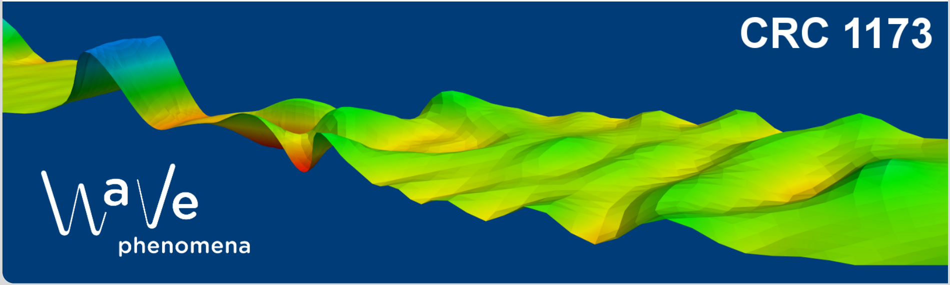
Karlsruher Institut für Technologie

Diskrete Strichartz-Ungleichungen

SFB Workshop (Hirschegg, 7.-11. Oktober 2019)

Konstantin Zerulla

Institut für Analysis (KIT)



Überblick

- Strichartz-Ungleichungen
  - Motivation
  - Wichtige Resultate zur Schrödinger-Gleichung

Überblick

- Strichartz-Ungleichungen
  - Motivation
  - Wichtige Resultate zur Schrödinger-Gleichung
- Diskrete Strichartz Abschätzungen
  - Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften
  - Gleichmäßige semidiskrete Abschätzungen

Überblick

- Strichartz-Ungleichungen
  - Motivation
  - Wichtige Resultate zur Schrödinger-Gleichung
- Diskrete Strichartz Abschätzungen
  - Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften
  - Gleichmäßige semidiskrete Abschätzungen
- Ein Verfahren für die nichtlineare Schrödinger-Gleichung
  - Wohlgestelltheit

Grundlage: Ignat, Zuazua 2009.

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Betrachte die lineare Schrödinger-Gleichung

$$\text{(LSE)} \quad \begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Betrachte die lineare Schrödinger-Gleichung

$$(\text{LSE}) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0 & \text{auf } \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- $i\Delta$ erzeugt eine isometrische C_0-Gruppe, d.h. (LSE) besitzt die eindeutige Lösung $u(t,x) = \mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi(x)$ und $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Fokus liegt auf der nichtlinearen Gleichung

$$\text{(NSE)} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

mit $p > 0$.

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Fokus liegt auf der nichtlinearen Gleichung

$$\text{(NSE)} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

mit $p > 0$.

$\rightsquigarrow$ Verwende Variation-der-Konstanten Formel

$$u(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi - i \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)i\Delta} |u(s)|^p u(s)\, \mathrm{d}s,}_{=:\Phi(u)(t)} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Fixpunkt von Φ löst die NSE.

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Fokus liegt auf der nichtlinearen Gleichung

$$\text{(NSE)} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

  mit $p > 0$.

  $\rightsquigarrow$ Verwende Variation-der-Konstanten Formel

$$u(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi - i\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)i\Delta}|u(s)|^p u(s)\,\mathrm{d}s}_{=:\Phi(u)(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Fixpunkt von Φ löst die NSE.
- **Problem:** Selbstabbildungseigenschaft von Φ nötig für Fixpunktsatz
  $\rightsquigarrow$Verlust an Integrabilität wegen $p > 0$.

Motivation: Warum Strichartz-Ungleichungen?

- Fokus liegt auf der nichtlinearen Gleichung

$$(\text{NSE}) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

  mit $p > 0$.

  $\rightsquigarrow$ Verwende Variation-der-Konstanten Formel

$$u(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi - i \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)i\Delta} |u(s)|^p u(s)\,\mathrm{d}s,}_{=:\Phi(u)(t)} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Fixpunkt von Φ löst die NSE.
- **Problem:** Selbstabbildungseigenschaft von Φ nötig für Fixpunktsatz
  $\rightsquigarrow$Verlust an Integrabilität wegen $p > 0$.
- **Frage/Hoffnung:** Gewinnt man durch $(\mathrm{e}^{ti\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$ Integrabilität?

Wichtige Abschätzungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir beschränken uns auf den Fall $d = 1$.
- Punktweise gilt die dispersive Abschätzung

$$|\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi(x)| \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{1/2}}\|\varphi\|_{L^1}, \qquad t \neq 0, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Wichtige Abschätzungen

- Wir beschränken uns auf den Fall $d = 1$.
- Punktweise gilt die dispersive Abschätzung
$$|\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi(x)| \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{1/2}}\|\varphi\|_{L^1}, \qquad t \neq 0, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$
- Ein Paar (q, r) heißt **zulässig**, wenn
$$2 \leq q, r \leq \infty, \quad (q, r) \neq (2, \infty) \quad \text{und} \quad \frac{2}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

Wichtige Abschätzungen

- Wir beschränken uns auf den Fall $d = 1$.
- Punktweise gilt die dispersive Abschätzung
$$|\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi(x)| \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{1/2}}\|\varphi\|_{L^1}, \qquad t \neq 0, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$
- Ein Paar (q, r) heißt **zulässig**, wenn
$$2 \leq q, r \leq \infty, \quad (q, r) \neq (2, \infty) \quad \text{und} \quad \frac{2}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$
- Für (q, r), $(\tilde{q}, \tilde{r})$ zulässig gelten die Strichartz-Ungleichungen
$$\|\mathrm{e}^{ti\Delta}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}))} \leq C(q, r)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})},$$
$$\Big\|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)i\Delta} f(s)\,\mathrm{d}s\Big\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}))} \leq C(q, r, \tilde{q}, \tilde{r})\|f\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{r}'}(\mathbb{R}))},$$
$$\forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}, L^{\tilde{r}'}(\mathbb{R})).$$

Wohlgestelltheit der NSE

- Wir erinnern an die NSE

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \qquad u(0) = \varphi.$$

Definition 1 (schwache Lösung)

Sei $p \in (0,4)$, $q = 4\frac{p+2}{p}$. u ist eine schwache Lösung von (NSE), wenn

(i) $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})) \cap L^q_{loc}(\mathbb{R}, L^{p+2}(\mathbb{R}))$,

(ii) $u(0) = \varphi$ und $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}))$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(-i\partial_t\psi + \Delta\psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^p u\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Globale Wohlgestelltheit der NSE

- Wir erinnern an die NSE

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \qquad u(0) = \varphi.$$

Satz 2 (Tsutsumi)

Seien $p \in (0,4)$, $q = 4\frac{p+2}{p}$ und $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.
Dann existiert eine eindeutige Lösung u von (NSE), die in $L^2(\mathbb{R})$ stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Erfüllen semidiskrete Verfahren die dispersiven Abschätzungen aus dem stetigen Fall gleichmäßig?

Hilfsmittel: Semi-diskrete Fourier-Trafo (SDFT)

Karlsruher Institut für Technologie

- Durchweg sei $h > 0$ der Parameter für die Raumdiskretisierung.
- Definiere für $v^h \in \ell^1(h\mathbb{Z})$ die SDFT

$$\hat{v}^h(\xi) := h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-i\xi jh} v_j^h, \qquad \xi \in [-\tfrac{\pi}{h}, \tfrac{\pi}{h}].$$

$\rightsquigarrow$ Erweitere dann auf Folgen $v^h \in \ell^2(h\mathbb{Z})$.

Hilfsmittel: Semi-diskrete Fourier-Trafo (SDFT)

- Durchweg sei $h > 0$ der Parameter für die Raumdiskretisierung.
- Definiere für $v^h \in \ell^1(h\mathbb{Z})$ die SDFT

$$\hat{v}^h(\xi) := h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-i\xi jh} v_j^h, \qquad \xi \in [-\tfrac{\pi}{h}, \tfrac{\pi}{h}].$$

$\rightsquigarrow$ Erweitere dann auf Folgen $v^h \in \ell^2(h\mathbb{Z})$.

- Die inverse semi-diskrete Fourier-Trafo (iSDFT) ist

$$\check{v}_j^h := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \mathrm{e}^{i\xi jh} v^h(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

für $v^h \in L^1(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}) \cap L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$.

Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften

- Betrachte für $h > 0$ das semidiskrete System

$$i\partial_t u^h + \Delta_h u^h = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$u^h(0) = \varphi^h,$$

mit $u^h = (u_j^h)_{j\in\mathbb{Z}}$, $u_j^h(t) \approx u(t, jh)$ und

$$(\Delta_h u^h)_j := \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^h + u_{j-1}^h - 2u_j^h).$$

Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften

- Betrachte für $h > 0$ das semidiskrete System

$$\begin{aligned} i\partial_t u^h + \Delta_h u^h &= 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ u^h(0) &= \varphi^h, \end{aligned}$$

mit $u^h = (u_j^h)_{j\in\mathbb{Z}}$, $u_j^h(t) \approx u(t, jh)$ und

$$(\Delta_h u^h)_j := \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^h + u_{j-1}^h - 2u_j^h).$$

- Lösung $u^h(t) = \mathrm{e}^{ti\Delta_h}\varphi^h$ erfüllt

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{u}^h(t,\xi) + p_h(\xi)\hat{u}^h(t,\xi) &= 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in [-\tfrac{\pi}{h}, \tfrac{\pi}{h}], \\ \hat{u}^h(0) &= \hat{\varphi}^h, \end{aligned}$$

mit $p_h(\xi) := \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\xi h}{2})$.

Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften

- Wir erinnern an das semidiskrete System

$$i\partial_t u^h + \Delta_h u^h = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$u^h(0) = \varphi^h,$$

mit $u^h = (u_j^h)_{j\in\mathbb{Z}}$, $u_j^h(t) \approx u(t, jh)$ und

$$(\Delta_h u^h)_j := \frac{1}{h^2}(u_{j+1}^h + u_{j-1}^h - 2u_j^h).$$

- u^h erfüllt dispersive Abschätzungen i.A. nicht gleichmäßig, z.B. gilt nur

$$\|u^h(t)\|_{\ell^\infty(h\mathbb{Z})} \leq C\|\varphi^h\|_{\ell^1(h\mathbb{Z})}(|t|^{-1/2} + (|t|h)^{-1/3}), \qquad t \neq 0.$$

Numerisches Verfahren ohne dispersive Eigenschaften

- Wir erinnern an das semidiskrete System

$$i\partial_t u^h + \Delta_h u^h = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$u^h(0) = \varphi^h,$$

mit $u^h = (u^h_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $u^h_j(t) \approx u(t, jh)$ und

$$(\Delta_h u^h)_j := \frac{1}{h^2}(u^h_{j+1} + u^h_{j-1} - 2u^h_j).$$

- u^h erfüllt dispersive Abschätzungen i.A. nicht gleichmäßig, z.B. gilt nur

$$\|u^h(t)\|_{\ell^\infty(h\mathbb{Z})} \leq C\|\varphi^h\|_{\ell^1(h\mathbb{Z})}(|t|^{-1/2} + (|t|h)^{-1/3}), \qquad t \neq 0.$$

Was bedeutet das für die Approximation der NSE?

Blow-up in endlicher Zeit für die kubische NSE

Karlsruher Institut für Technologie

- Ein resultierendes Verfahren für die kubische NSE

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= 2|u|^2 u \qquad \text{on } \mathbb{R}^2, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned}$$

  ist

$$\begin{aligned} i\partial_t u_j^h + (\Delta_h u^h)_j &= |u_j^h|^2 (u_{j+1}^h + u_{j-1}^h), \qquad j \in \mathbb{Z}, \\ u^h(0) &= \varphi^h \approx \varphi \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Blow-up in endlicher Zeit für die kubische NSE

- Ein resultierendes Verfahren für die kubische NSE

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= 2|u|^2 u \qquad \text{on } \mathbb{R}^2, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} i\partial_t u_j^h + (\Delta_h u^h)_j &= |u_j^h|^2 (u_{j+1}^h + u_{j-1}^h), \qquad j \in \mathbb{Z}, \\ u^h(0) &= \varphi^h \approx \varphi \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

- Dann gibt es Daten $\varphi^h \in \ell^2(h\mathbb{Z})$ mit: $\forall T > 0,\ q \geq 1,\ r > 2$ gilt

$$\frac{\|u^h\|_{L^q((0,T),\ell^r(h\mathbb{Z}))}}{\|u^h(0)\|_{\ell^2(h\mathbb{Z})}} \to \infty, \qquad h \to 0.$$

$\rightsquigarrow$ Widerspruch zum originalen Problem (Lösung in $L^6_{loc}(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}))$).

Ein Zwei-Gitter Verfahren

Karlsruher Institut für Technologie

Idee: Approximiere LSE wie bisher, aber mit gefilterten Anfangsdaten.

Ein Zwei-Gitter Verfahren

Idee: Approximiere LSE wie bisher, aber mit gefilterten Anfangsdaten.

- Konstruiere langsam oszillierende Anfangsdaten auf $h\mathbb{Z}$ mittels Interpolation einer Folge auf $4h\mathbb{Z}$.

Ein Zwei-Gitter Verfahren

Idee: Approximiere LSE wie bisher, aber mit gefilterten Anfangsdaten.

- Konstruiere langsam oszillierende Anfangsdaten auf $h\mathbb{Z}$ mittels Interpolation einer Folge auf $4h\mathbb{Z}$.
  - Sei $\tilde{\Pi} : \ell^2(4h\mathbb{Z}) \to \ell^2(h\mathbb{Z})$ mit

$$(\tilde{\Pi}\varphi^{4h})_{4j+r} = \frac{4-r}{4}\varphi^{4h}_{4j} + \frac{r}{4}\varphi^{4h}_{4j+4}, \qquad j \in \mathbb{Z},\ r \in \{0,1,2,3\},\ \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z}).$$

Ein Zwei-Gitter Verfahren

Idee: Approximiere LSE wie bisher, aber mit gefilterten Anfangsdaten.

- Konstruiere langsam oszillierende Anfangsdaten auf $h\mathbb{Z}$ mittels Interpolation einer Folge auf $4h\mathbb{Z}$.
  - Sei $\tilde{\Pi} : \ell^2(4h\mathbb{Z}) \to \ell^2(h\mathbb{Z})$ mit

$$(\tilde{\Pi}\varphi^{4h})_{4j+r} = \frac{4-r}{4}\varphi^{4h}_{4j} + \frac{r}{4}\varphi^{4h}_{4j+4}, \qquad j \in \mathbb{Z},\ r \in \{0,1,2,3\},\ \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z}).$$

  - Definiere auch die Adjungierte $\tilde{\Pi}^* : \ell^2(h\mathbb{Z}) \to \ell^2(4h\mathbb{Z})$ über

$$(\tilde{\Pi}\varphi^{4h}, \psi^h)_{\ell^2(h\mathbb{Z})} = (\varphi^{4h}, \tilde{\Pi}^*\psi^h)_{\ell^2(4h\mathbb{Z})}, \qquad \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z}), \psi^h \in \ell^2(h\mathbb{Z}).$$

Ein Zwei-Gitter Verfahren

Idee: Approximiere LSE wie bisher, aber mit gefilterten Anfangsdaten.

- Konstruiere langsam oszillierende Anfangsdaten auf $h\mathbb{Z}$ mittels Interpolation einer Folge auf $4h\mathbb{Z}$.
  - Sei $\tilde{\Pi} : \ell^2(4h\mathbb{Z}) \to \ell^2(h\mathbb{Z})$ mit

$$(\tilde{\Pi}\varphi^{4h})_{4j+r} = \frac{4-r}{4}\varphi^{4h}_{4j} + \frac{r}{4}\varphi^{4h}_{4j+4}, \qquad j \in \mathbb{Z},\ r \in \{0,1,2,3\},\ \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z}).$$

  - Definiere auch die Adjungierte $\tilde{\Pi}^* : \ell^2(h\mathbb{Z}) \to \ell^2(4h\mathbb{Z})$ über

$$(\tilde{\Pi}\varphi^{4h}, \psi^h)_{\ell^2(h\mathbb{Z})} = (\varphi^{4h}, \tilde{\Pi}^*\psi^h)_{\ell^2(4h\mathbb{Z})}, \qquad \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z}), \psi^h \in \ell^2(h\mathbb{Z}).$$

Lemma 3 (Ignat/Zuazua)

Sei $\varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z})$. Dann gilt $\forall\, \xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$

$$\widehat{\ }(\tilde{\Pi}\varphi^{4h})(\xi) = 4\,\widehat{\ }(\Pi\varphi^{4h})(\xi)\cos^2(\xi h)\cos^2(\tfrac{\xi h}{2}),$$

wobei $(\Pi\varphi^{4h})_j = \varphi^{4h}_j$ für $j \in 4\mathbb{Z}$ und $(\Pi\varphi^{4h})_j = 0$ sonst.

Diskrete Strichartz-Abschätzungen

Satz 4 (Ignat/Zuazua)

Seien $p \geq 2$, (q, r), $(\tilde{q}, \tilde{r})$ zulässig (d.h. $2 \leq q, r \leq \infty$, $\frac{2}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$). Dann:

(i) Es gibt $C = C(p) > 0$ mit

$$\|\mathrm{e}^{ti\Delta_h}\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{\ell^p(h\mathbb{Z})} \leq C|t|^{-(1/2-1/p)}\|\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{\ell^{p'}(h\mathbb{Z})}$$

$\forall\, \varphi^{4h} \in \ell^{p'}(4h\mathbb{Z})$, $h > 0$, $t \neq 0$.

(ii) Es gibt $C = C(r) > 0$ mit

$$\|\mathrm{e}^{ti\Delta_h}\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{L^q(\mathbb{R},\ell^r(h\mathbb{Z}))} \leq C\|\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{\ell^2(h\mathbb{Z})}$$

$\forall\, \varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z})$, $h > 0$.

(iii) Es gibt $C = C(r, \tilde{r}) > 0$ mit

$$\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)i\Delta_h}\tilde{\Pi}f^{4h}(s)\,\mathrm{d}s \right\|_{L^q(\mathbb{R},\ell^r(h\mathbb{Z}))} \leq C\|\tilde{\Pi}f^{4h}\|_{L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R},\ell^{\tilde{r}'}(h\mathbb{Z}))}$$

$\forall\, f^{4h} \in L^{\tilde{q}'}(\mathbb{R}, \ell^{\tilde{r}'}(4h\mathbb{Z}))$, $h > 0$.

Ziel

Karlsruher Institut für Technologie

Nutze Erkenntnisse über das diskrete homogene Problem zur Approximation des nichtlinearen Problems.

Ein numerisches Verfahren für die NSE

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir erinnern an die NSE

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \qquad u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Wave phenomena

Ein numerisches Verfahren für die NSE

- Wir erinnern an die NSE

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \qquad u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

- **Idee:** Approximiere die Nichtlinearität im Raum schwacher Oszillationen.

Ein numerisches Verfahren für die NSE

- Wir erinnern an die NSE

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \qquad u(0) = \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

- **Idee:** Approximiere die Nichtlinearität im Raum schwacher Oszillationen.
- Betrachte für $\varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z})$, $\varphi^{4h} \approx \varphi$, das semidiskrete System

$$\text{(sdNSE)} \qquad i\partial_t u^h + \Delta_h u^h = \tilde{\Pi} f(\tilde{\Pi}^* u^h), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad u^h(0) = \tilde{\Pi}\varphi^{4h},$$

mit $f(u) = |u|^p u$.

Ein numerisches Verfahren für die NSE

- Wir erinnern an das semidiskrete System

$$\text{(sdNSE)} \qquad i\partial_t u^h + \Delta_h u^h = \tilde{\Pi} f(\tilde{\Pi}^* u^h), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad u^h(0) = \tilde{\Pi}\varphi^{4h},$$

mit $f(u) = |u|^p u$.

Satz 5 (Ignat/Zuazua)

Seien $p \in (0,4)$, $q = 4\frac{p+2}{p}$, $h > 0$, $\varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z})$ und I ein endliches Intervall. Dann hat (sdNSE) genau eine Lösung

$$u^h \in C(\mathbb{R}, \ell^2(h\mathbb{Z})) \cap L^q_{loc}(\mathbb{R}, \ell^{p+2}(h\mathbb{Z})).$$

Es gibt $C_1 = C_1(p)$, $C_2 = C_2(I,p)$ mit

$$\|u^h\|_{L^\infty(\mathbb{R},\ell^2(h\mathbb{Z}))} \leq C_1 \|\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{\ell^2(h\mathbb{Z})},$$

$$\|u^h\|_{L^q(I,\ell^{p+2}(h\mathbb{Z}))} \leq C_2 \|\tilde{\Pi}\varphi^{4h}\|_{\ell^2(h\mathbb{Z})}.$$

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir betrachten die NSE $\quad i\partial_t u + \Delta u = |u|^p u, \quad u(0) = \varphi.$
- Dispersive/Strichartz-Abschätzungen wesentlich für den Nachweis der Wohlgestelltheit der NSE.
- Räumliche Diskretisierungen erhalten Verhalten der NSE i.A. nicht.
- Mittels Zwei-Gitter Verfahren filtern wir Anfangsdaten und approximieren die Nichtlinearität.
  $\rightsquigarrow$ Gleichmäßige dispersive/Strichartz-Abschätzungen, Wohlgestelltheit.

Konvergenz des Verfahrens

- Sei $P_0^h : \ell^2(h\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R})$ der stückweise konstante Interpolationsoperator.
- Für Anfangsdaten $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$: Wähle $\varphi^{4h} \in \ell^2(4h\mathbb{Z})$ mit $P_0^h \tilde{\Pi} \varphi^{4h} \to \varphi$ in $L^2(\mathbb{R})$.

Satz 6 (Ignat/Zuazua)

Seien $p \in (0,4)$, $q = 4\frac{p+2}{p}$, $h > 0$, u^h die Lösung von (sdNSE) und u die Lösung von (NSE) für $f(x) = |x|^p x$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
P_0^h u^h &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{in } L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})),\\
P_0^h u^h &\rightharpoonup u && \text{in } L^q_{loc}(\mathbb{R}, L^{p+2}(\mathbb{R})),\\
P_0^h u^h &\to u && \text{in } L^2_{loc}(\mathbb{R}^2),\\
P_0^h \tilde{\Pi} f(\tilde{\Pi}^* u^h) &\rightharpoonup f(u) && \text{in } L^{q'}_{loc}(\mathbb{R}, L^{(p+2)'}(\mathbb{R})).
\end{aligned}
$$

Referenzen

- Ignat, L.I. and Zuazua, E.: Numerical dispersive schemes for the nonlinear Schrödinger equation. SIAM J. Numer. Anal. 47 (2) (2009), 1366–1390.
- Keel, M. and Tao, T.: Endpoint Strichartz estimates. Amer. J. Math 120 (1998), 955–980.
- Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L.: Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 33–69.
- Trefethen, L.N.: Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia 2000.
- Tsutsumi, Y.: L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups. Funkcial. Ekvac., 30 (1987), 115–125.