme 3.4 die diskreten Bilinearformen die gleichen Eigenschaften haben, wie die kontinuierlichen.

- Annahme 2.9 2) ist erfüllt wegen Annahme 3.4 4) und 5).

Zu a): Wir gehen hier vor wie in [8, Theorem 5.5].  $M_h$  ist konsistent zu Satz 2.14 gewählt, dabei wurde (3.19) verwendet. Außerdem gilt

$$\|Q_h^V u_h(t) - u(t)\|_{\widetilde{a}} + \|Q_h^V u_h'(t) - u'(t)\|_m \leq \sqrt{2}\|Q_h x_h(t) - x(t)\|_X.$$

Auf diese Ungleichung wenden wir die allgemeine Fehlerabschätzung (2.18) an und beschränken die einzelnen Terme auf der rechten Seite. Zunächst ist

$\|x_h^0 - J_h x^0\|_{X_h}$  beschränkt durch  $E_1$  und  $\|r_h(\cdot, x(\cdot))\|_{L^\infty([0,T];X_h)}$  durch  $E_2$ .

Wegen der Wahl des Referenzoperators, (3.11),  $P_h^H = Q_h^V Q_h^{H*}$  und (3.17a) gilt

$$\begin{aligned} \|(Q_h^* - J_h)x'\|_{X_h} &\leq \|(Q_h^{H*} - I_h)u''\|_{m_h} \\ &\leq C_H \|(P_h^H - Q_h^V I_h)u''\|_m \\ &\leq C_H (\|(P_h^H - I)u''\|_m + \|(I - Q_h^V I_h)u''\|_m) \\ &\leq C_H \left( \|(I - \Pi_h^H)u''\|_m + C_H \|\Delta m(Q_h^{H*} u'')\|_{H_h^*} + \|(I - Q_h^V I_h)u''\|_m \right). \end{aligned}$$

Für  $R_h$  gilt wegen Lemma 3.5:

$$\begin{aligned} \|R_h x\|_{X_h} &\leq C \left( \|\Delta \widetilde{a}(Q_h^{V*} u')\|_{\widetilde{v}_h^*} + \|\Delta \widetilde{a}(Q_h^{V*} u)\|_{\widetilde{v}_h^*} + \|\Delta m(Q_h^{H*} u)\|_{H_h^*} \right. \\ &\quad + \|(I - \Pi_h^V)u'\|_{\widetilde{a}} + \|(I - \Pi_h^V)u\|_{\widetilde{a}} + \|(I - \Pi_h^H)u\|_m + \|(I - Q_h^V I_h)u'\|_{\widetilde{a}} \\ &\quad \left. + \max_{\|\psi_h\|_{m_h}=1} |b(u', Q_h^V \psi_h) - b_h(I_h u', \psi_h)| \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für den Referenzfehler gilt schließlich

$$\begin{aligned} \|(I - Q_h J_h)x\|_X &\leq \|(I - P_h^V)u\|_{\widetilde{a}} + \|(I - Q_h^V I_h)u'\|_m \\ &\leq \|(I - \Pi_h^V)u\|_{\widetilde{a}} + \widetilde{C}_V \|\Delta \widetilde{a}(Q_h^{V*} u)\|_{\widetilde{v}_h^*} + \|(I - Q_h^V I_h)u'\|_m, \end{aligned} \quad (3.27)$$

hierbei wurde  $P_h^V = Q_h^V Q_h^{V*}$  und (3.17b) benutzt.

Damit wurden alle Terme aus (2.18) abgeschätzt. Die Abschätzung (3.24) folgt dann durch Sammeln der einzelnen Terme und indem die Fehler der Orthogonalprojektionen durch Interpolationsfehler beschränkt werden.

Zu b): Diese Aussage folgt direkt aus 2.14 b), wobei die Konsistenzbedingungen durch (3.25) ersetzt wurden.  $\square$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

**Spezialfall zur Wahl von  $f_h$**  Die Bilinearformen  $a_h, b_h$  und  $m_h$  hängen von der konkreten Wellengleichung und der Wahl des Finite Elemente Verfahrens ab. Die Fehlerterme müssen im konkreten Fall weiter untersucht werden. Der nichtlineare Fehlerterm

$$E_2 = \|Q_h^{H*} f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - f_h(\cdot, Q_h^{V*} u(\cdot), I_h u'(\cdot))\|_{L^\infty(0,t;H_h)}$$

lässt sich jedoch für folgende konkrete Wahl von  $f_h$  weiter abschätzen:

$$f_h(t, u_h, v_h) = Q_h^{H*} f(t, Q_h^V u_h, Q_h^V v_h)$$

bzw. äquivalent:

$$m_h(f_h(t, u_h, v_h), \varphi_h) = m(f(t, Q_h^V u_h, Q_h^V v_h), Q_h^V \varphi_h) \quad \text{für alle } \varphi_h \in V_h.$$

Diese Wahl ist möglich, wenn man den Liftoperator  $Q_h^V$  explizit anwenden und die rechte Seite der Gleichung exakt (z.B. ohne Quadraturfehler) auswerten kann. Insbesondere vereinfacht sich die Gleichung für konforme Methoden mit  $m_h = m$  und  $Q_h^V = I$  zu

$$m(f_h(t, u_h, v_h), \varphi_h) = m(f(t, u_h, v_h), \varphi_h) \quad \text{für alle } \varphi_h \in V_h,$$

also der  $m$ -Projektion auf  $V_h$ .

Die lokale Lipschitz-Konstante von  $f_h$  hängt nicht von  $h$  ab, da  $Q_h^V$  unabhängig von  $h$  beschränkt ist.

Für den nichtlinearen Fehlerterm  $E_2$  gilt dann mit (3.15):

$$\begin{aligned} E_2 &= \|Q_h^{H*} f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - f_h(\cdot, Q_h^{V*} u(\cdot), I_h u'(\cdot))\|_{L^\infty(0,t;H_h)} \\ &= \|Q_h^{H*} f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - Q_h^{H*} f(\cdot, Q_h^V Q_h^{V*} u(\cdot), Q_h^V I_h u'(\cdot))\|_{L^\infty(0,t;H_h)} \\ &\leq \|Q_h^{H*}\|_{H_h \leftarrow H} \|f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - f(\cdot, P_h^V u(\cdot), Q_h^V I_h u'(\cdot))\|_{L^\infty(0,t;H)} \\ &\leq \frac{1}{c_H} L_{T, \tilde{M}} \left\| \begin{bmatrix} u - P_h^V u \\ u' - Q_h^V I_h u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V} \times H)} \\ &\leq \frac{1}{c_H} L_{T, \tilde{M}} (E_3 + E_4) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\tilde{M} = \max \left\{ \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V} \times H)}, \left\| \begin{bmatrix} P_h^V u \\ Q_h^V I_h u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V} \times H)} \right\}$$

und  $L_{T, \tilde{M}}$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f$  auf  $\tilde{V} \times H$ . Im letzten Schritt wurde dabei

$$\begin{aligned} \|(I - P_h^V)u\|_{\tilde{a}} &\leq \|(I - \Pi_h^V)u\|_{\tilde{a}} + \tilde{C}_V \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*} u)\|_{\tilde{V}_h^*} \\ &\leq \|(I - I_h)u\|_{\tilde{a}} + \tilde{C}_V \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*} u)\|_{\tilde{V}_h^*} \end{aligned}$$

verwendet.

In diesem Fall kann  $E_2$  also gegen  $E_3$  und  $E_4$  abgeschätzt werden.

### 3.3. Zeitdiskretisierung mit Crank-Nicolson

Die Approximationen  $Q_h^V u_h^n \approx u(t^n)$  und  $Q_h^V v_h^n \approx u'(t^n)$  des Crank-Nicolson Verfahrens (2.21) angewendet auf (3.13) sind gegeben durch

$$\begin{bmatrix} u_h^{n+1} \\ v_h^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_h^n \\ v_h^n \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A_h & B_h \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} u_h^{n+1} \\ v_h^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_h^n \\ v_h^n \end{bmatrix} \right) + \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ f^{n+1}(u_h^{n+1}, v_h^{n+1}) + f^n(u_h^n, v_h^n) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

mit Startwerten  $u_h^0$  und  $v_h^0$  gegeben in (3.9b). Dabei ist  $f^n(u_h, v_h) := f(t^n, u_h, v_h)$  für  $[u_h, v_h]^\top \in \tilde{V}_h \times H_h$ .

**Korollar 3.7** (Volldiskretisierungsfehler des Crank-Nicolson Verfahrens für die allgemeine Wellengleichung zweiter Ordnung). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.6. Weiter gelte  $u \in C^4([0, t^*(u^0, v^0)]; H) \cap C^3([0, t^*(u^0, v^0)]; \tilde{V})$  für die Lösung von (3.3) und  $[u_h^n, v_h^n]^\top$  sei die Lösung von (3.28).*

- a) *Es sei  $T < t^*(u^0, v^0)$ ,  $\tau \max\{\hat{L}_{T,M}, \frac{\hat{c}_{qm}}{2}\} < 1$  und  $[u_h^n, v_h^n]^\top$  existiere für alle  $t^n \leq T$ . Weiter sei*

$$M = \max \left\{ \max \left\{ \frac{1}{\hat{c}_V}, C_{I_h} \right\} \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V} \times Z^V)}, \max_{t^n \leq T} \left\| \begin{bmatrix} u_h^n \\ v_h^n \end{bmatrix} \right\|_{\tilde{V}_h \times H_h} \right\}.$$

*Dann gilt für alle  $n > 0$  mit  $t^n = n\tau \leq T$  für die geliftete volldiskrete Lösung die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} & \|Q_h^V u_h^n - u(t^n)\|_{\tilde{a}} + \|Q_h^V v_h^n - u'(t^n)\|_m \\ & \leq C e^{\left(\hat{c}_{qm} + \frac{\hat{L}_{T,M}}{1 - \hat{L}_{T,M}\tau}\right)t^n} (1 + t^n) \left( \sum_{i=1}^5 E_i + \tau^2 E_6 \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

*mit einer Konstanten  $C$  unabhängig von  $\tau$  und  $h$ . Hierbei ist  $\hat{c}_{qm} = \hat{c}_G \hat{C}_V / 2 + \hat{\beta}_{qm}$ ,  $E_i, i = 1, \dots, 5$ , sind gegeben in Satz 3.6 und*

$$E_6 = \|u^{(3)}\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V})} + \|u^{(4)}\|_{L^\infty([0,T]; H)}.$$

- b) *Es sei  $T < t^*(x^0)$  und  $M := 2 \max \left\{ \frac{1}{\hat{c}_V}, C_{I_h} \right\} \left\| \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \right\|_{L^\infty([0,T]; \tilde{V} \times Z^V)}$ . Außerdem gelte*

$$E_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 5. \quad (3.30)$$

*Dann gibt es  $\tau^*, h^* > 0$ , sodass für alle  $h < h^*$  und alle  $\tau < \tau^*$  gilt:  $[u_h^n, v_h^n]^\top$  existiert lokal eindeutig für alle  $n$  mit  $t^n \leq T$  und erfüllt*

$$\max_{t^n \leq T} \left\| \begin{bmatrix} u_h^n \\ v_h^n \end{bmatrix} \right\|_{\tilde{V}_h \times H_h} \leq M.$$

### 3. Abstrakte semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung

Außerdem gilt die Fehlerabschätzung (2.34) und die geliftete volldiskretisierte Lösung konvergiert, d.h.

$$\|Q_h^V u_h^n - u(t^n)\|_{\tilde{a}} + \|Q_h^V v_h^n - u'(t^n)\|_m \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0, \quad t^n \in [0, T].$$

*Beweis.* Der Satz ist eine direkte Anwendung des Satzes 2.16 auf die erste Ordnung Formulierung der allgemeinen Wellengleichung zweiter Ordnung mit

$$\begin{aligned} x &= [u, v]^\top \in X = \tilde{V} \times H \quad \text{und} \\ x_h^n &= [u_h^n, v_h^n]^\top \in X_h = \tilde{V}_h \times H_h. \end{aligned}$$

Dabei gilt  $x \in C^3([0, t^*(x^0)], X)$  wegen  $u \in C^4([0, t^*(u^0, v^0)]; H) \cap C^3([0, t^*(u^0, v^0)]; \tilde{V})$  und außerdem ist

$$\|x^{(3)}\|_{L^\infty([0, T]; X)} \leq \|u^{(3)}\|_{L^\infty([0, T]; \tilde{V})} + \|u^{(4)}\|_{L^\infty([0, T]; H)}.$$

Die Fehlerabschätzung (3.29) erhält man aus der allgemeinen Fehlerabschätzung (2.34) wie im Beweis von Satz 3.6.  $\square$

## 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

In diesem Kapitel soll die Theorie aus Kapitel 3 auf ein konkretes Beispiel angewendet werden. Hierzu wird eine verallgemeinerte Version von (1.1), der semilinearen Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen, betrachtet. Diese Gleichung wird zunächst als Evolutionsgleichung umformuliert und deren analytische Wohlgestelltheit gezeigt. Anschließend wird sie mit einem Finite Elemente Verfahren im Raum semidiskretisiert und der resultierende Fehler wird untersucht.

Dieser Abschnitt baut auf [8, Chapter 6, Chapter 7] auf. Dort wird unter anderem die lineare Wellengleichung mit kinetischer Randbedingung untersucht. Wir orientieren uns an dem dortigen Vorgehen und erweitern die Ergebnisse auf den semilinearen Fall.

### 4.1. Formulierung der Gleichung

#### Klassische Formulierung

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\Delta_\Gamma$  bezeichne den Laplace-Beltrami Operator auf  $\Gamma$  und  $n$  den äußeren Normalenvektor. Zur Definition des Laplace Beltrami Operators sei verwiesen auf [11].

Gesucht ist ein  $u: [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = \tilde{f}_\Omega(t, x, u(t, x)), \quad (0, T) \times \Omega, \quad (4.1a)$$

$$u_{tt}(t, x) + \partial_n u(t, x) - \Delta_\Gamma u(t, x) = \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(t, x)), \quad (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.1b)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad u_t(0, x) = v^0(x), \quad \text{in } \bar{\Omega}. \quad (4.1c)$$

Hierbei sind

- $\tilde{f}_\Omega \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,
- $\tilde{f}_\Gamma \in C^1([0, T] \times \Gamma \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

**Bemerkung:** Man kann mit der abstrakten Theorie auch lineare Dämpfungs- und Advektionsterme berücksichtigen, vgl. [8, Chapters 6,7]. In dieser Arbeit liegt der Fokus jedoch auf den nichtlinearen Termen, wie sich durch diese die Fehleranalyse ändert und was bei der Assemblierung und Implementierung beachtet werden muss. Daher halten wir die nichtlinearen Terme sehr allgemein und beschränken uns für eine übersichtlichere Darstellung auf den obigen linearen Teil.

### Schwache Formulierung

Wir leiten in diesem Abschnitt eine schwache Formulierung der Gleichung passend zum Framework in Kapitel 3 ab.

Multiplizieren von (4.1a) mit einer Testfunktion  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  und partielle Integration liefert

$$\int_{\Omega} u_{tt}\varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\Gamma} \partial_n u \varphi \, ds = \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \varphi \, dx \quad (4.2)$$

für  $t \in (0, t)$ .

Auf  $\Gamma$  gilt ebenfalls eine Version des Integralsatzes von Gauß [11, (3.1)]: Für  $v \in H^2(\Gamma)$  und  $\varphi \in H^1(\Gamma)$  gilt

$$- \int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} v \varphi \, ds = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} v \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds.$$

Damit erhalten wir aus (4.1b) nach Multiplikation mit einer Testfunktion  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Gamma} u_{tt}\varphi \, ds + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \partial_n u \varphi \, ds = \int_{\Gamma} \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \varphi \, ds \quad (4.3)$$

für  $t \in (0, T)$ .

Addition von (4.2) und (4.3) liefert

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int_{\Omega} u_{tt}\varphi \, dx + \int_{\Gamma} u_{tt}\varphi \, ds}^{:=m(u_{tt}, \varphi)} + \overbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds}^{:=a(u_{tt}, \varphi)} \\ & = \int_{\Omega} \left( \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \left( \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

für  $t \in (0, T)$ .

Die Bilinearform

$$m(v, \psi) = \int_{\Omega} v \psi \, dx + \int_{\Gamma} v \psi \, ds$$

ist ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum

$$H := L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$$

und

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

ist eine Bilinearform auf dem Raum

$$V := H^1(\Omega; \Gamma) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) \in H^1(\Gamma)\} \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma).$$

Dieser Raum ist ebenfalls ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\tilde{a}(u, \varphi) := m(u, \varphi) + a(u, \varphi),$$

dies wird zum Beispiel in [11] gezeigt. Somit erfüllt  $a$  die Garding-Ungleichung aus Annahme 3.1 mit  $c_G = \alpha = 1$ . Im Sinne von Abschnitt 3.1 bilden  $V$  und  $H$  ein Gelfand-Tripel

$$V \xhookrightarrow{d} H \simeq H^* \xhookrightarrow{d} V^*,$$

hierbei identifizieren wir  $v \in V$  mit  $(v, \gamma(v)) \in H$ .

**Notation:** Für  $v$  aus  $H$  verwenden wir die Notation  $v = (v_\Omega, v_\Gamma)$ , aber bezeichnen sowohl  $v_\Omega$  als auch für  $v_\Gamma$  wieder mit  $v$ , wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, welche Komponente gemeint ist, zum Beispiel in Integralen über  $\Omega$  bzw.  $\Gamma$ .

Mit  $f: [0, T] \times V \rightarrow V^*$  gegeben durch

$$\langle f(t, u), \varphi \rangle_V = \int_\Omega \left( \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, dx + \int_\Gamma \left( \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, ds \quad (4.5)$$

für alle  $\varphi \in V$  erhalten wir damit aus (4.4) die schwache Formulierung:

Finde  $u: [0, T] \rightarrow V$  mit

$$\langle u''(t), \varphi \rangle_V + a(u(t), \varphi) = \langle f(t, u(t)), \varphi \rangle_V \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in (0, T], \quad (4.6a)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0. \quad (4.6b)$$

**Bemerkung:** Ist  $u$  eine klassische Lösung von (4.1), so ist  $u$  nach obiger Herleitung auch eine schwache Lösung.

Um die Theorie aus Kapitel 3 anwenden zu können, zeigen wir, dass unter geeigneten Voraussetzungen

$$f \in C^1([0, T] \times V; H)$$

gilt und  $f$  zusätzlich lokal Lipschitz-stetig auf  $V$  ist.

**Annahme 4.1.** *Es gelte*

- $\tilde{f}_\Omega \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,
- $\tilde{f}_\Gamma \in C^1([0, T] \times \Gamma \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

*Außerdem existieren*

$$q_\Omega \begin{cases} \leq \frac{d}{d-2}, & d \geq 3, \\ < \infty, & d = 2 \end{cases}$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

und

$$q_\Gamma \begin{cases} \leq \frac{(d-1)}{d-3}, & d \geq 4, \\ < \infty, & d = 2, 3, \end{cases}$$

sodass für alle  $(t, x, u) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}$

$$|\tilde{f}_\Omega(t, x, u)| \leq C(1 + |u|^{q_\Omega}), \quad (4.7a)$$

$$|\nabla \tilde{f}_\Omega(t, x, u)| \leq C(1 + |u|^{q_\Omega-1}) \quad (4.7b)$$

und für alle  $(t, x, u) \in [0, T] \times \Gamma \times \mathbb{R}, k = 0, \dots, m$

$$|\tilde{f}_\Gamma(t, x, u)| \leq C(1 + |u|^{q_\Gamma}), \quad (4.8a)$$

$$|\nabla \tilde{f}_\Gamma(t, x, u)| \leq C(1 + |u|^{q_\Gamma-1}) \quad (4.8b)$$

gilt.

Anschaulich bedeutet Annahme 4.1, dass die Quellterme und deren Ableitungen in  $t$  und  $x$  beschränkt sind und das Wachstum in der 3. Komponente polynomiell mit hinreichend kleiner Potenz beschränkt sein muss. Für  $d = 3$  muss  $q_\Omega \leq 3$  gelten.

**Lemma 4.2.** *Es gelte Annahme 4.1. Dann gilt*

$$f \in C^1([0, T] \times V; H)$$

und  $f$  ist lokal Lipschitz-stetig auf  $V$ .

*Beweis.* Für den Beweis benötigen wir folgendes Einbettungsergebnis für Sobolevräume (siehe z.B. [4, Chapter 2]):  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  sei beschränkt mit Lipschitz-Rand (z.B.  $\mathcal{M} = \Omega, n = d$ ) **oder**  $\mathcal{M}$  sei eine kompakte  $n$ -dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit (z.B.  $\mathcal{M} = \Gamma, n = d - 1$ ). Dann existieren stetige Einbettungen

$$H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{M}) \quad \text{für alle } q \begin{cases} \leq \frac{2n}{n-2}, & n \geq 3, \\ < \infty, & n = 1, 2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Definiere für  $t \in [0, T], u \in H^1(\Omega), x \in \Omega$

$$f_\Omega(t, u)(x) := \tilde{f}_\Omega(t, x, u(x))$$

und für  $t \in [0, T], u \in H^1(\Gamma), x \in \Gamma$

$$f_\Gamma(t, u)(x) := \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)).$$

Wir zeigen zunächst, dass

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

- $f_\Omega \in C^1([0, T] \times H^1(\Omega); L^2(\Omega))$  und
- $f_\Gamma \in C^1([0, T] \times H^1(\Gamma); L^2(\Gamma))$

gilt und die beiden Funktionen lokal Lipschitz-stetig auf  $H^1(\Omega)$  bzw.  $H^1(\Gamma)$  sind. Dabei beschränken wir uns bei den Rechnungen auf  $f_\Gamma$ , die Rechnungen für  $f_\Omega$  gehen analog.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $q_\Gamma \geq 1$  gewählt werden. Wegen dem Einbettungssatz (4.9) und der Wahl von  $g_\Gamma$  existiert die stetige Einbettung

$$H^1(\Gamma) \hookrightarrow L^{2q_\Gamma}(\Gamma). \quad (4.10)$$

Es sei  $t \in [0, T]$  und  $u \in H^1(\Gamma)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f_\Gamma(t, u)\|_{L^2(\Gamma)} &= \|\tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot))\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C \|(1 + |u(\cdot)|^{q_\Gamma})\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C (\sigma(\Gamma) + \|u\|_{L^{2q_\Gamma}(\Gamma)}^{q_\Gamma}) < \infty, \end{aligned}$$

also  $f_\Gamma(t, u) \in L^2(\Gamma)$ . Hierbei ist  $\sigma(\Gamma)$  das Flächenmaß von  $\Gamma$  und es wurde (4.8) und im letzten Schritt (4.10) verwendet.

*Zur Differenzierbarkeit:*

Behauptung: Für  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\eta \in H^1(\Gamma)$  ist die Ableitung gegeben durch

$$\left( [f'_\Gamma(t, u)] \begin{bmatrix} \tau \\ \eta \end{bmatrix} \right) (x) = \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Wegen der Differenzierbarkeit von  $\tilde{f}_\Gamma$  gilt für fast alle  $x \in \Gamma$  mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\tilde{f}_\Gamma(t + \tau, x, u(x) + \eta(x)) - \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) = \int_0^1 \nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau, x, u(x) + \xi\eta) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix} d\xi.$$

Somit gilt für fast alle  $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} &\left| \tilde{f}_\Gamma(t + \tau, x, u(x) + \eta(x)) - \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix} \right| \\ &\leq \left| \left( \int_0^1 \nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau, x, u(x) + \xi\eta(x)) d\xi - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) \right) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix} \right| \\ &\leq \left| \left( \int_0^1 \nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau, x, u(x) + \xi\eta(x)) d\xi - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, x, u(x)) \right) \right| \left| \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

In der letzten Zeile steht  $|\cdot|$  für die euklidische Norm im  $\mathbb{R}^3$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \left\| f_{\Gamma}(t + \tau, u + \eta) - f_{\Gamma}(t, u) - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
&= \left\| \tilde{f}_{\Gamma}(t + \tau, \cdot, u(\cdot) + \eta(\cdot)) - \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq \left\| \int_0^1 \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) \, d\xi - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\| \left\| \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq \left\| \int_0^1 \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) \, d\xi - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{2q_{\Gamma}}{q_{\Gamma}-1}}(\Gamma)} \left\| \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{L^{2q_{\Gamma}}(\Gamma)} \\
&\stackrel{(\star)}{\leq} 2 \left\| \int_0^1 \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) \, d\xi - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{2q_{\Gamma}}{q_{\Gamma}-1}}(\Gamma)} \left[ \frac{(\sigma(\Gamma))^{\frac{1}{2q_{\Gamma}}}}{\|\eta\|_{L^{2q_{\Gamma}}(\Gamma)}} \tau \right] \\
&\leq C \left\| \int_0^1 \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) \, d\xi - \nabla \tilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{2q_{\Gamma}}{q_{\Gamma}-1}}(\Gamma)} \left[ \frac{\tau}{\|\eta\|_{H^1(\Gamma)}} \right], \tag{4.12}
\end{aligned}$$

hierbei wurde die Hölder'sche Ungleichung mit  $\frac{2q_{\Gamma}}{q_{\Gamma}-1}$  und  $2q_{\Gamma}$  und im letzten Schritt die Einbettung (4.10) sowie  $\sigma(\Gamma) < \infty$  benutzt. Außerdem haben wir bei  $(\star)$  folgende Ungleichung für  $q = 2q_{\Gamma} \geq 2$  verwendet:

$$\begin{aligned}
\left\| \left\| \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\| \right\|_{L^q(\Gamma)} &= \|(\tau^2 + (\eta(\cdot))^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^q(\Gamma)} \\
&\leq \|(|\tau| + |\eta(\cdot)|)\|_{L^q(\Gamma)} \\
&\leq \|\tau\|_{L^q(\Gamma)} + \|\eta\|_{L^q(\Gamma)} \\
&\leq 2 \left( \|\tau\|_{L^q(\Gamma)}^2 + \|\eta\|_{L^q(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \left[ \frac{(\sigma(\Gamma))^{\frac{1}{q}}}{\|\eta\|_{L^q(\Gamma)}} \tau \right].
\end{aligned}$$

Hier gilt die zweite Abschätzung wegen der Minkowski-Ungleichung.

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Somit erhalten wir für den Differenzenquotienten aus (4.12) und mit Fubini

$$\begin{aligned}
& \left| \left[ \|\eta\|_{H^1(\Gamma)} \right]^{-1} \right| \left\| f_\Gamma(t + \tau, v + \eta) - f_\Gamma(t, v) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
& \leq C \left\| \left\| \int_0^1 \nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \, d\xi \right\|_{L^{\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma-1}}(\Gamma)} \right\| \\
& \leq C \underbrace{\int_0^1 \left\| \nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta(\cdot)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma-1}}(\Gamma)} \, d\xi}_{:=I(\tau, \eta)}.
\end{aligned}$$

Für  $\eta \rightarrow 0$  in  $H^1(\Gamma)$  folgt wegen der Soboleveinbettung auch  $\eta \rightarrow 0$  in  $L^{2q_\Gamma}(\Gamma)$ . Wir zeigen, dass  $I(\tau, \eta) \rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$  und  $\eta \rightarrow 0$  in  $L^{2q_\Gamma}(\Gamma)$  gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Folge  $(\tau_n, \eta_n)$  in  $\mathbb{R} \times L^{2q_\Gamma}(\Gamma)$  mit  $\tau_n \rightarrow 0$  und  $\eta_n \rightarrow 0$  eine Teilfolge  $(\tau_{n_j}, \eta_{n_j})$  existiert mit

$$I(\tau_{n_j}, \eta_{n_j}) \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Es sei also  $(\tau_n, \eta_n)$  in  $\mathbb{R} \times L^{2q_\Gamma}(\Gamma)$  mit  $\tau_n \rightarrow 0$  und  $\eta_n \rightarrow 0$  und  $\xi \in [0, 1]$ . Nach dem Satz von Riesz-Fischer (Satz A.11) existiert eine Teilfolge  $(\eta_{n_j})$  von  $(\eta_n)$ , und eine Funktion  $\hat{\eta} \in L^{2q_\Gamma}(\Gamma)$ , sodass  $\eta_{n_j}$  fast überall gegen 0 konvergiert und für alle  $j \in \mathbb{N}$  fast überall  $|\eta_{n_j}| \leq \hat{\eta}$  gilt. Daraus folgt auch

$$\nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau_{n_j}, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta_{n_j}(\cdot)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast überall.} \quad (4.13)$$

Mit der Wachstumsbedingung (4.7) folgt außerdem für alle  $j \in \mathbb{N}$  und fast überall

$$\begin{aligned}
& |\nabla \tilde{f}_\Gamma(t + \xi\tau_{n_j}, \cdot, u(\cdot) + \xi\eta_{n_j}(\cdot)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot))| \\
& \leq C(1 + (|u| + |\hat{\eta}|)^{q_\Gamma-1}) + C(1 + |u|^{q_\Gamma-1}) \in L^{\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma-1}}(\Gamma).
\end{aligned}$$

Dies ist also eine integrierbare Majorante und aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt

$$I(\tau_{n_j}, \eta_{n_j}) \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty.$$

Also gilt insgesamt

$$f_\Gamma \in C^1([0, T] \times H^1(\Gamma); L^2(\Gamma))$$

mit der Ableitung gegeben in (4.11).

Um die Stetigkeit der Ableitung zu zeigen seien  $u, v, \eta \in H^1(\Gamma)$  und  $t_1, t_2, \tau \in \mathbb{R}$ . Es gilt

$$\left( [f'_\Gamma(t_1, u) - f'_\Gamma(t_2, v)] \begin{bmatrix} \tau \\ \eta \end{bmatrix} \right) (x) = \nabla \tilde{f}_\Gamma(t_1, x, u(x)) - \nabla \tilde{f}_\Gamma(t_2, x, v(x)) \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \eta(x) \end{bmatrix}.$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Analog zu obiger Begründung erhält man aus dem Satz von Riesz-Fischer und dem Konvergenzssatz von Lebesgue

$$\left( [f'_\Gamma(t_1, u) - f'_\Gamma(t_2, v)] \begin{bmatrix} \tau \\ \eta \end{bmatrix} \right) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2(\Gamma)$$

für  $t_1 \rightarrow t_2$  in  $\mathbb{R}$  und  $u \rightarrow v$  in  $H^1(\Gamma)$ , also die Stetigkeit der Ableitung.

*Zur lokalen Lipschitz-Stetigkeit:*

Wir zeigen nun, dass  $\partial_2 f_\Gamma$  auf Bällen beschränkt ist. Dann folgt die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $f_\Gamma$  auf  $H^1(\Gamma)$  aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, denn wegen

$$f_\Gamma(t, u) - f_\Gamma(t, v) = \int_0^1 [\partial_2 f_\Gamma(t, v + \xi(u - v))] (u - v) \, d\xi$$

gilt dann für  $\|u\|_{H^1(\Gamma)}, \|v\|_{H^1(\Gamma)} \leq M, t \leq t_0$

$$\|f_\Gamma(t, u) - f_\Gamma(t, v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \underbrace{\sup_{\substack{\|\vartheta\|_{H^1(\Gamma)} \leq M \\ \tilde{t} \leq t_0}} \|\partial_2 f_\Gamma(\tilde{t}, \vartheta)\|_{L^2(\Gamma) \leftarrow H^1(\Gamma)}}_{=L_{t_0, M}} \|u - v\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Es sei also  $u \in H^1(\Gamma), \vartheta \in H^1(\Gamma)$  mit  $\|\vartheta\| \leq M$  und  $t \in [0, T]$ . Dann gilt mit der Hölder-Ungleichung mit Koeffizienten  $\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma - 1}$  und  $2q_\Gamma$ , der Wachstumsbedingung (4.7), der Minkowski-Ungleichung und der Einbettung (4.10):

$$\begin{aligned} \|\partial_2 f_\Gamma(t, \vartheta) u\|_{L^2(\Gamma)} &= \|\partial_3 \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, \vartheta(\cdot)) u(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\partial_3 \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, \vartheta(\cdot))\|_{L^{\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma - 1}}} \|u\|_{L^{2q_\Gamma}(\Gamma)} \\ &\leq \|C(1 + |\vartheta|^{q_\Gamma - 1})\|_{L^{\frac{2q_\Gamma}{q_\Gamma - 1}}} \|u\|_{L^{2q_\Gamma}(\Gamma)} \\ &\leq C \left( (\sigma(\Gamma) + \|\vartheta\|_{L^{2q_\Gamma}(\Gamma)}^{q_\Gamma - 1}) \right) \|u\|_{L^{2q_\Gamma}(\Gamma)} \\ &\leq C(1 + M^{q_\Gamma - 1}) \|u\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Wichtig ist, dass  $C$  nur von der Konstante aus der Wachstumsbedingung und dem Einbettungssatz, aber nicht von  $\vartheta$  abhängt. Somit ist diese Abschätzung gleichmäßig für alle  $\vartheta \in H^1(\Gamma)$  mit  $\|\vartheta\| \leq M$  und es folgt die Beschränktheit von  $\partial_2 f_\Gamma$  auf Bällen.

Wir können nun die behaupteten Eigenschaften für  $f$  nachweisen. Dazu definieren wir für  $t \in [0, T], u \in V$

$$\widehat{f}(t, u) := (f_\Omega(t, u), f_\Gamma(t, \gamma(u))).$$

Nach dem bisher gezeigten gilt

$$\widehat{f} \in C^1([0, T] \times V; H)$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

und  $\widehat{f}$  ist lokal Lipschitz-stetig auf  $V$ . Für  $u, \varphi \in V$  und  $t \in [0, T]$  gilt wegen (4.5)

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}(t, u), \varphi \rangle_V &= m(\widehat{f}(t, u), \varphi) \\ &= \int_{\Omega} \left( \widetilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \left( \widetilde{f}_{\Gamma}(t, \cdot, u(\cdot)) \right) \varphi \, ds \\ &= \langle f(t, u), \varphi \rangle_V, \end{aligned}$$

und somit

$$f = \widehat{f}.$$

Dies zeigt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung:** Die Differenzierbarkeit von  $\widetilde{f}_{\Omega}$  und  $\widetilde{f}_{\Gamma}$  nach  $x$  wird in dem Beweis nicht verwendet und es genügt, die Existenz der partiellen Ableitungen nach den anderen beiden Komponenten und deren Beschränktheit zu fordern. In  $x$  müssen die Nichtlinearitäten lediglich messbar und beschränkt, jedoch nicht differenzierbar sein. Dann müssen im Beweis die Gradienten durch Summen aus partiellen Ableitungen ersetzt werden und der Beweis wird unübersichtlicher.

## 4.2. Analytische Wohlgestellttheit

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$  ist für  $u \in V$  definiert als

$$\langle \mathcal{A}u, \varphi \rangle_V = a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds \quad \text{für alle } \varphi \in V \quad (4.14)$$

und  $A: D(A) \rightarrow H$  ist die Einschränkungen von  $\mathcal{A}$  auf  $H$ .

Die Wohlgestellttheit der Gleichung erhalten wir aus Satz 3.3:

**Satz 4.3** (Lokale Wohlgestellttheit der Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen). *Es seien  $u^0 \in D(A)$  und  $v^0 \in H^1(\Omega; \Gamma)$  und es gelte Annahme 4.1 mit  $m = 1$ . Dann ist (4.6) lokal wohlgestellt, denn es gilt:*

- *Es existiert ein  $t^*(u^0, v^0) \in (0, \infty]$  sodass (4.6) für alle  $T < t^*(u^0, v^0)$  eine eindeutige klassische Lösung*

$$u \in C^2([0, T]; L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)) \cap C^1([0, T]; H^1(\Omega; \Gamma)) \cap C([0, T]; D(A))$$

*besitzt.*

- *Falls  $t^*(u^0, v^0) < \infty$ , so gilt*

$$\lim_{t \rightarrow t^*(u^0, v^0)} \left( \|u(t)\|_{\widetilde{a}}^2 + \|u'(t)\|_m^2 \right)^{1/2} = \infty. \quad (4.15)$$

#### 4. Semilineare Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

- Ist  $\tilde{u}$  eine weitere Lösung mit Anfangswerten  $\tilde{u}(0) = \tilde{u}^0, \tilde{u}'(0) = \tilde{v}^0$ , die auf  $[0, T]$  existiert und gilt

$$\sup_{t \in [0, T]} \max \left\{ (\|u(t)\|_{\tilde{a}}^2 + \|u'(t)\|_m^2)^{1/2}, (\|\tilde{u}(t)\|_{\tilde{a}}^2 + \|\tilde{u}'(t)\|_m^2)^{1/2} \right\} \leq M,$$

so folgt

$$\begin{aligned} & (\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{\tilde{a}}^2 + \|u'(t) - \tilde{u}'(t)\|_m^2)^{1/2} \\ & \leq e^{(L_{T,M}+1/2)T} \left( \|u^0 - \tilde{u}^0\|_{\tilde{a}}^2 + \|v^0 - \tilde{v}^0\|_m^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

für alle  $t \in [0, T]$ , wobei  $L_{T,M}$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f$  auf  $V \times H$  ist.

*Beweis.*  $a$  erfüllt die Garding-Ungleichung aus Annahme 3.1 mit  $c_G = \alpha = 1$ . Außerdem gilt  $f \in C^1([0, T] \times V \times H; H)$  ist lokal Lipschitz-stetig auf  $V$  nach Lemma 4.2. Satz 3.3 lässt sich somit direkt anwenden. Da hier  $\mathcal{B} = 0$  gilt, vereinfacht sich die Bedingung  $\mathcal{A}u^0 + \mathcal{B}v^0 \in H$  zu  $u^0 \in D(A)$  und man erhält die zusätzliche Regularität  $u \in C([0, T]; D(A))$  aus dem Zusatz am Ende von Satz 3.3. Schließlich folgt wegen  $c_G = \alpha = \tilde{C}_V = 1$  aus (3.6), dass  $c_{\text{qm}} = 1/2$  gilt.  $\square$

**Bemerkung:** Die analytische Wohlgestelltheit der Gleichung lässt sich deutlich allgemeiner zeigen, wenn von klassischen zu milden Lösungen übergegangen wird. Dann können z.B. auch nichtlineare Dämpfungsterme in der Gleichung berücksichtigt werden. Siehe hierzu [17] bzw. [18].

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

In diesem Abschnitt wird eine Finite Elemente Diskretisierung von Gleichung (4.6) hergeleitet. Dabei verwenden wir die „Bulk-Surface“- Finite Elemente Methode. Die Methode wird lediglich kurz eingeführt, die benötigten Resultate werden zitiert. Zu einer ausführlichen Herleitung der Bulk-Surface Methode sei verwiesen auf [5]. Resultate die zum Abschätzen der linearen Terme benötigen werden, finden sich in [8, Chapter 7]. Hier wird dies alles kurz zusammengefasst, ehe anschließend genauer auf die Diskretisierung der Nichtlinearität eingegangen wird.

**Voraussetzung in diesem Abschnitt:** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d \in \{2, 3\}$  und  $\Gamma \in C^{k+1}$  für ein  $k \geq 1$ .

### 5.1. Die Bulk-Surface Finite Elemente Methode

**Basisapproximation**  $\Omega^\# \subset \mathbb{R}^d$  sei eine polygonale Approximation von  $\Omega$  und  $\mathcal{T}_h^\#$  sei eine aus Simplexes bestehende Triangulierung von  $\Omega^\#$  mit folgenden Eigenschaften:

- Die Knoten von  $\Gamma^\# := \partial\Omega^\#$  liegen auf  $\Gamma$ .
- $h := \max\{\text{diam}(K^\#) \mid K^\# \in \mathcal{T}_h^\#\}$  ist so klein, dass es für jedes  $x \in \Gamma^\#$  eine eindeutige Orthogonalprojektion  $p(x) \in \Gamma$  gibt. Genauer:  $x - p(x)$  steht senkrecht auf dem Tangentialraum von  $\Gamma$  im Punkt  $p(x)$ .
- $\mathcal{T}_h^\#$  ist quasi-uniform, d.h. es existiert ein  $\rho > 0$  sodass

$$\min\{\text{diam } B_{K^\#} \mid K^\# \in \mathcal{T}_h^\#\} \geq \rho h.$$

Hierbei ist  $B_{K^\#}$  der größte Kreis, der in das Element  $K^\#$  gelegt werden kann.

- Jedes  $K^\# \in \mathcal{T}_h^\#$  besitzt maximal eine Kante (bei  $d = 2$ ) bzw. Seite (bei  $d = 3$ ) auf  $\Gamma^\#$ .

Der Simplex  $\widehat{K} \subset \mathbb{R}^d$  bezeichne den Referenzsimplex der Triangulierung und für  $K^\# \in \mathcal{T}_h^\#$  sei  $F_K^\#: \widehat{K} \rightarrow K^\#$  die zugehörige affine Transformation der Form

$$F_K^\#(\widehat{x}) = A_K \widehat{x} + b_K$$

mit  $A_K \in \mathbb{R}^{d \times d}$  invertierbar und  $b_K \in \mathbb{R}^d$ .

#### Exakte Triangulierung

Aus  $\mathcal{T}_h^\#$  lässt sich eine exakte Triangulierung  $\mathcal{T}_h^e$  von  $\Omega$  konstruieren. Wir verweisen auf die Konstruktion in [5]. Zu jedem  $K^\# \in \mathcal{T}_h^\#$  gehört ein  $K^e \in \mathcal{T}_h^e$  das gegeben ist durch

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

eine Transformation  $F_K^e: \widehat{K} \rightarrow K^e$ . Diese hat die Form

$$F_K^e = F_K^\# + \psi_K.$$

Dabei ist  $\psi_K$  und somit auch  $F_K^e$  ein  $C^{k+1}$ -Diffeomorphismus. Für Zellen die keine Randfläche haben ist  $\psi_K = 0$  und somit  $K^e = K^\#$ , für Randzellen bewirkt  $\psi_K$  eine Transformation der Zelle ( $K^\# \approx K^e$ ), so dass  $\Gamma$  exakt parametrisiert wird, es gilt also

$$\bigcup_{K^e \in \mathcal{T}_h^e} K^e = \overline{\Omega}.$$

### Finite Elemente Räume

Wir definieren nun isoparametrische Finite Elemente Räume vom Grad  $p$  mit  $k \geq p \geq 1$ , zur Diskretisierung von  $\Omega$  und  $\Gamma$ . Isoparametrisch bedeutet, dass wir  $\Gamma$  mit dem gleichen Polynomgrad  $p$  approximieren, den auch die Ansatzfunktionen des Raumes besitzen. Nur dann erhält man die erwartete Konvergenzordnung trotz Randapproximation.

$\widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_{n_p}$  sei eine Lagrange Basis auf  $\widehat{K}$  vom Grad  $p$  zu den Knotenpunkten  $\widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_{n_p}$ . Für  $K^e$  sei  $F_K$  die polynomiale Interpolation von  $F_K^e$ , also für  $\widehat{x} \in \widehat{K}$ :

$$F_K(\widehat{x}) := \sum_{i=1}^{n_p} F_K^e(\widehat{a}_i) \widehat{\phi}_i(\widehat{x}).$$

Damit setzen wir  $K := F_K(\widehat{K}) \approx K^e$ .

**Notation:** Für ein festes  $K^\# = F_K^\#(\widehat{K}) \in \mathcal{T}_h^\#$  in der Basistriangulierung bezeichnen wir mit  $K = F_K(\widehat{K})$  die zugehörige isoparametrische Zelle und mit  $K^e = F_K^e(\widehat{K}) \in \mathcal{T}_h^e$  die zugehörige Zelle in der exakten Triangulierung. Um die Darstellung übersichtlicher zu halten, enthalten alle Transformationen nur den Index  $K$  statt  $K^e$  bzw.  $K^\#$  und bezeichnen die Parametrisierungen der zu  $K$  gehörigen Zelle in der entsprechenden Triangulierung.

Wir definieren das Gitter der isoparametrischen Elemente durch

$$\mathcal{T}_h := \{K = F_K(\widehat{K}) \mid K^\# \in \mathcal{T}_h^\#\},$$

das Rechengebiet ist gegeben durch

$$\overline{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \approx \overline{\Omega}$$

mit Rand  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ . Es gilt ([5, 4.1.2]) :

- $\mathcal{T}_h$  ist eine quasi-uniforme Triangulierung von  $\Omega_h$ .
- $\mathcal{T}_h|_{\Gamma_h} := \{F = K \cap \Gamma_h \mid K \in \mathcal{T}_h, K \text{ besitzt Fläche auf } \Gamma_h\}$  ist eine quasi-uniforme Triangulierung von  $\Gamma_h$ .

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Die Finite Element Räume über  $\Omega_h$  bzw.  $\Gamma_h$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} V_{h,p}^\Omega &:= \{v_h \in C(\Omega_h) \mid v_h|_K = \widehat{v}_h \circ (F_K)^{-1} \text{ mit } \widehat{v}_h \in \mathbb{P}_p(\widehat{K}) \text{ für alle } K \in \mathcal{T}_h\}, \\ V_{h,p}^\Gamma &:= \{\vartheta_h \in C(\Gamma_h) \mid \vartheta_h = v_h|_{\Gamma_h} \text{ mit } v_h \in V_{h,p}^\Omega\} \end{aligned}$$

und es gilt

$$\gamma(V_{h,p}^\Omega) = V_{h,p}^\Gamma.$$

Im Folgenden sei  $\phi_1, \dots, \phi_N$  die Lagrange Basis von  $V_{h,p}^\Omega$  zu den Basisknoten  $a_1, \dots, a_N \in \overline{\Omega_h}$  und  $\phi_1^\Gamma, \dots, \phi_{N_\Gamma}^\Gamma$  sei die Lagrange Basis von  $V_{h,p}^\Gamma$  zu den Basisknoten  $b_1, \dots, b_{N_\Gamma} \in \Gamma_h$ . Natürlich gilt  $\mathfrak{B} := \{b_1, \dots, b_{N_\Gamma}\} \subset \{a_1, \dots, a_N\} =: \mathfrak{A}$ .

### Liftooperator

Wie in [5, Section 4],[8] definieren wir  $G_h: \Omega_h \rightarrow \Omega$  durch

$$G_h|_K := F_K^e \circ F_K^{-1} \text{ für alle } K \in \mathcal{T}_h.$$

In [5, Proposition 4.4] wird gezeigt, dass  $G_h$  ein Homöomorphismus ist, mit  $G_h|_K \in C^{k+1}(K)$  für alle  $K \in \mathcal{T}_h$ . Damit können wir für Funktionen  $v_h: \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vartheta_h: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$  deren Lifts  $v_h^l: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\vartheta_h^l: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  definieren durch

$$\begin{aligned} v_h^l(x) &:= v_h(G_h^{-1}(x)), \\ \vartheta_h^l(x) &:= \vartheta_h(G_h^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Wegen der Definition gilt für  $v_h \in V_{h,p}^\Omega$

$$\gamma(v_h^l) = \gamma(v_h)^l.$$

Außerdem gilt nach Konstruktion  $G_h(a) = a$  für alle Basisknoten  $a \in \mathfrak{A}$  von  $\mathcal{T}_h$  und somit

$$v_h^l(a) = v_h(a). \tag{5.1}$$

Die Liftooperatoren sind invertierbar und die inversen Liftooperatoren sind für  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vartheta: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} v^{-l}(x) &:= v(G_h(x)), \\ \vartheta^{-l}(x) &:= \vartheta(G_h(x)). \end{aligned}$$

Schließlich gelten nach [5, Prop. 4.9, Prop. 4.13] bzw. [8, Lemma 7.1] Norm-Äquivalenzen bezüglich des Liftooperators:

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

**Lemma 5.1.** *Es existieren  $C_{\Omega, \Omega_h} > c_{\Omega, \Omega_h} > 0$ ,  $C_{\Gamma, \Gamma_h} > c_{\Gamma, \Gamma_h} > 0$  sodass für alle  $v_h \in V_{h,p}^\Omega$ ,  $\vartheta_h \in V_{h,p}^\Gamma$  gilt:*

$$c_{\Omega, \Omega_h} \|v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C_{\Omega, \Omega_h} \|v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.2a)$$

$$c_{\Omega, \Omega_h} \|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq C_{\Omega, \Omega_h} \|\nabla v_h^l\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.2b)$$

$$c_{\Gamma, \Gamma_h} \|\vartheta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\vartheta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C_{\Gamma, \Gamma_h} \|\vartheta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \quad (5.2c)$$

$$c_{\Gamma, \Gamma_h} \|\nabla_\Gamma \vartheta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\nabla_\Gamma \vartheta_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \leq C_{\Gamma, \Gamma_h} \|\nabla_\Gamma \vartheta_h^l\|_{L^2(\Gamma)} \quad (5.2d)$$

### Diskrete $L^q$ -Normen

Für die spätere Analyse benötigen wir diskrete Versionen der  $L^q$ -Normen auf  $V_{h,p}^\Omega$  und  $V_{h,p}^\Gamma$ . Diese definieren wir für  $q \in [2, \infty)$ ,  $v_h \in V_{h,p}^\Omega$  und  $\vartheta_h \in V_{h,p}^\Gamma$  durch

$$\|v_h\|_{q, \Omega} := h^{\frac{d}{q}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |v_h(a_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{bzw.} \quad (5.3a)$$

$$\|\vartheta_h\|_{q, \Gamma} := h^{\frac{d}{q}} \left( \sum_{b_i \in \mathfrak{B}} |\vartheta_h(b_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5.3b)$$

**Lemma 5.2.** *Für alle  $q \in [2, \infty)$  ist  $\|\cdot\|_{q, \Omega}$  äquivalent zu  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega_h)}$  auf  $V_{h,p}^\Omega$  mit Konstanten, die unabhängig von  $h$  sind.*

*Die analoge Aussage gilt für  $V_{h,p}^\Gamma$ ,  $\|\cdot\|_{q, \Gamma}$  und  $\|\cdot\|_{L^q(\Gamma_h)}$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage nur für  $V_{h,p}^\Omega$ , die Argumentation für  $V_{h,p}^\Gamma$  läuft analog.

Es sei  $V_h^{\hat{K}} = \mathbb{P}_p(\hat{K})$  der Finite Elemente Raum über dem Referenzsimplex. Auf diesem definieren wir die diskrete Norm

$$\|\hat{v}_h\|_{q, \hat{K}} := \left( \sum_{i=1}^{n_p} |\hat{v}_h(\hat{a}_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, existieren  $c_{\hat{K}}, C_{\hat{K}} > 0$ , sodass für alle  $\hat{v}_h \in V_h^{\hat{K}}$  gilt:

$$c_{\hat{K}} \|\hat{v}_h\|_{q, \hat{K}}^q \leq \|\hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})}^q \leq C_{\hat{K}} \|\hat{v}_h\|_{q, \hat{K}}^q. \quad (5.4)$$

Desweiteren existieren wegen der Quasiuniformität von  $\mathcal{T}_h$  Konstanten  $c', C'$ , sodass für hinreichen kleine  $h$  und alle  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $\hat{x} \in \hat{K}$  gilt

$$c' h^d \leq |\det DF_K(\hat{x})| \leq C' h^d. \quad (5.5)$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Dies folgt aus [5, Proposition 4.1 und Proposition 4.7]. Außerdem gilt ebenfalls wegen der Quasiuniformität, dass die maximale Anzahl an Zellen mit einem gemeinsamen Knoten unabhängig von  $h$  beschränkt ist, d.h. es existiert ein  $N_{\mathcal{T}} < \infty$ , sodass für alle  $h$  hinreichend klein gilt

$$\max_{i=1}^N |\{K \in \mathcal{T}_h \mid a_i \in \overline{K}\}| \leq N_{\mathcal{T}} < \infty. \quad (5.6)$$

Mit dem Transformationsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^q(\Omega_h)}^q &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |v_h|^q dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\widehat{K}} |v_h \circ F_K|^q |\det DF_K| dx \end{aligned}$$

und daraus mit (5.5) und (5.4)

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^q(\Omega_h)}^q &\geq c' h^d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\overbrace{v_h \circ F_K}^{\in V_h^{\widehat{K}}}\|_{L^q(\widehat{K})}^q \\ &\geq c' c_{\widehat{K}} h^d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h \circ F_K\|_{q, \widehat{K}}^q \\ &= c' c_{\widehat{K}} h^d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{n_p} |v_h(F_K(\widehat{a}_i))|^q \\ &\geq c' c_{\widehat{K}} h^d \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |v_h(a_i)|^q \\ &= c' c_{\widehat{K}} \|v_h\|_{q, \Omega}^q. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir unter zusätzlicher Ausnutzung von (5.6)

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^q(\Omega_h)}^q &\leq C' C_{\widehat{K}} h^d \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{n_p} |v_h(F_K(\widehat{a}_i))|^q \\ &\leq C' C_{\widehat{K}} N_{\mathcal{T}} h^d \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |v_h(a_i)|^q \\ &\leq C' C_{\widehat{K}} N_{\mathcal{T}} \|v_h\|_{q, \Omega}^q. \end{aligned}$$

Alle Konstanten sind unabhängig von  $h$ , damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

### Interpolation

Es seien

$$\begin{aligned} I_{h, \Omega} &: (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow V_{h,p}^{\Omega} \quad \text{und} \\ I_{h, \Gamma} &: (C(\Gamma), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow V_{h,p}^{\Gamma} \end{aligned}$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

die Lagrange Interpolationsoperatoren bezüglich den Basisknoten der jeweiligen Triangulierung, d.h. für  $v \in C(\overline{\Omega})$  und  $\vartheta \in C(\Gamma)$  gilt

$$I_{h,\Omega}v = \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} v(a_i)\phi_i \quad \text{bzw.}$$

$$I_{h,\Gamma}\vartheta = \sum_{b_i \in \mathfrak{B}} \vartheta(b_i)\phi_i^\Gamma.$$

Diese Operatoren sind wohldefiniert, da alle Basisknoten nach Konstruktion entweder im Inneren von  $\Omega$  oder auf  $\Gamma$  liegen.

Wir sammeln einige Eigenschaften, die wir für die Analyse benötigen.

- Die Interpolationsoperatoren sind linear.
- Sie sind bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  unabhängig von  $h$  beschränkt, denn mit

$$\widehat{C}_{I_h} := \left\| \sum_{i=1}^{n_p} |\widehat{\phi}_i| \right\|_\infty \quad (5.7)$$

gilt

$$\begin{aligned} \|I_{h,\Omega}v\|_\infty &\leq \left\| \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |v(a_i)\phi_i| \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \max_{a_i \in \mathfrak{A}} |v(a_i)| \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |\phi_i| \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |\phi_i| \right\|_\infty \|v\|_\infty \\ &\leq \widehat{C}_{I_h} \|v\|_\infty \end{aligned} \quad (5.8a)$$

und analog

$$\|I_{h,\Gamma}\vartheta\|_\infty \leq \widehat{C}_{I_h} \|\vartheta\|_\infty. \quad (5.8b)$$

Da für  $d = \{2, 3\}$  die Einbettungen

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \quad \text{bzw.}$$

$$H^s(\Gamma) \hookrightarrow C(\overline{\Gamma})$$

für alle  $s \geq 2$  stetig sind, sind die Interpolationsoperatoren auch auf diesen Räumen definiert ebenfalls stetig.

- Es gilt für  $v \in C(\overline{\Omega})$ :

$$\gamma(I_{h,\Omega}v) = I_{h,\Gamma}\gamma(v)$$

Ferner gelten folgende Fehlerabschätzungen ([5, Prop. 5.4], [8, Lemma 7.2]):

**Lemma 5.3.** Für  $1 \leq r \leq p \leq k$  existiert eine Konstante  $C$ , sodass für alle  $v \in H^{r+1}(\Omega)$  und für alle  $\vartheta \in H^{r+1}(\Gamma)$  gilt:

$$\|v - (I_{h,\Omega}v)^l\|_{L^2(\Omega)} + h\|v - (I_{h,\Omega}v)^l\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{r+1}\|v\|_{H^{r+1}(\Omega)}, \quad (5.9a)$$

$$\|\vartheta - (I_{h,\Gamma}\vartheta)^l\|_{L^2(\Gamma)} + h\|\vartheta - (I_{h,\Gamma}\vartheta)^l\|_{H^1(\Gamma)} \leq Ch^{r+1}\|\vartheta\|_{H^{r+1}(\Gamma)}. \quad (5.9b)$$

## 5.2. Die semidiskretisierte Gleichung

Mit dem Finite Elemente Verfahren aus Abschnitt 5.1 leiten wir nun eine Semidiskretisierung von Gleichung (4.1) bzw. (4.6) her. Als Finite Elemente Raum wählen wir  $V_h = V_{h,p}^\Omega$ . Die Diskretisierungen  $m_h, a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$  von  $m$  und  $a$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} m_h(v_h, \psi_h) &:= \int_{\Omega_h} v_h \psi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} v_h \psi_h \, ds, \\ a_h(u_h, \varphi_h) &:= \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \nabla_{\Gamma_h} \varphi_h \, ds. \end{aligned}$$

Weiter ist  $\tilde{a}_h := m_h + a_h$ . Dies ist alles analog zu [8, Chapter 7.2].

Neu im Vergleich zu dieser Arbeit ist die Diskretisierung der Nichtlinearität  $f$ . Für die allgemeine Diskretisierung am Ende von Kapitel 3.2 ist die Kenntnis des Liftoperators erforderlich. Für beliebig komplexe Gebiete kennen wir aber nur die Existenz dieses Liftoperators und können diesen für theoretische Zwecke verwenden; eine Implementierung ist jedoch zu aufwendig und kompliziert (vgl. [5], dort wird der Liftoperator explizit angegeben). Wir verwenden zur Diskretisierung der Nichtlinearität daher den Interpolationsoperator und definieren  $f_h: [0, T] \times \tilde{V}_h \rightarrow H_h$  durch

$$m_h(f_h(t, u_h), \varphi_h) := \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u_h^l(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, dx + \int_{\Gamma_h} I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u_h^l(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, ds \quad (5.10)$$

für alle  $\varphi_h \in V_h$ .

**Bemerkung:** Da die Interpolation lediglich Punktauswertungen in den Basisknoten erfordert und diese invariant unter dem Lift sind muss  $u_h^l$  zur Implementierung nicht berechnet werden.

Die Bulk-Surface-Finite Elemente Approximation an die Lösung von Gleichung (4.1) ist gegeben als Lösung  $u_h: [0, T] \rightarrow V_h$  von

$$m_h(u_h''(t), \varphi_h) + a_h(u_h(t), \varphi_h) = m_h(f_h(t, u_h(t)), \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (5.11a)$$

$$u_h(0) = u_h^0, \quad u_h'(0) = v_h^0. \quad (5.11b)$$

### Semidiskretisierung im allgemeinen Setting von Kapitel 3.2

Analog zu  $H^1(\Omega; \Gamma)$  definieren wir für alle  $r \geq 1$  die Räume

$$H^r(\Omega; \Gamma) := \{v \in H^r(\Omega) \mid \gamma(v) \in H^r(\Gamma)\}$$

mit zugehörigen Normen

$$\|v\|_{H^r(\Omega; \Gamma)}^2 = \|v\|_{H^r(\Omega)}^2 + \|\gamma(v)\|_{H^r(\Gamma)}^2. \quad (5.12)$$

In folgender Definition werden die Operatoren und Abbildungen aus dem allgemeinen Setting aus Kapitel 3.2 für die Bulk-Surface Methode konkretisiert.

**Definition 5.4** (Definition von Interpolation und Lifts).

1) Wir setzen

$$Z^V := H^2(\Omega; \Gamma) \xrightarrow{d} V.$$

2) Wir definieren den Interpolationsoperator  $I_h \in \mathcal{L}(Z^V; H_h)$  durch  $I_h := I_{h, \Omega}$ .

3) Der Liftoperator sei gegeben durch

$$Q_h^V v = v^l.$$

Wegen Lemma 5.1 gilt  $Q_h^V \in \mathcal{L}(\tilde{V}_h; V)$ .

**Bemerkung:** Wegen  $H^2(\Omega; \Gamma) \xrightarrow{d} C(\bar{\Omega})$  ist der Interpolationsoperator in 2) wohldefiniert und wegen (5.7) ist

$$C_{I_h} = \|I_h\|_{H_h \leftarrow Z^V}$$

unabhängig von  $h$  beschränkt.

**Lemma 5.5.** *Es gelten (3.11) und (3.12) aus Annahme 3.4, d.h. es existieren Konstanten  $C_H \geq c_H > 0$ ,  $\tilde{C}_V \geq \tilde{c}_V > 0$ , sodass für alle  $\varphi_h \in V_h$  gilt*

$$\begin{aligned} c_H \|Q_h^V \varphi_h\|_m &\leq \|\varphi_h\|_{m_h} \leq C_H \|Q_h^V \varphi_h\|_m, \\ \tilde{c}_V \|Q_h^V \varphi_h\|_{\tilde{a}} &\leq \|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h} \leq \tilde{C}_V \|Q_h^V \varphi_h\|_{\tilde{a}}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Folgt direkt auf Lemma 5.1. □

### Wohlgestelltheit der diskretisierten Gleichung

Wir zeigen die lokale Lipschitz-Stetigkeit der diskretisierten Nichtlinearität, dann ist die semidiskretisierte Gleichung nach dem Satz von Picard-Lindelöf lokal wohlgestellt.

**Lemma 5.6.** *Es gelte Annahme 4.1. Dann ist  $f_h: [0, T] \times \tilde{V}_h \rightarrow H_h$  lokal Lipschitz-stetig auf  $\tilde{V}_h$  mit Konstante*

$$\widehat{L}_{T,M} = C \left( \sigma(\Omega)^{\frac{q_\Omega-1}{2q_\Omega}} + \sigma(\Gamma)^{\frac{q_\Gamma-1}{2q_\Gamma}} + 2M^{q_\Omega-1} + 2M^{q_\Gamma-1} \right).$$

Dabei ist  $C$  unabhängig von  $h$  und die Koeffizienten  $q_\Omega$  und  $q_\Gamma$  stammen aus Annahme 4.1.

*Beweis.* Der Beweis läuft analog zum kontinuierlichen Fall in Satz 4.2. Wegen der Interpolation können wir hier jedoch nicht direkt wie im kontinuierlichen Fall vorgehen, sondern benötigen einen Trick. Dafür verwenden wir die diskreten Normen aus (5.3), die nach Lemma 5.2 äquivalent zu den  $L^q$ -Normen sind, mit Äquivalenzkonstanten, die nicht von  $h$  abhängen.

Es seien  $M > 0, t < T$  und  $u_h, v_h \in V_h$  mit  $\|u_h\|_{\tilde{a}_h}, \|v_h\|_{\tilde{a}_h} < M$ .

Mit der Definition von  $f_h$  und der Cauchy Schwarz Ungleichung in  $L^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Gamma)$  gilt

$$\begin{aligned} & \|f_h(t, u_h) - f_h(t, v_h)\|_{m_h} \\ &= \sup_{\|\varphi_h\|_{m_h}=1} m_h(f_h(t, u_h) - f_h(t, v_h), \varphi_h) \\ &= \sup_{\|\varphi_h\|_{m_h}=1} \left[ \int_{\Omega_h} \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u_h^l(\cdot))(x) - I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, v_h^l(\cdot))(x) \right) \varphi_h(x) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_h} \left( I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u_h^l(\cdot))(x) - I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, v_h^l(\cdot))(x) \right) \varphi_h(x) ds \right] \\ &\leq \|I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u_h^l(\cdot)) - I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, v_h^l(\cdot))\|_{L^2(\Omega_h)} \\ & \quad + \|I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u_h^l(\cdot)) - I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, v_h^l(\cdot))\|_{L^2(\Gamma_h)} \end{aligned}$$

Wir schätzen im Folgenden den ersten Summanden weiter ab.

Wegen der Soboleveinbettung (4.9) und der Wahl von  $q_\Omega$  in Annahme 4.1 existiert ein  $C > 0$  sodass für alle  $v_h \in V_h$  gilt:

$$\|v_h\|_{2q_\Omega, \Omega} \leq C \|v_h\|_{L^{2q_\Omega}(\Omega_h)} \leq C \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}. \quad (5.13)$$

Man sieht z.B. in [2, Theorem 4.12], dass die Konstante im Einbettungssatz in unserem Fall nicht von  $h$  abhängt und somit auch  $C$  unabhängig von  $h$  ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 & \|I_{h,\Omega}\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u_h^l(\cdot)) - I_{h,\Omega}\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, v_h^l(\cdot))\|_{L^2(\Omega_h)} \\
 & \leq C \|I_{h,\Omega}\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u_h(\cdot)) - I_{h,\Omega}\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, v_h(\cdot))\|_{2,\Omega} \\
 & = Ch^{\frac{d}{2}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |\tilde{f}_\Omega(t, a_i, u_h(a_i)) - \tilde{f}_\Omega(t, a_i, v_h(a_i))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & = Ch^{\frac{d}{2}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} \left| \int_0^1 \partial_3 \tilde{f}_\Omega(t, a_i, v_h(a_i) + s(u_h(a_i) - v_h(a_i))) ds (u_h(a_i) - v_h(a_i)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{\frac{d(q_\Omega-1)}{2q_\Omega}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} \left( \int_0^1 |\partial_3 \tilde{f}_\Omega(t, a_i, v_h(a_i) + s(u_h(a_i) - v_h(a_i)))| ds \right)^{\frac{2q_\Omega}{q_\Omega-1}} \right)^{\frac{q_\Omega-1}{2q_\Omega}} \\
 & \quad h^{\frac{d}{2q_\Omega}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} |u_h(a_i) - v_h(a_i)|^{2q_\Omega} \right)^{\frac{1}{2q_\Omega}} \\
 & \leq Ch^{\frac{d(q_\Omega-1)}{2q_\Omega}} \left( \sum_{a_i \in \mathfrak{A}} (1 + (|u_h(a_i)| + |v_h(a_i)|)^{q_\Omega-1})^{\frac{2q_\Omega}{q_\Omega-1}} \right)^{\frac{q_\Omega-1}{2q_\Omega}} \|u_h - v_h\|_{2q_\Omega,\Omega} \\
 & \leq C \left( \|1\|_{\frac{2q_\Omega}{q_\Omega-1},\Omega} + \|u_h\|_{2q_\Omega,\Omega}^{q_\Omega-1} + \|v_h\|_{2q_\Omega,\Omega}^{q_\Omega-1} \right) \|u_h - v_h\|_{2q_\Omega,\Omega} \\
 & \leq C \left( \sigma(\Omega)^{\frac{q_\Omega-1}{2q_\Omega}} + 2M^{q_\Omega-1} \right) \|u_h - v_h\|_{H^1(\Omega_h)}
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Definition der diskreten Normen, die diskreten Versionen der Hölder- und Minkowski-Ungleichungen, die Wachstumsbedingung aus Annahme 4.1 sowie die (5.13) verwendet. Im letzten Schritt haben wir außerdem die Abschätzung

$$\sigma(\Omega_h) \leq C\sigma(\Omega)$$

verwendet, die unabhängig von  $h$  erfüllt ist. Mit analogen Argumenten für  $\Gamma_h$  folgt die Behauptung. □

### 5.3. Fehlerabschätzung der Semidiskretisierung

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz der Bulk-Surface Finite Elemente Methode gezeigt. Dazu werden die Voraussetzungen von Satz 3.6 nachgeprüft und die einzelnen Fehlerterme für unser konkretes Verfahren abgeschätzt.

Zur Vorbereitung des Hauptresultates folgen zwei Lemmata, die beide Spezialfälle von Aussagen aus [8] sind.

5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

**Lemma 5.7.** Für  $1 \leq r \leq p$  und für alle  $v \in H^{r+1}(\Omega; \Gamma)$  gilt:

$$\|(I - Q_h^V I_h)v\|_m + h\|(I - Q_h^V I_h)v\|_{\tilde{a}} \leq Ch^{r+1}\|v\|_{H^{r+1}(\Omega; \Gamma)}.$$

*Beweis.* Die Gleichung folgt direkt aus Lemma 5.3.  $\square$

**Lemma 5.8.** Für alle  $u \in H^1(\Omega; \Gamma)$  und  $v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$  gilt

$$\begin{aligned} \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V^*} u)\|_{\tilde{v}_h^*} &\leq Ch^p \|u\|_{\tilde{a}}, \\ \|\Delta m(Q_h^{H^*} v)\|_{H_h^*} &\leq Ch^p \|v\|_m. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für  $u_h, \varphi_h \in V_{h,p}^\Omega \times V_{h,p}^\Gamma$  gelten folgende Abschätzungen:

$$A_1 := \left| \int_{\Omega} u_h^l \varphi_h^l dx - \int_{\Omega_h} u_h \varphi_h dx \right| \leq Ch^p \|u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \|\varphi_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \quad (5.14a)$$

$$A_2 := \left| \int_{\Omega} \nabla u_h^l \nabla \varphi_h^l dx - \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla \varphi_h dx \right| \leq Ch^p \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \|\nabla \varphi_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \quad (5.14b)$$

$$A_3 := \left| \int_{\Gamma} u_h^l \varphi_h^l dx - \int_{\Gamma_h} u_h \varphi_h dx \right| \leq Ch^{p+1} \|u_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\varphi_h\|_{L^2(\Gamma_h)}, \quad (5.14c)$$

$$A_4 := \left| \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_h^l \nabla_{\Gamma} \varphi_h^l dx - \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \nabla_{\Gamma_h} \varphi_h dx \right| \leq Ch^{p+1} \|\nabla_{\Gamma_h} u_h\|_{L^2(\Gamma_h)} \|\nabla_{\Gamma_h} \varphi_h\|_{L^2(\Gamma_h)}. \quad (5.14d)$$

Dies folgt direkt aus [8, Lemma 7.3]. Hieraus folgt für  $u_h, \varphi_h \in V_h$  mit den Definitionen von  $\Delta \tilde{a}$  und  $\Delta m$

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{a}(u_h, \varphi_h)| &= |\tilde{a}(Q_h^V u_h, Q_h^V \varphi_h) - \tilde{a}_h(u_h, \varphi_h)| \\ &\leq \sum_{i=1}^4 A_i \\ &\leq Ch^p \|u_h\|_{\tilde{a}_h} \|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

und

$$\begin{aligned} |\Delta m(u_h, \varphi_h)| &= |m(Q_h u_h, Q_h \varphi_h) - m_h(u_h, \varphi_h)| \\ &\leq A_1 + A_3 \\ &\leq Ch^p \|u_h\|_{m_h} \|\varphi_h\|_{m_h}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Für  $u \in H^1(\Omega; \Gamma)$  folgt somit aus (5.15):

$$\begin{aligned} \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*}u)\|_{\tilde{V}_h^*} &= \sup_{\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}=1} |\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*}u, \varphi_h)| \\ &\leq \sup_{\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}=1} Ch^p \|Q_h^{V*}u\|_{\tilde{a}_h} \|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h} \\ &= Ch^p \|Q_h^{V*}u\|_{\tilde{a}_h} \\ &\leq \tilde{c}_V^{-1} Ch^p \|u\|_{\tilde{a}}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt (3.12) verwendet:

$$\begin{aligned} \|Q_h^{V*}u\|_{\tilde{a}_h} &= \sup_{\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}=1} \tilde{a}_h(Q_h^{V*}u, \varphi_h) \\ &\leq \sup_{\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}=1} \tilde{a}(u, Q_h^V \varphi_h) \\ &\leq \sup_{\|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h}=1} \|u\|_{\tilde{a}} \tilde{c}_V^{-1} \|\varphi_h\|_{\tilde{a}_h} \leq \tilde{c}_V^{-1} \|u\|_{\tilde{a}}. \end{aligned}$$

Analog folgt für  $v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$  aus (5.16) und (3.11) die andere Abschätzung.  $\square$

**Lemma 5.9.** *Es sei  $q = \max\{2, p\}$ ,  $u \in Z$  und es gelte*

- $\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u(\cdot)) \in H^q(\Omega)$ ,
- $\tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot)) \in H^q(\Gamma)$

für alle  $t \in [0, T]$ .

Dann gilt für alle  $t \in [0, T]$

$$\|Q_h^{H*}f(t, u) - f_h(t, I_h u)\|_{m_h} \leq Ch^p \left( \|\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u(\cdot))\|_{H^q(\Omega)} + \|\tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(\cdot))\|_{H^q(\Gamma)} \right).$$

*Beweis.* Mit der Definition von  $f$  und  $f_h$  erhalten wir für den zu untersuchenden Fehler:

$$\begin{aligned} &\|Q_h^{H*}f(t, u) - f_h(t, I_h u)\|_{m_h} \\ &= \sup_{\|\varphi_h\|_{m_h}=1} m_h(Q_h^{H*}f(t, u) - f_h(t, I_h u), \varphi_h) \\ &= \sup_{\|\varphi_h\|_{m_h}=1} \left[ m(f(t, u), Q_h^V \varphi_h) - m_h(f_h(t, I_h u), \varphi_h) \right] \\ &= \sup_{\|\varphi_h\|_{m_h}=1} \left[ \int_\Omega \tilde{f}_\Omega(t, x, u(x)) \varphi_h^l(x) dx - \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_\Omega(t, \cdot, (I_{h,\Omega} u)^l(\cdot))(x) \varphi_h(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\Gamma \tilde{f}_\Gamma(t, x, \gamma(u)(x)) \varphi_h^l(x) ds - \int_{\Gamma_h} I_{h,\Gamma} \tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, (I_{h,\Gamma} \gamma(u))^l(\cdot))(x) \varphi_h(x) ds \right]. \end{aligned}$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Es sei  $\varphi_h \in V_h$  mit  $\|\varphi_h\|_{m_h} = 1$ . Für den Fehler in  $\Omega$  gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, x, u(x)) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, (I_{h,\Omega} u)^l(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, x, u(x)) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, dx \\
&= \underbrace{\int_{\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, x, u(x)) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega} \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right)^l(x) \varphi_h^l(x) \, dx}_{(I)} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right)^l(x) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, dx}_{(II)},
\end{aligned}$$

dabei wurde im ersten Schritt die Definition der Knoteninterpolation ausgenutzt: Die äußere Interpolation hängt nur von den Funktionswerten an den Basisknoten ab und die innere Interpolation ändert diese nicht und kann somit weggelassen werden.

Wir schätzen die Terme (I) und (II) ab.

Zu (I): Hier erhalten wir mit (5.2a) und der Interpolationsabschätzung (5.9a):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, x, u(x)) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega} \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right)^l(x) \varphi_h^l(x) \, dx \\
&\leq \left\| \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) - \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right)^l \right\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_h^l\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{c_{\Omega, \Omega_h}} C h^p \|\tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot))\|_{H^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Zu (II): Es gilt  $I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \in V_{h,p}^{\Omega}$  und wir können Abschätzung (5.14a) anwenden:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right)^l(x) \varphi_h^l(x) \, dx - \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot))(x) \varphi_h(x) \, dx \\
&\leq C h^p \left\| I_{h,\Omega} \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^2(\Omega_h)} \|\varphi_h(\cdot)\|_{L^2(\Omega_h)} \\
&\leq C h^p \left\| \tilde{f}_{\Omega}(t, \cdot, u(\cdot)) \right\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass für  $v \in H^2(\Omega)$  wegen der Interpolationsabschätzung aus Lemma 5.7 und Gleichung (5.2a) gilt:

$$\begin{aligned}
\|I_{h,\Omega} v\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq C_{\Omega, \Omega_h} \|I_{h,\Omega} v^l\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_{\Omega, \Omega_h} \left( \|v - (I_{h,\Omega} v)^l\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C_{\Omega, \Omega_h} \left( C h^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Für den Fehlerterme bezüglich  $\Gamma$  gelten die analogen Abschätzungen, somit folgt insgesamt die Behauptung durch Sammeln der einzelnen Terme. □

Mit dieser Vorarbeit können wir nun das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen, eine Fehlerabschätzung für die Bulk-Surface Finite Elemente-Approximation an die Lösung der Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen:

**Satz 5.10.** *Es sei  $1 \leq p \leq k$  und  $\Gamma \in C^{k+1}$ . Weiter sei  $u$  die Lösung von (4.1) auf  $[0, T]$  mit*

- $u \in C^2([0, T]; H^2(\Omega; \Gamma))$ ,
- $u, u' \in L^\infty([0, T]; H^{p+1}(\Omega; \Gamma))$ ,
- $u'' \in L^\infty([0, T]; H^p(\Omega; \Gamma))$ ,
- $\tilde{f}_\Omega(t, \cdot, u(t, \cdot)) \in L^\infty([0, T]; H^{\max\{2, p\}}(\Omega))$  und
- $\tilde{f}_\Gamma(t, \cdot, u(t, \cdot)) \in L^\infty([0, T]; H^{\max\{2, p\}}(\Gamma))$ .

Außerdem gelte Annahme 4.1 und die Abschätzung

$$\|u_h^0 - I_{h,\Omega} u^0\|_{H^1(\Omega_h; \Gamma_h)} + \|v_h^0 - I_{h,\Omega} v^0\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)} \leq Ch^p.$$

Dann existieren  $h^* > 0$  und  $M = M(\|u\|_{L^\infty([0, T]; H^1(\Omega; \Gamma))}, \|u'\|_{L^\infty([0, T]; H^2(\Omega; \Gamma))}) > 0$  sodass für alle  $h < h^*$  gilt:

a) Die Lösung  $u_h$  von (5.11) existiert auf  $[0, T]$  und erfüllt die Fehlerschranke

$$\|u_h^l(t) - u(t)\|_{H^1(\Omega; \Gamma)} + \|(u_h^l)^l(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)} \leq Ce^{(\widehat{L}_{T, M} + \frac{1}{2})t} (1+t)h^p, \quad (5.17)$$

b) Ist zusätzlich  $u \in C^3([0, T]; H^1(\Omega; \Gamma)) \cap C^4([0, T]; L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma))$ , so existiert ein  $\tau^* > 0$  unabhängig von  $h$ , sodass für alle  $\tau < \tau^*$  die volldiskretisierte Crank-Nicolson Approximation gegeben in (3.28) für alle  $t^n \leq T$  existiert und folgende Fehlerabschätzung erfüllt:

$$\|(u_h^n)^l - u(t^n)\|_{H^1(\Omega; \Gamma)} + \|(v_h^n)^l - u'(t^n)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)} \leq Ce^{(\widehat{L}_{T, M} + \frac{1}{2})t} (1+t^n)(h^p + \tau^2). \quad (5.18)$$

Hierbei ist  $\widehat{L}_{T, M}$  die lokale Lipschitz-Konstante von  $f_h$  auf  $\tilde{V}_h$  aus Lemma 5.6.

*Beweis.* Wir wenden Satz 3.6 an um a) zu beweisen.

Annahme 3.4 ist erfüllt: 1) und 2) gelten mit  $\widehat{c}_G = \widehat{C}_V = 1$ , somit ist  $\widehat{c}_{\text{qm}} = 1/2$ . Wegen  $b = 0$  ist 3) erfüllt und 4), 5), 6) gelten nach Lemma 5.5 und Lemma 5.6. Ebenso sind alle weiteren Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllt.

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Wir beschränken die einzelnen Fehlerterme  $E_1, \dots, E_5$  aus (3.24). Es gilt mit (3.12)

$$\begin{aligned} \|u_h^0 - Q_h^{V*}u^0\|_{\tilde{a}_h} &\leq \|u_h^0 - I_h u^0\|_{\tilde{a}_h} + \tilde{C}_V \|Q_h^V (I_h - Q_h^{V*})u^0\|_{\tilde{a}} \\ &\leq \|u_h^0 - I_h u^0\|_{\tilde{a}_h} + \tilde{C}_V (\|(Q_h^V I_h - I)u^0\|_{\tilde{a}} + \|(I - P_h^V)u^0\|_{\tilde{a}}). \end{aligned}$$

Weiter gilt mit (3.17b) und der Bestapproximationseigenschaft der Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} \|(I - P_h^V)u^0\|_{\tilde{a}} &\leq \|(I - \Pi_h^V)u^0\|_{\tilde{a}} + \|(\Pi_h^V - P_h^V)u^0\|_{\tilde{a}} \\ &\leq \|(I - Q_h^V I_h)u^0\|_{\tilde{a}} + \tilde{C}_V \|\Delta \tilde{a}(Q_h^{V*})u^0\|_{\tilde{v}_h^*} \end{aligned}$$

Die Terme sind alle wegen der Annahme an die Anfangswerte bzw. den Lemmas 5.7 und 5.8 durch  $h^p$  beschränkt und somit gilt

$$E_1 \leq Ch^p.$$

Aus den Lemmas 5.7, 5.8 und 5.9 folgt außerdem direkt

$$E_2, E_3, E_4 \leq Ch^p.$$

Wegen  $\mathcal{B} = 0$  gilt  $E_5 = 0$ .

Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 3.6 b).

Die Aussage in b) folgt direkt aus Korollar 3.7. Die dort geforderte Beschränktheit von  $f_h$  gilt nach Lemma 5.6 und die weiteren Voraussetzungen von Korollar 3.7 sind nach Annahme erfüllt.  $\square$

### 5.4. Numerische Beispiele und Implementierung

In diesem Abschnitt soll das Konvergenzresultat aus Satz 5.10 mit einem numerischen Experiment bestätigt werden.

Zum Testen wählen wir  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  als die zweidimensionale Einheitskreisscheibe.

#### Das Testbeispiel

Wir definieren

$$u(t, x) = \sin(2\pi t)x_1x_2.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= -4\pi^2 \sin(2\pi t)x_1x_2, && \text{in } \Omega, \\ \Delta u(t, x) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \Delta_\Gamma u(t, x) &= -4 \sin(2\pi t)x_1x_2 && \text{auf } \Gamma, \\ \partial_n u(t, x) &= 2 \sin(2\pi t)x_1x_2 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Außerdem wählen wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\Omega(t, x, u) &= |u|u + \eta_\Omega(t, x), \\ \tilde{f}_\Gamma(t, x, u) &= |u|^2u + \eta_\Gamma(t, x),\end{aligned}$$

geben also in  $\Omega$  eine quadratische und auf  $\Gamma$  eine kubische Nichtlinearität vor. Durch Einsetzen erkennt man, dass  $u$  die Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u &= |u|u + \eta_\Omega(t, x), & (0, T) \times \Omega, \\ u_{tt} + \partial_n u - \Delta_\Gamma u &= |u|^2u + \eta_\Gamma(t, x), & (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= 0, \quad u_t(0, x) = 2\pi x_1 x_2, & \text{in } \bar{\Omega}.\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\eta_\Omega(t, x) &= -(4\pi^2 + |\sin(2\pi t)x_1 x_2|) \sin(2\pi t)x_1 x_2 & \text{und} \\ \eta_\Gamma(t, x) &= -4\pi^2 \sin(2\pi t)x_1 x_2 + 6 \sin(2\pi t)x_1 x_2 - (\sin(2\pi t)x_1 x_2)^3\end{aligned}$$

löst.

### Die semidiskretisierte Gleichung

Wir verwenden die isoparametrischen Elemente aus Kapitel 5 mit  $p = 1, 2$ . Wie dort sei  $V_h$  der Finite Elemente Raum mit Lagrange Basis  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ . Die semidiskretisierte Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}m_h(u_h''(t), \varphi_h) + a_h(u_h(t), \varphi_h) &= m_h(f_h(t, u_h(t)), \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h, \\ u_h(0) &= u_h^0, \quad u_h'(0) = v_h^0.\end{aligned}$$

Die Nichtlinearitäten in diesem Beispiel erfüllen Annahme 4.1 mit  $q_\Omega = 2$  und  $q_\Gamma = 3$  und die diskretisierte Nichtlinearität hat für  $t \in [0, T]$  und  $u_h, \varphi_h \in V_h$  die Form

$$\begin{aligned}m_h(f_h(t, u_h), \varphi_h) &:= \int_{\Omega_h} (I_{h,\Omega}(|u_h|u_h) + I_{h,\Omega}\eta_\Omega(t, \cdot)) \varphi_h \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} (I_{h,\Gamma}(|u_h|^2u_h) + I_{h,\Gamma}\eta_\Gamma(t, \cdot)) \varphi_h \, ds.\end{aligned}$$

Die numerische Lösung  $u_h: [0, T] \rightarrow V_h$  ist in der Basisdarstellung gegeben durch

$$u_h(t)(x) = \sum_{i=1}^N u_{h,i}(t) \Phi_i(x)$$

mit  $u_{h,i}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  und dazugehörigem Koeffizientenvektor

$$\mathbf{u}_h := \begin{bmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,N} \end{bmatrix} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Dann erfüllt  $\mathbf{u}_h$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\mathbf{M}_h \mathbf{u}_h''(t) + \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = F_{h,1}(t) + F_{h,2}(\mathbf{u}_h(t)), \quad (5.19a)$$

$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_h^0, \quad \mathbf{u}_h'(0) = \mathbf{v}_h^0. \quad (5.19b)$$

Hierbei ist  $\mathbf{M}_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die Massenmatrix mit

$$(\mathbf{M}_h)_{i,j} = m_h(\Phi_j, \Phi_i)$$

und  $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die Steifigkeitsmatrix mit

$$(\mathbf{A}_h)_{i,j} = a_h(\Phi_j, \Phi_i).$$

Die rechte Seite ist gegeben durch  $F_{h,1}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$  und  $F_{h,2}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$\begin{aligned} (F_{h,1}(t))_i &= \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} \eta_\Omega(t, \cdot) \Phi_i \, dx + \int_{\Gamma_h} I_{h,\Gamma} \eta_\Gamma(t, \cdot) \Phi_i \, ds \quad \text{und} \\ (F_{h,2}(\mathbf{u}_h))_i &= \int_{\Omega_h} I_{h,\Omega} (|u_h| u_h) \Phi_i(x) \, dx + \int_{\Gamma_h} I_{h,\Gamma} (|u_h|^2 u_h) \Phi_i \, ds. \end{aligned}$$

Die Anfangswerte  $\mathbf{u}_h^0$  und  $\mathbf{v}_h^0$  sind die Koeffizientenvektoren von  $u_h^0$  bzw.  $v_h^0$ .

### Implementierung

Die Implementierung des Beispiels wurde mit der Finite Elemente Software-Bibliothek FEniCS (siehe [1],[3],[12]) durchgeführt. Zur Zeitintegration wurde das Crank-Nicolson Verfahren verwendet. Für die Experimente wurde die Zeitschrittweite dabei so klein gewählt, dass der Zeitdiskretisierungsfehler klein im Vergleich zum Ortsdiskretisierungsfehler ist.

Als Anfangswerte werden

$$\begin{aligned} u_h^0 &= I_{h,\Omega} u^0 \quad \text{und} \\ v_h^0 &= I_{h,\Omega} v^0 \end{aligned}$$

verwendet.

FEniCS besitzt eine Python-Schnittstelle, die zum Implementieren des Testbeispiels genutzt wurde. Der verwendete Code ist bei dem Institut für Angewandte und Numerische Mathematik am KIT hinterlegt.

### Crank-Nicolson Schema

Um das Crank-Nicolson Schema anwenden zu können, benötigen wir die Gleichung (5.19) in erster Ordnung Formulierung. Diese ist mit  $\mathbf{v}_h(t) := \mathbf{u}_h'(t)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h'(t) \\ \mathbf{v}_h'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_h \\ \mathbf{A}_h & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h(t) \\ \mathbf{v}_h(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ F_{h,1}(t) + F_{h,2}(\mathbf{u}_h(t)) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_h^0, \quad \mathbf{v}_h(0) &= \mathbf{v}_h^0. \end{aligned}$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

Es seien  $\tau$  die Zeitschrittweite und für  $n \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h^n &\approx \mathbf{u}_h(t_n), \\ \mathbf{v}_h^n &\approx \mathbf{v}_h(t_n)\end{aligned}$$

die Approximationen durch das Crank-Nicolson Schema zur Zeit  $t_n = \tau n$ . Mit

$$F_{h,1}^n := F_{h,1}(t_n)$$

ist das Schema gegeben durch

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{M}_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_h \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{n+1} \\ \mathbf{v}_h^{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{v}_h^n \end{bmatrix} \right) + \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_h \\ \mathbf{A}_h & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^{n+1} \\ \mathbf{v}_h^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h^n \\ \mathbf{v}_h^n \end{bmatrix} \right) \\ = \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ F_{h,1}^n + F_{h,2}(\mathbf{u}_h^n) + F_{h,1}^{n+1} + F_{h,2}(\mathbf{u}_h^{n+1}) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

für  $n \geq 0$ . Zur Implementierung wird  $\mathbf{v}_h^{n+1}$  aus der oberen Gleichung eliminiert. Dann lässt sich das Schema für gegebene  $\mathbf{u}_h^n$  und  $\mathbf{v}_h^n$  in zwei getrennten Schritten durchführen:

1. Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems für  $\mathbf{u}_h^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\left( \mathbf{M}_h + \frac{\tau^2}{4} \mathbf{A}_h \right) \mathbf{u}_h^{n+1} - \frac{\tau^2}{4} F_{h,2}(\mathbf{u}_h^{n+1}) \\ = \left( \mathbf{M}_h - \frac{\tau^2}{4} \mathbf{A}_h \right) \mathbf{u}_h^n + \tau \mathbf{M}_h \mathbf{v}_h^n + \frac{\tau^2}{4} (F_{h,1}^n + F_{h,2}(\mathbf{u}_h^n) + F_{h,1}^{n+1}).\end{aligned}$$

2. Lösen eines linearen Gleichungssystems für  $\mathbf{v}_h^{n+1}$ :

$$\mathbf{M}_h \mathbf{v}_h^{n+1} = \mathbf{M}_h \mathbf{v}_h^n - \frac{\tau}{2} \mathbf{A}_h (\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n+1}) + \frac{\tau}{2} (F_{h,1}^n + F_{h,2}(\mathbf{u}_h^n) + F_{h,1}^{n+1} + F_{h,2}(\mathbf{u}_h^{n+1})).$$

Massen- und Steifigkeitsmatrix müssen nur einmal assembliert werden,  $F_{h,1}$  muss man jedoch in jedem Zeitschritt einmal auswerten (der Wert kann für  $F_{h,1}^n$  im nächsten Zeitschritt gespeichert werden). Der Hauptaufwand liegt im Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems im 1. Schritt mit der Nichtlinearität  $F_{h,2}$ .

### Numerische Ergebnisse

In Abbildung 2 ist der Fehler

$$E(t) := \|u_h(t) - I_h u(t)\|_{H^1(\Omega_h; \Gamma_h)} + \|u_h'(t) - I_h u'(t)\|_{L^2(\Omega_h) \times L^2(\Gamma_h)}$$

zur Zeit  $t = 0.8$  aus den numerischen Tests bzgl. der Gitterweite dargestellt. Hierbei ist

$$I_h: C(\overline{\Omega}) \times C(\Gamma) \rightarrow C(\overline{\Omega}_h) \times C(\Gamma_h)$$

## 5. Numerik für die Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

ein Interpolationsoperator höherer Ordnung ( $> p$ ).

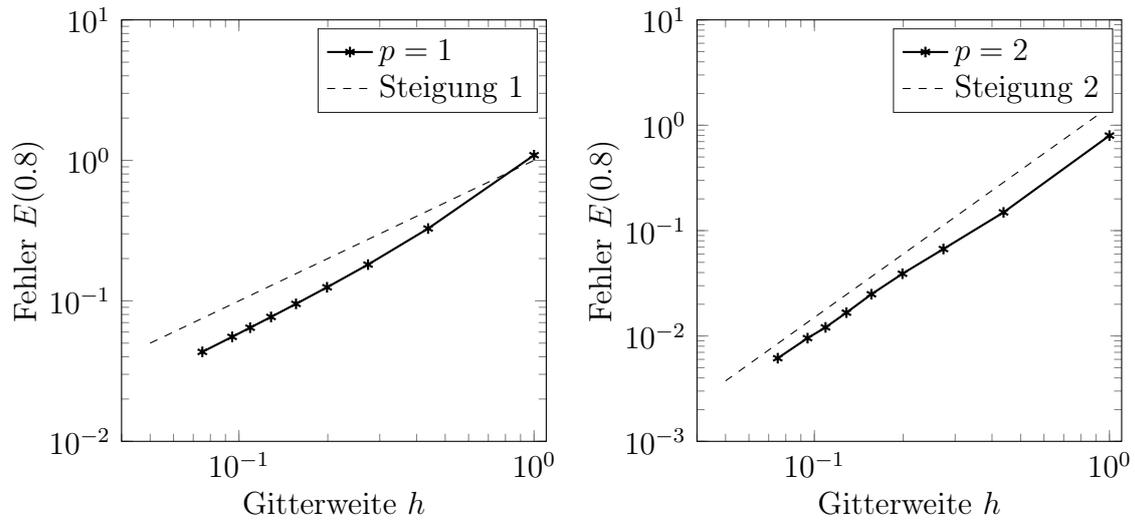


Abbildung 2: Fehler zur Zeit  $T=0.8$

Man erkennt, dass der Fehler sich asymptotisch wie wegen Satz 5.10 erwartet verhält.

## 6. Fazit und Ausblick

Es ist gelungen, die Theorie zur abstrakten Finite Elemente Diskretisierung von Evolutionsgleichungen von dem linearen Fall aus [8] auf den semilinearen Fall zu übertragen. Damit konnten Konvergenzresultate für die Bulk-Surface FE-Semidiskretisierung der semilinearen Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen gezeigt werden. Somit wurde das Ziel dieser Arbeit erreicht. Unter geeigneten Bedingungen an die Nichtlinearitäten sind dabei alle Resultate ohne weitere Forderungen an die linearen Terme gültig geblieben. Es musste lediglich von globalen zu lokalen Lösungen übergegangen werden, was jedoch für semilineare Differentialgleichungen auch der natürliche Lösungsbegriff ist. Erste numerische Experimente untermauern die theoretischen Resultate.

Offene Fragestellungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wurden, sind:

- Bei der Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen wurden lediglich die Fehler der Semidiskretisierung untersucht. Mit Zeitintegrationstheorie sollten sich ohne größere Probleme Volldiskretisierungsfehler beweisen lassen.
- In [8] wird das abstrakte Framework noch auf eine Reihe anderer Beispiele angewendet. Diese sollten sich mit den hier erzielten Ergebnissen gut auf den semilinearen Fall übertragen lassen.
- Es können noch weiterführende numerische Experimente durchgeführt werden, vor allem der Einfluss der Glattheit der Nichtlinearität auf die Konvergenz ist eine interessante Fragestellung.

## A. Anhang

In diesem Anhang werden einige Definitionen und Resultate gesammelt, die in dieser Arbeit benötigt werden.

### A.1. Lineare Evolutionsgleichungen und Halbgruppen

Eine Einführung in das Thema zu Evolutionsgleichungen und Halbgruppen liefert das Buch [13]. Dort finden sich auch alle folgenden Aussagen.

Es sei  $X$  ein Banachraum.

#### $C_0$ -Halbgruppen

**Definition A.1** (Halbgruppe). *Eine Abbildung  $T: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$  heißt  $C_0$ -Halbgruppe, wenn*

- $T(0) = I$  und  $T(t + s) = T(t)T(s)$  für alle  $t, s \geq 0$ ,
- $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$  für alle  $x \in X$ .

**Bemerkung:** Weil es in der Literatur üblich ist, verwenden wir  $T(t)$  als Symbol für die  $C_0$ -Halbgruppe, dies ist nicht zu verwechseln mit der Endzeit  $T$  der Zeitintervalle  $[0, T]$ .

**Definition A.2** (Erzeuger einer Halbgruppe). *Es sei  $T(t)$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$ . Wir definieren*

$$D(S) := \{x \in X \mid \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (T(h)x - x) \text{ existiert in } X\}$$

und  $S: D(S) \rightarrow X$  für  $x \in D(S)$  durch

$$Sx := \lim_{h \searrow 0} -\frac{1}{h} (T(h)x - x).$$

Der lineare Operator  $-S$  heißt Erzeuger der Halbgruppe  $T(t)$ . Wir verwenden die Notation

$$e^{-tS} := T(t).$$

**Lemma A.3.** *Es sei  $e^{-tS}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit Erzeuger  $-S$ . Dann ist für  $x \in D(S)$  auch  $e^{-tS}x \in D(S)$  für alle  $t \geq 0$  und*

$$\frac{d}{dt} e^{-tS}x = -S e^{-tS}x = -e^{-tS}Sx$$

für alle  $t > 0$ .

**Definition A.4** (Kontraktive  $C_0$ -Halbgruppe). Eine Halbgruppe  $T(t)$  heißt kontraktive  $C_0$ -Halbgruppe, wenn

$$\|T(t)\|_{X \leftarrow X} \leq 1 \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

**Satz A.5** (Lumer-Phillips). Es sei  $S: D(S) \rightarrow X$  ein linearer Operator auf  $X$  mit  $\overline{D(S)} = X$ . Weiter sei  $-S$  dissipativ und es existiere ein  $\lambda > 0$  sodass

$$\text{Bild}(\lambda + S) = X.$$

Dann ist  $-S$  der Erzeuger einer kontraktiven  $C_0$ -Halbgruppe  $e^{-tS}$  auf  $X$ .

**Bemerkung:**

1. Satz A.5 enthält nur eine Richtung des eigentlichen Satzes von Lumer-Phillips, es gilt auch die Umkehrung der Aussage.
2. Ist  $X$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $p$ , so ist ein linearer Operator  $-S: D(S) \rightarrow X$  dissipativ, falls für alle  $x \in D(S)$  gilt:

$$p(-Sx, x) \leq 0.$$

## Lineare Evolutionsgleichungen

Es sei  $S: D(S) \rightarrow X$  ein linearer Operator auf  $X$  und  $f: [0, T] \rightarrow X$ . Außerdem erzeuge  $-S$  eine  $C_0$ -Halbgruppe  $e^{-tS}$ . Wir betrachten folgende *inhomogene lineare Evolutionsgleichung*: Gesucht ist ein  $x: [0, T] \rightarrow X$  mit

$$\begin{aligned} x_t(t) + Sx(t) &= f(t) \\ x(0) &= x^0 \in X. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Wir unterscheiden folgende beiden Lösungsbegriffe:

**Definition A.6.**

1. Wir nennen  $x$  *klassische Lösung* von (A.1), wenn  $x \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T], D(A))$  gilt und (A.1) erfüllt ist.
2.  $x \in C([0, T], X)$  definiert durch

$$x(t) = e^{-tS}x^0 + \int_0^t e^{-(t-s)S}f(s) \, ds.$$

heißt *milde Lösung* von (A.1).

**Satz A.7.** Ist  $x$  eine Milde Lösung von (A.1) und gilt  $f \in C^1([0, T]; X)$  und  $x^0 \in D(S)$ , so ist  $x$  eine klassische Lösung.

## A.2. Sonstige Sätze

**Satz A.8** (Lemma von Gronwall, [9, Lemma 7.22]). *Es sei  $\Phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  und es existieren  $M, L > 0$ , sodass für alle  $t \in [0, T]$  gilt:*

$$0 \leq \Phi(t) \leq M + L \int_0^t \Phi(s) \, ds.$$

Dann gilt

$$\Phi(t) \leq M e^{Lt}, \quad t \in [0, T].$$

**Satz A.9** (Diskretes Lemma von Gronwall, [10, Lemma 11.39]). *Es sei  $\tau > 0$ . Erfüllt die Folge nichtnegativer Zahlen  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$  die Ungleichung*

$$\varepsilon_n \leq a\tau \sum_{j=0}^n \varepsilon_j + b, \quad n \geq 0,$$

mit Konstanten  $a, b \geq 0$ , dann gilt für  $a\tau < 1$

$$\varepsilon_n \leq e^{\frac{an\tau}{1-a\tau}}. \tag{A.2}$$

**Satz A.10** (Satz von Lax-Milgram, [9, Theorem 1.26]). *Es sei  $V$  ein Hilbertraum. Ist  $\Lambda: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und koerzive Bilinearform auf  $V$  und  $l \in V^*$ , so besitzt die Gleichung*

$$\Lambda(u, \psi) = l(\psi) \quad \text{für alle } \psi \in V$$

eine eindeutige Lösung  $u \in V$ .

**Satz A.11** (Satz von Riesz-Fischer, [14, Theorem 5.5]). *Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $1 \leq q < \infty$ ,  $(w_n)$  eine Folge in  $L^q(\mu)$  und  $u \in L^q(\mu)$  mit*

$$w_n \rightarrow u \quad \text{in } L^q(\mu) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann existiert eine Teilfolge  $(w_{n_j})$  von  $(w_n)$  und eine Funktion  $\widehat{w} \in L^q(\mu)$ , sodass  $(w_{n_j})$  fast überall gegen  $u$  konvergiert und  $|w_{n_j}| < \widehat{w}$  fast überall für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt.

## Literatur

- [1] FEniCS Project. <https://fenicsproject.org/>. Abgerufen: 26.09.2017.
- [2] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003.
- [3] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.
- [4] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations*, volume 252. Springer Science & Business Media, 1982.
- [5] Charles M Elliott and Thomas Ranner. Finite element analysis for a coupled bulk-surface partial differential equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 33(2):377–402, 2012.
- [6] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] Pierre Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011.
- [8] David Hipp. *A unified error analysis for spatial discretizations of wave-type equations with applications to dynamic boundary conditions*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2017.
- [9] Marlis Hochbruck. Finite Element Methods, Time Integration of PDEs. Vorlesungsskript, <https://na.math.kit.edu/download/teaching/2016s/timeintpde/skript/skript.pdf>, 2016.
- [10] Marlis Hochbruck. Numerische Mathematik I und II, Numerische Methoden für Differentialgleichungen, Finite Elemente Methoden. Vorlesungsskript, <https://na.math.kit.edu/download/teaching/2014w/nummetdgl/skript/skript.pdf>, 2016.
- [11] Takahito Kashiwabara, Claudia Maria Colciago, Luca Dedè, and Alfio Quarteroni. Well-posedness, regularity, and convergence analysis of the finite element approximation of a generalized Robin boundary value problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(1):105–126, 2015.
- [12] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [13] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied mathematical sciences ; 44. Springer, New York, 1983.
- [14] Roland Schnaubelt. Analysis 3. Vorlesungsskript, <http://www.math.kit.edu/iana3/~schnaubelt/media/ana3-skript.pdf>, 2017.

## Literatur

- [15] Ralph E. Showalter. *Hilbert space methods in partial differential equations*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, dover edition edition, 2010.
- [16] Ralph Edwin Showalter. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, volume 49. American Mathematical Soc., 2013.
- [17] Enzo Vitillaro. Strong solutions for the wave equation with a kinetic boundary condition. *Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations. I. Evolution Problems, Contemporary in Mathematics*, 594:295–307, 2013.
- [18] Enzo Vitillaro. On the Wave Equation with Hyperbolic Dynamical Boundary Conditions, Interior and Boundary Damping and Source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 223(3):1183–1237, 2017.

## Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des Karlsruher Instituts für Technologie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet habe.

Karlsruhe, den 29.09.2017