

(A projector splitting operator for) Dynamical low-rank approximation

Stefan Schrammer

CRC 1173 - Wave phenomena: analysis and numerics



CRC 1173

Wave
phenomena

Die Ausgangslage

Finde für $t \in [0, T]$ Niedrigrang-Approximation $Y(t)$ einer gegebenen Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h.

$$Y(t) \in \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r^{m \times n} = \{B \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(B) = r\}$$

mit

$$Y(t) \approx A(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

Die Ausgangslage

Finde für $t \in [0, T]$ Niedrigrang-Approximation $Y(t)$ einer gegebenen Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, d.h.

$$Y(t) \in \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_r^{m \times n} = \{B \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \text{rank}(B) = r\}$$

mit

$$Y(t) \approx A(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

Später Erweiterung auf $A(t)$ als (unbekannte) Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{A} = F(A), \quad t \in [0, T]$$

Definition 1

Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n** , falls für jedes $a \in \mathcal{M}$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ sowieso ein Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ existieren, sodass

$$\varphi(U \cap \mathcal{M}) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Die Zahl k heißt Dimension von \mathcal{M} , $n - k$ die Kodimension.

Definition 2

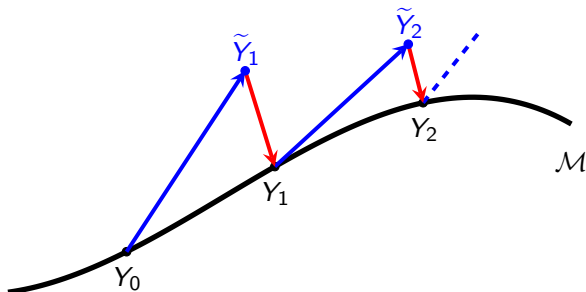
Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und sei $a \in \mathcal{M}$. Der **Tangentialraum von \mathcal{M} in a** ist der lineare Raum

$$\mathcal{T}_a \mathcal{M} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ differenzierbar mit } \gamma(t) \in \mathcal{M}, \\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \gamma(0) = a, \dot{\gamma}(0) = v\}.$$

■ "Standard projection method"

- ▶ Starte auf Mannigfaltigkeit
- ▶ Führe einen Schritt mit Integrator der Wahl aus
- ▶ Ziehe die Lösung zurück auf die Mannigfaltigkeit

"Zurückziehen" z.B. durch Orthogonalprojektion, allgemeiner: retractions



- Integration auf Mannigfaltigkeit (direkt)

- ▶ Leite DGL auf \mathcal{M} her, d.h. $\dot{Y} = F(Y)$ mit

$$Y_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow Y(t) \in \mathcal{M} \forall t$$

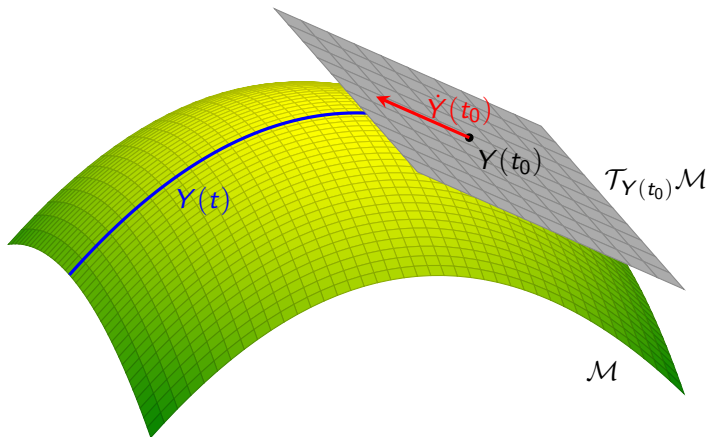
- ▶ Löse die DGL mit einem geeigneten (numerischen) Verfahren

Theorem 3 (Theorem IV.5.2¹)

Let \mathcal{M} be a submanifold of \mathbb{R}^n . The problem $\dot{Y} = F(Y)$ is a differential equation on the manifold \mathcal{M} if and only if

$$F(Y) \in \mathcal{T}_Y \mathcal{M} \quad \text{for all } Y \in \mathcal{M}.$$

¹Hairer, Lubich, Wanner (2016): *Geometric Numerical Integration*



Integration auf Mannigfaltigkeiten I

Berechne $A(t)$ zu gewünschte Zeiten $t_i, i = 0, 1, \dots, n$

Berechne die Rang- r -Bestapproximation $x(t_i)$, d.h.

$$\|A(t_i) - x(t_i)\| = \min \quad \forall t_i$$

$$x(t_i) = U(t_i) \bar{\Sigma}_r(t_i) V(t_i)^T$$

mit

$$A(t_i) = U(t_i) \bar{\Sigma}(t_i) V(t_i)^T, \quad U^T(t_i) U(t_i) = \bar{I}_m, \quad V^T(t_i) V(t_i) = \bar{I}_n$$

$$\bar{\Sigma}(t_i) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad k = \min\{m, n\},$$

$$\bar{\Sigma}_r(t_i) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0), \quad r \ll k$$

Integration auf Mannigfaltigkeiten II

Berechne $\dot{Y}(t) \in M_r$ aus der folgenden Bedingung:

$$(*) \quad \min_{\dot{Y} \in \mathcal{T}_Y M_r} \|\dot{Y}(t) - \dot{A}(t)\| = \min!$$

$Y_0 = X_0$ (Rang- r -Bestapprox von $A(t_0) = A_0$)

$$(*) \Rightarrow \langle \dot{Y}(t) - \dot{A}(t), \delta Y \rangle = 0 \quad \forall \delta Y \in \mathcal{T}_Y M_r$$

$$\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$$

$$\Rightarrow \dot{Y} = \underbrace{P(Y) \dot{A}}_{\in \mathcal{T}_Y M_r}, \quad P(Y) \text{ Orthogonalprojektion auf } \mathcal{T}_Y M_r$$

- II hängt von \dot{A} ab, nicht von $A \rightsquigarrow$ Vorteil wenn \dot{A} dünn(er) besetzt ist
- In II wird \dot{A} nur mit Matrizen mit r Spalten multipliziert (siehe später), in I dagegen mit Matrizen der vollen Dimension
- II liefert im Allgemeinen glatte Lösung $Y(t)$ – im Gegensatz zu I
- II lässt sich auf die Situation $Y(t) \approx A(t)$ mit $\dot{A} = F(A)$ übertragen:

$$\|\dot{Y} - \dot{A}\| = \min \Leftrightarrow \|\dot{Y} - F(A)\| = \min$$

$$\text{In Praxis: } \|\dot{Y} - F(Y)\| = \min$$

Der erste Ansatz²

- Zerlege $Y \in \mathcal{M}_r$ in $Y = USV^T$ mit

$$U \in \mathcal{V}_{m,r},^3 \quad V \in \mathcal{V}_{n,r}, \quad S \in GL_r(\mathbb{R})$$

- Zerlegung ist nicht eindeutig: $P, Q \in O_r(\mathbb{R})$

$$\tilde{U} = UP, \quad \tilde{V} = VQ, \quad \tilde{S} = P^T S Q$$

$$\tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T = U P P^T S Q Q^T V^T = U S V^T = Y$$

- Anderes Kriterium für Eindeutigkeit: **Eindeutigkeit im Tangentialraum**
- Tangentialraum in $U \in \mathcal{V}_{m,r}$

$$\mathcal{T}_U \mathcal{V}_{m,r} = \{ \delta U \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid \delta U^T U + U^T \delta U = 0 \}$$

²Othmar Koch and Christian Lubich (2007): *Dynamical low-rank approximation*

³ $\mathcal{V}_{m,r} := \{ U \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid U^T U = I_r \}$

- Man kann zeigen: $\delta Y \in \mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r$ hat Darstellung

$$\delta Y = \delta U S V^T + U \delta S V^T + U S \delta V^T,$$

mit

$$\delta U \in \mathcal{T}_U \mathcal{V}_{m,r}, \quad \delta V \in \mathcal{T}_V \mathcal{V}_{n,r}, \quad \delta S \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

- Eindeutigkeit von δU , δV , δS wenn $U^T \delta U = 0 = V^T \delta V$ gefordert. Dann

$$(TGL) \quad \begin{cases} \delta S = U^T (\delta Y - \delta U S V^T - U S \delta V^T) V \\ \quad = U^T \delta Y V - \underbrace{U^T \delta U S V^T V}_{=0} - \underbrace{U^T U S \delta V^T V}_{=0}, \\ \delta U = \dots = P_U^\perp \delta Y V S^{-1} \\ \delta V = \dots = P_V^\perp \delta Y^T U S^{-T} \end{cases}$$

$$P_U = U U^T, \quad P_U^\perp = I_m - P_U$$

- Für: Finde $Y \in \mathcal{M}_r$ mit

$$\begin{aligned} (*) \quad & \dot{Y} \in \mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r, \quad \text{sodass} \quad \|\dot{Y} - \dot{A}\| = \min! \\ & \Rightarrow \quad \langle \dot{Y} - \dot{A}, \delta Y \rangle = 0 \quad \forall \delta Y \in \mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r \end{aligned}$$

gilt

Proposition 4 (Proposition 2.1⁴)

Für $Y = USV^T \in \mathcal{M}_r$ mit nichtsingulärem $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ orthogonal ist (*) äquivalent zu $\dot{Y} = \dot{U}SV^T + U\dot{S}V^T + US\dot{V}^T$ mit

$$(DGL) \quad \begin{cases} \dot{S} = U^T \dot{A} V \\ \dot{U} = P_U^\perp \dot{A} V S^{-1} \\ \dot{V} = P_V^\perp \dot{A}^T U S^{-T} \end{cases} .$$

⁴Othmar Koch and Christian Lubich (2007): *Dynamical low-rank approximation*

Der erste Ansatz

- Beweis von Proposition 4 nutzt

- ▶ Darstellung

$$\mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r \ni \delta Y = \delta U S V^T + U \delta S V^T + U S \delta V^T$$

- ▶ Gleichungen

$$(\text{TGL}) \quad \begin{cases} \delta S = U^T \delta Y V \\ \delta U = P_U^\perp \delta Y V S^{-1} \\ \delta V = P_V^\perp \delta Y^T U S^{-T} \end{cases}$$

- ▶ Einschränkungen

$$\dot{U}^T U = 0 = \dot{V}^T V$$

- ▶ Identität

$$\langle uv^T, B \rangle = u^T B v, \quad \langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B), \quad \|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle$$

Proposition 4

Für $Y = USV^T \in \mathcal{M}_r$ mit nichtsingulärem $S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$,
 $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ orthogonal ist (*) äquivalent zu $\dot{Y} = \dot{U}SV^T + U\dot{S}V^T + US\dot{V}^T$
mit

$$(DGL) \quad \begin{cases} \dot{S} = U^T \dot{A} V \\ \dot{U} = P_U^\perp \dot{A} V S^{-1} \\ \dot{V} = P_V^\perp \dot{A}^T U S^{-T} \end{cases} .$$

- Erhalte numerisches Verfahren durch Anwendung eines geeigneten Integrators auf System (DGL)

Theorem 5

Die Matrix $A(t)$ sei zerlegbar in $A(t) = X(t) + E(t)$, $0 \leq t \leq T$, wobei $X(t) \in \mathcal{M}_r$ nicht notwendigerweise die Bestapproximation ist. Weiter gelte

$$\|\dot{X}(t)\|_2 \leq \mu, \quad \|\dot{E}(t)\| \leq \varepsilon,$$

mit $\varepsilon \leq \frac{1}{8}\mu$. Außerdem sei $\sigma_r(X(t)) \geq \rho > 0$.

Dann ist der Approximationsfehler von $(*)^5$ (mit Startwert $Y(0) = X(0)$) beschränkt durch

$$\|Y(t) - X(t)\| \leq 2t\varepsilon, \quad t \leq \min \left\{ T, \frac{\rho}{4\sqrt{2\mu\varepsilon}} \right\}.$$

⁵(*) Finde $Y(t) \in \mathcal{M}_r$ mit $\|\dot{Y} - \dot{A}\| = \min!$

- Zeitintervall winzig wenn $\rho \leq \varepsilon$
- $\rho \leq \varepsilon$: Effektiver Rang von $A(t)$ ist $q < r$, aber Approximation durch Rang- r Matrix $Y(t)$.
- S ist schlecht konditioniert, (nah) singular
- Inverse von S in System (DGL)
- Erwartbar: schwerwiegend unerwünschter Einfluss auf Approximationseigenschaften
- Tatsächlich: Fehlerschranke mit linearem Wachstum in t , allerdings nur unter sehr vielen Voraussetzungen und Einschränkungen an das stabile Zeitintervall
- Fall der Überapproximation sehr realistisch \rightsquigarrow neuer Ansatz

Der zweite Ansatz⁶

- Beginne erneut bei Minimierungsaufgabe: Finde $Y(t) \in \mathcal{M}_r$, $\dot{Y} \in \mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r$ mit

$$\|\dot{Y} - \dot{A}\| = \min!$$

- Berechne $\dot{Y}(t)$ als Orthogonalprojektion von \dot{A} auf $\mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r$:

$$\dot{Y} = P(Y)\dot{A}$$

DGL auf $\mathcal{M}_r \Rightarrow Y(t) \in \mathcal{M}_r$ wenn $Y_0 \in \mathcal{M}_r$

- Wie sieht der Projektor $P(Y)$ auf $\mathcal{T}_Y \mathcal{M}_r$ aus?

⁶Christian Lubich and Ivan V. Oseledets (2014): *A projector-splitting operator for dynamical low-rank approximation*

Der Orthogonalprojektor $P(Y)$

$$\dot{U} = P_U^\perp \dot{A} V S^{-1}, \quad \dot{S} = U^T \dot{A} V, \quad \dot{V} = P_V^\perp \dot{A}^T U S^{-T}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \dot{U} S V^T + U \dot{S} V^T + U S \dot{V}^T \\ &= P_U^\perp \dot{A} V S^{-1} S V^T + U U^T \dot{A} V V^T + U S S^{-1} U^T \dot{A} P_V^\perp \\ &= P_U^\perp \dot{A} P_V + P_U \dot{A} P_V + P_U \dot{A} P_V^\perp \\ &= \dot{A} P_V - P_U \dot{A} P_V + \cancel{P_U \dot{A} P_V} + P_U \dot{A} - \cancel{P_U \dot{A} P_V} \\ &= P(Y) \dot{A} \end{aligned}$$

$$P(Y) Z = Z P_V - P_U Z P_V + P_U Z \in \mathbb{J}_Y \mathcal{M}_r$$

- $\dot{Y} = P(Y)\dot{A} = \dot{A}P_V - P_U\dot{A}P_V + P_U\dot{A}$
- Aus dieser Darstellung Konstruktion des Projektor-Splitting-Integrators (abstrakte Formulierung):
 - ▶ Löse die DGL $\dot{Y}_I = \dot{A}P_V$ mit Anfangswert $Y_I(t_0) = Y_0$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$
 - ▶ Löse die DGL $\dot{Y}_{II} = -P_U\dot{A}P_V$ mit Anfangswert $Y_{II}(t_0) = Y_I(t_1)$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$
 - ▶ Löse die DGL $\dot{Y}_{III} = P_U\dot{A}$ mit Anfangswert $Y_{III}(t_0) = Y_{II}(t_1)$ auf $t_0 \leq t \leq t_1$
 - ▶ $Y_1 = Y_{III}(t_1)$ als Approximation an $Y(t_1)$ (Lösung von $\dot{Y} = P(Y)\dot{A}$ bei $t = t_1$)
- Verfahren erster Ordnung
- Jeder Teilschritt explizit lösbar
- Robust gegen Approximation mit zu hohem Rang ("Überapproximation")

Lemma 6 (Lemma 3.1⁷)

Die Lösung von I ist

$$Y_I(t) = U_I(t)S_I(t)V_I^T(t), \quad \text{mit } \frac{d}{dt}(U_I S_I) = \dot{A}V_I, \dot{V}_I = 0.$$

Die Lösung von II ist

$$Y_{II}(t) = U_{II}(t)S_{II}(t)V_{II}^T(t), \quad \text{mit } \dot{S}_{II} = -U_{II}^T \dot{A}V_{II}, \dot{U}_{II} = 0, \dot{V}_{II} = 0.$$

Die Lösung von III ist

$$Y_{III}(t) = U_{III}(t)S_{III}(t)V_{III}^T(t), \quad \text{mit } \frac{d}{dt}(\dot{V}_{III} \dot{S}_{III}^T) = \dot{A}^T U_{III}^T, \dot{U}_{III} = 0.$$

⁷Christian Lubich and Ivan V. Oseledets (2014): *A projector-splitting operator for dynamical low-rank approximation*

Der zweite Ansatz

Beweis(idee) von Lemma 6:

$$\dot{Y}_{\underline{I}}(t) = \dot{A}(t) V(t) U(t)^T \stackrel{?}{\in} \mathcal{J}_Y \mathcal{M}_r \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} P(\gamma) [Z U U^T] &= Z \underbrace{P_{\nu} P_{\nu}}_{=P_{\nu}} - P_{\nu} Z \underbrace{P_{\nu} P_{\nu}}_{=P_{\nu}} + P_{\nu} Z P_{\nu} \\ &= Z P_{\nu} - P_{\nu} Z P_{\nu} + P_{\nu} Z P_{\nu} = Z P_{\nu} \in \mathcal{J}_Y \mathcal{M}_r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_{\underline{I}}(t) = U_{\underline{I}}(t) S_{\underline{I}}(t) V_{\underline{I}}(t)^T$$

$$\dot{Y}_{\underline{I}}(t) = \frac{d}{dt} (U_{\underline{I}} S_{\underline{I}}) \underbrace{V_{\underline{I}}^T}_{\dot{=} 0} + \cancel{(U_{\underline{I}} S_{\underline{I}})} \underbrace{\dot{V}_{\underline{I}}^T}_{\dot{=} 0} = \dot{A} V_{\underline{I}} \underbrace{V_{\underline{I}}^T}_{\dot{=} 0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (U_{\underline{I}} S_{\underline{I}}) = \dot{A} V_{\underline{I}}$$

- Für bekanntes $A(t)$ können die Lösungen der DGLn I - III explizit aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}U_I(t)S_I(t) &= U_I(t_0)S_I(t_0) + (A(t) - A(t_0))V_I(t_0), \\S_{II}(t) &= S_{II}(t_0) - U_{II}(t_0)^T(A(t) - A(t_0))V_{II}(t_0), \\V_{III}(t)S_{III}(t)^T &= V_{III}(t_0)S_{III}(t_0)^T + (A(t) - A(t_0))^T U_{III}(t_0).\end{aligned}$$

- Explizites Verfahren der Ordnung 1 basierend auf dieser Darstellung:
Projektor-Splitting-Integrator

Algorithm 1 Projektor-Splitting-Integrator

- 1: Input: $\Delta A = A(t_1) - A(t_0)$,
 - 2: Rang- r -Approximation $Y_0 = U_0 S_0 V_0^H \approx A_0 = A(t_0)$.
 - 3: Output: Rang- r -Approximation $Y_1 \approx A(t_1)$.
 - 4: Erster Schritt:
 - 5: $K_1 = U_0 S_0 + \Delta A V_0$
 - 6: Berechne Zerlegung: $U_1 \hat{S}_1 = K_1$, $\hat{S}_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}$ regulär, U_1 orthogonal.
 - 7: Zweiter Schritt:
 - 8: $\tilde{S}_1 = \hat{S}_1 - U_1^T \Delta A V_0$
 - 9: Dritter Schritt:
 - 10: $L_1 = V_0 \tilde{S}_1^T + \Delta A^T U_1$
 - 11: Berechne Zerlegung: $V_1 S_1^T = L_1$, $S_1 \in \mathbb{C}^{r \times r}$ regulär, V_1 orthogonal.
 - 12: Approximation $Y_1 = U_1 L_1^T$.
-

- Verfahren zweiter Ordnung durch symmetrische Komposition des Flusses mit eigener Adjungierten. Verfahren höher Ordnung durch geeignete weitere Komposition (Standard)

⁸Christian Lubich and Ivan V. Oseledets (2014): *A projector-splitting operator for dynamical low-rank approximation*

- Verfahren zweiter Ordnung durch symmetrische Komposition des Flusses mit eigener Adjungierten. Verfahren höher Ordnung durch geeignete weitere Komposition (Standard)
- Übertragung auf Matrix-DGLn: $A(t)$ unbekannte Lösung von $\dot{A} = F(A)$, ersetze ΔA durch $\tau F(Y_0)$
 - ▶ Verfahren der Ordnung 1
 - ▶ explizite Verfahren höherer Ordnung durch weitere Näherungen und geeignete Zwischenwerte

⁸Christian Lubich and Ivan V. Oseledets (2014): *A projector-splitting operator for dynamical low-rank approximation*

- Verfahren zweiter Ordnung durch symmetrische Komposition des Flusses mit eigener Adjungierten. Verfahren höher Ordnung durch geeignete weitere Komposition (Standard)
- Übertragung auf Matrix-DGLn: $A(t)$ unbekannte Lösung von $\dot{A} = F(A)$, ersetze ΔA durch $\tau F(Y_0)$
 - ▶ Verfahren der Ordnung 1
 - ▶ explizite Verfahren höherer Ordnung durch weitere Näherungen und geeignete Zwischenwerte
- Updatereihenfolge $K \rightsquigarrow S \rightsquigarrow L$ willkürlich. "Exactness property" aber nur für diese Reihenfolge gültig:

Theorem 7 (Theorem 4.1⁸)

$A(t)$ habe höchstens Rang r für alle t . Mit $Y_0 = A(t_0)$ ist Algorithmus 1 exakt: $Y_1 = A(t_1)$

⁸Christian Lubich and Ivan V. Oseledets (2014): *A projector-splitting operator for dynamical low-rank approximation*

Der zweite Ansatz

Beweis von Theorem 7:

$$\Delta A = A(t_1) - A(t_0) = A(t_1) - Y_0$$

$$\begin{aligned} Y_n &= U_n S_n V_n^T \\ &= U_n (\hat{S}_0 V_0^T + U_n \Delta A) \\ &= U_n (\hat{S}_n - U_n^T \Delta A V_0) V_0^T + P_{U_n} \Delta A \\ &= U_0 S_0 V_0^T + \Delta A P_{V_0} - P_{U_n} \Delta A P_{V_0} + P_{U_n} \Delta A \\ &= \cancel{Y_0} + A(t_1) P_{V_0} - \cancel{Y_0} P_{V_0} - P_{U_n} A(t_1) P_{V_0} + P_{U_n} \cancel{Y_0} P_{V_0} + P_{U_n} A(t_1) - \cancel{P_{U_n} Y_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_n S_n &= U_0 S_0 + \Delta A V_0 = U_0 S_0 + (A(t_1) - Y_0) V_0 = U_0 S_0 + A(t_1) V_0 - Y_0 S_0 \\ &= A(t_1) V_0 = U(t_1) S(t_1) [U(t_1)^T V_0] \quad \text{mit } A(t_1) = U(t_1) S(t_1) V(t_1)^T \end{aligned}$$

$$U(t_1) S(t_1) = U_n S_n [V(t_1)^T V_0]^{-1}$$

$$A(t_1) = U_n S_n [V(t_1)^T V_0]^{-1} V(t_1) \Rightarrow P_{U_n} A(t_1) = A(t_1)$$

$$\Rightarrow Y_n = A(t_1) P_{V_0} - A(t_1) P_{V_0} + A(t_1) = A(t_1)$$

Der zweite Ansatz – Robustheit gegen Überapproximation

- Verbesserung des Verhaltens bei Überapproximation unter schwächeren Voraussetzungen:
 - ▶ $A(t) = A_1(t) + \varepsilon A_2(t)$ mit $\text{rank}(A_1(t)) = q < r$, A_1, A_2 und ihre Ableitungen beschränkt unabhängig von ε
 - ▶ $\sigma_q(A_1(t)) \geq \rho > 0$, $0 \leq t \leq T$
 - ▶ $A_1(t) = U_1(t)S_1(t)V_1(t)^T$ mit $U_1 \in \mathcal{V}_{m,q}$, $V_1 \in \mathcal{V}_{m,q}$, $S_1 \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$
 - ▶ Startwert für dynamische Rang- r Approximation von $A(t)$

$$Y_0 = A_1(t_0) + \varepsilon A_{2,0}, \quad \text{rank}(Y_0) = r,$$

$A_{2,0} \neq A_2(t_0)$ zugelassen, $A_{2,0}$ unabhängig von ε beschränkt

- Verglichen wird mit Ergebnis aus Rang- q Approximation mit Startwert

$$\hat{Y}_0 = A_1(t_0) + \varepsilon \hat{A}_{2,0}, \quad \text{rank}(\hat{Y}_0) = q < r$$

Der zweite Ansatz – Robustheit gegen Überapproximation

Theorem 8

In der geschilderten Situation seien Y_n und \hat{Y}_n die Ergebnisse nach n Schritten des Splitting-Integrators für die Rang- r -Approximation bzw. die Rang- q -Approximation, jeweils mit Schrittweite τ . Solange $n\tau \leq T$, gilt

$$\|Y_n - \hat{Y}_n\| \leq C(\varepsilon + \tau),$$

wobei C unabhängig von n, τ und ε ist (aber von T abhängt).

- Konsequenz: Änderung des Rangs während Iteration möglich
 - ▶ Verringerung des Rangs durch Weglassen von Singulärwerten
 - ▶ Erhöhung durch Hinzufügen von Singulärwerten (= 0)
- \rightsquigarrow Rangadaptivität wenn mit geeigneten Kriterien kombiniert