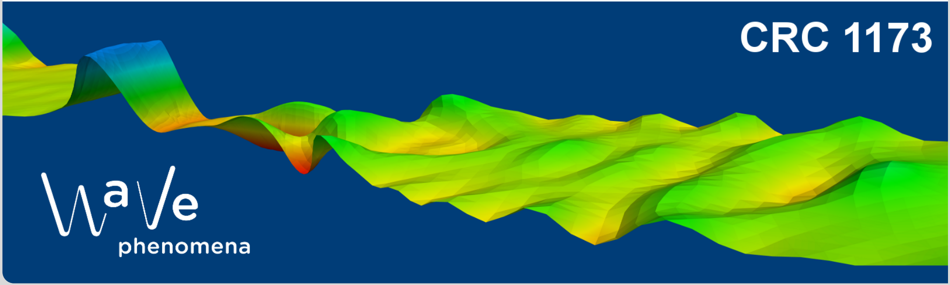
Karlsruhe Institute of Technology

Fourth-order energy-preserving locally implicit time discretization for linear wave equations

Paper von J. Chabassier & S. Imperiale

CRC 1173 - Wave phenomena: analysis and numerics

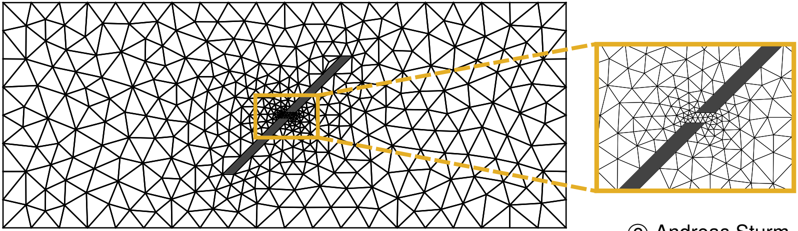


Problem

CFL-Bedingung explizite Verfahren bei hyperbolischen PDEs

$$\tau \lesssim h_{\min}$$

$\rightarrow$ Gitter-induzierte Steifigkeit



© Andreas Sturm

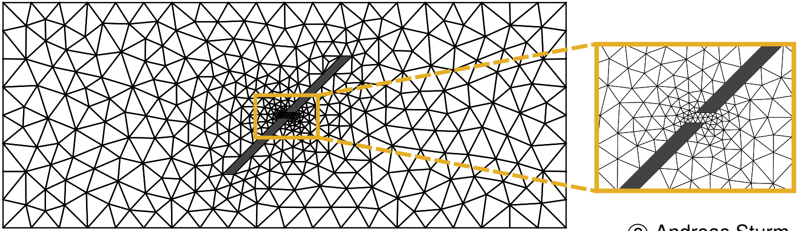
- **Ziel** Verfahren mit stabilen Lösungen für größere Schrittweiten

Problem

CFL-Bedingung explizite Verfahren bei hyperbolischen PDEs

$$\tau \lesssim h_{\min}$$

$\rightarrow$ Gitter-induzierte Steifigkeit



© Andreas Sturm

- **Ziel** Verfahren mit stabilen Lösungen für größere Schrittweiten
  $\rightsquigarrow$ lokal implizite Verfahren (z.B., siehe Constantins Vortrag für Überblick)

Outline

Gebietszerlegung & Ortsdiskretisierung

θ- & (θ, φ)-Schemata

Hybridschema 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

Outline

Gebietszerlegung & Ortsdiskretisierung

θ- & (θ, φ)-Schemata

Hybridschema 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

Wellengleichung

Homogene, lineare Wellengleichung auf Ω

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - \nabla \cdot (\alpha^2 \nabla u) &= 0 && \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla u \cdot n &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

+ Anfangsbedingungen

- n: äußerer Normalenvektor an $\partial\Omega$
- $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$: Wellengeschwindigkeit, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$
- Behandlung von Quellterm/Inhomogenität möglich (siehe Paper)

Variationelle Formulierung

Homogene, lineare Wellengleichung auf Ω

Suche $u(t) \in H^1(\Omega)$, sodass $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\left(\partial_{tt} u \,\middle|\, v\right) + \left(\alpha^2 \nabla u \,\middle|\, \nabla v\right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen

- $\left(\cdot \,\middle|\, \cdot\right)$ – $L^2(\Omega)$-Skalarprodukt

Variationelle Formulierung

Homogene, lineare Wellengleichung auf Ω

$$\text{Suche } u(t) \in H^1(\Omega), \text{ sodass } \forall v \in H^1(\Omega)$$
$$\big(\partial_{tt} u \,\big|\, v\big) + \big(\alpha^2 \nabla u \,\big|\, \nabla v\big) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen

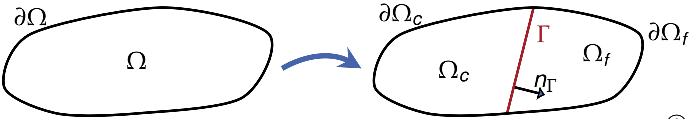
- $(\cdot \mid \cdot)$ – $L^2(\Omega)$-Skalarprodukt
- $\|\cdot\|$ – $L^2(\Omega)$-Norm

Energieerhaltung
(Wähle $v = \partial_t u$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

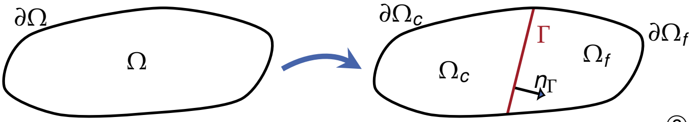
$$\left(\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\left(\|\partial_t u\|^2 + \|\alpha \nabla u\|^2\right)\right)$$

Gebietszerlegung



© C.C.

Gebietszerlegung



© C.C.

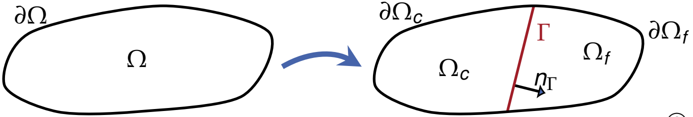
Transmissionsproblem über $\Gamma = \overline{\Omega}_c \cap \overline{\Omega}_f$ $\qquad (q \in \{c, f\})$

$$\partial_{tt} u_q - \nabla\cdot(\alpha^2 \nabla u_q) = 0 \qquad \text{in } \Omega_q \times \mathbb{R}_+$$

$$\nabla u_q \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega_q \setminus \Gamma \times \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen

Gebietszerlegung

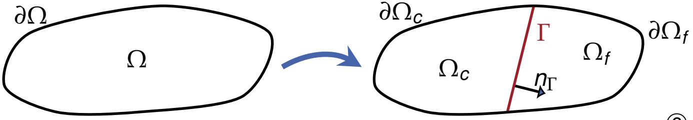


Transmissionsproblem über $\Gamma = \overline{\Omega}_c \cap \overline{\Omega}_f$ $\qquad (\, q \in \{c, f\}\,)$

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt} u_q - \nabla\cdot(\alpha^2 \nabla u_q) &= 0 && \text{in } \Omega_q \times \mathbb{R}_+ \\
\nabla u_q \cdot n &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_q \setminus \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\
\alpha^2 \nabla u_c \cdot n_\Gamma &= \alpha^2 \nabla u_f \cdot n_\Gamma && \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\
u_c &= u_f && \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

\+ Anfangsbedingungen

Gebietszerlegung



Transmissionsproblem über $\Gamma = \overline{\Omega}_c \cap \overline{\Omega}_f$ $\qquad (\, q \in \{c, f\}\,)$

$$\partial_{tt} u_q - \nabla \cdot (\alpha^2 \nabla u_q) = 0 \qquad \text{in } \Omega_q \times \mathbb{R}_+$$

$$\nabla u_q \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega_q \setminus \Gamma \times \mathbb{R}_+$$

$$\alpha^2 \nabla u_c \cdot n_\Gamma = \alpha^2 \nabla u_f \cdot n_\Gamma = \lambda \qquad \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_+$$

$$u_c = u_f \qquad \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen $\qquad \lambda$ – Lagrange Multiplikator

Gebietszerlegung – variationell

Transmissionsproblem über $\Gamma = \overline{\Omega}_c \cap \overline{\Omega}_f$ $\qquad (\, q \in \{c, f\}\,)$

$$\text{Suche} \begin{Bmatrix} u_q \in H^1(\Omega_q), \\ \lambda(t) \in H^{-1/2}(\Gamma), \end{Bmatrix} \text{sodass } \forall \begin{Bmatrix} v_q \in H^1(\Omega_q) \\ \phi(t) \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{Bmatrix}:$$

$$\big(\partial_{tt} u_q \,\big|\, v_q\big)_q + \big(\alpha^2 \nabla u_q \,\big|\, \nabla v_q\big)_q = \big(\pm \lambda \,\big|\, v_q\big)_\Gamma \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

$$\big(u_c \,\big|\, \phi\big)_\Gamma = \big(u_f \,\big|\, \phi\big)_\Gamma \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen

- $(\,\cdot \,|\, \cdot\,)_q$ – $L^2(\Omega_q)$-Skalarprodukt
- $(v \,|\, w)_\Gamma = \int_\Gamma v \cdot w \,\mathrm{d}\sigma$

Gebietszerlegung – variationell

Transmissionsproblem über $\Gamma = \overline{\Omega}_c \cap \overline{\Omega}_f$ $\qquad (\, q \in \{c, f\}\,)$

Suche $\begin{Bmatrix} u_q \in H^1(\Omega_q), \\ \lambda(t) \in H^{-1/2}(\Gamma), \end{Bmatrix}$ sodass $\forall \begin{Bmatrix} v_q \in H^1(\Omega_q) \\ \phi(t) \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{Bmatrix}$:

$$\big(\partial_{tt} u_q \,\big|\, v_q\big)_q + \big(\alpha^2 \nabla u_q \,\big|\, \nabla v_q\big)_q = \big(\pm \lambda \,\big|\, v_q\big)_\Gamma \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

$$\big(u_c \,\big|\, \phi\big)_\Gamma = \big(u_f \,\big|\, \phi\big)_\Gamma \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

+ Anfangsbedingungen

- $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_q$ – $L^2(\Omega_q)$-Skalarprodukt
- $(v\,|\,w)_\Gamma = \int_\Gamma v \cdot w \,\mathrm{d}\sigma$

Energieerhaltung

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Raumdiskretisierung – cFEM, dG, ...

Approximationsräume $\mathbf{u}_q(t) \in \mathcal{V}_{h,q}$ $\quad$ $(\, q \in \{c, f\}\,)$

$\boldsymbol{\lambda}(t) \in \Lambda_h$ $\quad$ (erfüllt inf-sup Bed.)

Raumdiskretisierung – cFEM, dG, ...

Approximationsräume $\mathbf{u}_q(t) \in \mathcal{V}_{h,q}$ $(\, q \in \{c, f\}\,)$

$\boldsymbol{\lambda}(t) \in \Lambda_h$ (erfüllt inf-sup Bed.)

Semidiskretes Problem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q &= \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} && \text{in } \mathbb{R}_+ \\
\mathbf{C}_c \mathbf{u}_c &= \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f && \text{in } \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

+ Anfangsbedingungen

- $\mathbf{M}_q$: symm. pos. def. Massematrizen
- $\mathbf{K}_q$: symm. pos. semidef. Steifigkeitsmatrizen
- $\mathbf{C}_q$: Rechtecksmatrizen $(\ker \mathbf{C}_f \cap \ker \mathbf{C}_c = \{0\} \quad \rightarrow \quad \text{inf-sup})$

Raumdiskretisierung – Energie

Semidiskretes Problem

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

- $\mathbf{M}_q$: symm. pos. def.
- $\mathbf{K}_q$: symm. pos. semidef.
- $\mathbf{C}_q$: Rechtecksmatrizen

Semidiskrete Energieerhaltung

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_h}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2} \sum_{q \in \{c,f\}} \left(\|\dot{\mathbf{u}}_q\|_{M,q}^2 + |\mathbf{u}_q|_{K,q}^2 \right)$$

Raumdiskretisierung – Energie

Semidiskretes Problem

(I)	$\mathbf{M}_q\ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q\mathbf{u}_q = \pm\mathbf{C}_q^T\boldsymbol{\lambda}$	in $\mathbb{R}_+$
(II)	$\mathbf{C}_c\mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f\mathbf{u}_f$	in $\mathbb{R}_+$

- $\mathbf{M}_q$: symm. pos. def.
- $\mathbf{K}_q$: symm. pos. semidef.
- $\mathbf{C}_q$: Rechtecksmatrizen

Semidiskrete Energieerhaltung

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_h}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}\sum_{q\in\{c,f\}}\left(\|\dot{\mathbf{u}}_q\|_{M,q}^2 + |\mathbf{u}_q|_{K,q}^2\right)$$

Beweis.

1. $\dot{\mathbf{u}}_q \cdot$ (I), Gleichungen für $q = \{c, f\}$ addieren
2. (II) nach t ableiten
3. 2. in 1. verwenden $\rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda}$-Terme verschwinden

Outline

Gebietszerlegung & Ortsdiskretisierung

θ- & (θ, φ)-Schemata

Hybridschema 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

Leapfrog & θ-Schema

Betrachte **ODE**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

- **M** symm. pos. def.
- **K** symm. pos. semidef.

Approximation $\ddot{\mathbf{u}}(t^n) \approx D_\tau^2\,\mathbf{u}^n = \dfrac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2}$

$\mathbf{u}(t^n) \approx \quad \mathbf{u}^n$

$\rightsquigarrow$ **Leapfrog**

$$\mathbf{M}D_\tau^2\,\mathbf{u}^n + \mathbf{K}\ \ \mathbf{u}^n \quad = 0$$

Leapfrog & θ-Schema

Betrachte **ODE**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

- **M** symm. pos. def.
- **K** symm. pos. semidef.

Approximation $\quad \ddot{\mathbf{u}}(t^n) \approx D_\tau^2\,\mathbf{u}^n = \dfrac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2}$

$$\mathbf{u}(t^n) \approx \mathbf{u}^n$$

$\rightsquigarrow$ **Leapfrog**

$$\mathbf{M}D_\tau^2\,\mathbf{u}^n + \mathbf{K}\;\mathbf{u}^n = 0$$

Idee Ersetze Approximation an $\mathbf{u}(t^n)$ durch Mittelwert!

Leapfrog & θ-Schema

Betrachte **ODE**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

- $\mathbf{M}$ symm. pos. def.
- $\mathbf{K}$ symm. pos. semidef.

Approximation

$$\ddot{\mathbf{u}}(t^n) \approx D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2}$$

$$\mathbf{u}(t^n) \approx \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta\mathbf{u}^{n+1} + (1-2\theta)\mathbf{u}^n + \theta\mathbf{u}^{n-1}$$

$\rightsquigarrow$ **θ-Schema**

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\theta = 0$$

Idee Ersetze Approximation an $\mathbf{u}(t^n)$ durch Mittelwert!

θ-Schema – Eigenschaften

θ-Schema

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\theta = 0$$

- Verfahren 2. Ordnung
- Erhält gestörte Energie
- $\theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Leapfrog $\quad$ ($\rightarrow$ “explizit”, falls **M** nett, z.B. mass lumping, dG)
- $\theta \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ implizit
- $\theta \geq \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad$ unbeschränkt stabil

---

$$D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1-2\theta)\mathbf{u}^n + \theta \mathbf{u}^{n-1}$$

θ-Schema – Eigenschaften

θ-Schema

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\theta = 0$$

- Verfahren 2. Ordnung
- Erhält gestörte Energie
- $\theta = 0 \quad \rightsquigarrow$ Leapfrog (→ “explizit”, falls **M** nett, z.B. mass lumping, dG)
- $\theta \neq 0 \quad \rightsquigarrow$ implizit
- $\theta \geq \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow$ unbeschränkt stabil
- $\theta = \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow$ **Verfahren** 4. **Ordnung!** (eliminiert τ^2-Term in Taylor)

$$D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1 - 2\theta)\mathbf{u}^n + \theta \mathbf{u}^{n-1}$$

θ-Schema – Eigenschaften

Karlsruhe Institute of Technology

θ-Schema

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\theta = 0$$

- Verfahren 2. Ordnung
- Erhält gestörte Energie
- $\theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Leapfrog (→ "explizit", falls **M** nett, z.B. mass lumping, dG)
- $\theta \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ implizit
- $\theta \geq \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad$ unbeschränkt stabil
- $\theta = \frac{1}{12} \quad \rightsquigarrow \quad$ **Verfahren** 4. **Ordnung!** (eliminiert τ^2-Term in Taylor)

Idee Modifiziere Leapfrog $\rightsquigarrow$ eliminiere τ^2-Term $\rightsquigarrow$ "modified equation" Ansatz

---

$$D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta \mathbf{u}^{n+1} + (1 - 2\theta)\mathbf{u}^n + \theta \mathbf{u}^{n-1}$$

Modified equation

“Modified equation”

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\mathbf{u}^n - \frac{\tau^2}{12}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}^n = 0$$

- Explizit (falls **M** nett, z.B. mass lumping, dG)
- Verfahren 4. Ordnung (ODE $\rightsquigarrow \frac{\tau^2}{12}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}(t^n) = \frac{\tau^2}{12}\mathbf{M}\mathrm{d}_t^4\mathbf{u}(t^n) \rightsquigarrow \tau^2$-Term)
- Erhält gestörte Energie

$$D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta\mathbf{u}^{n+1} + (1-2\theta)\mathbf{u}^n + \theta\mathbf{u}^{n-1}$$

Modified equation

“Modified equation”

$$\mathbf{M} D_\tau^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{K}\mathbf{u}^n - \frac{\tau^2}{12}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}^n = 0$$

- Explizit (falls **M** nett, z.B. mass lumping, dG)
- Verfahren 4. Ordnung (ODE $\rightsquigarrow \frac{\tau^2}{12}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}(t^n) = \frac{\tau^2}{12}\mathbf{M}\mathrm{d}_t^4\mathbf{u}(t^n) \rightsquigarrow \tau^2$-Term)
- Erhält gestörte Energie

Idee Wende “modified equation” Ansatz auf θ-Schema an

$$D_\tau^2 \mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta\mathbf{u}^{n+1} + (1-2\theta)\mathbf{u}^n + \theta\mathbf{u}^{n-1}$$

(θ,φ)-Schema

(θ,φ)-Schema

$$\mathbf{M}D_\tau^2\,\mathbf{u}^n + \mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\theta + \tau^2\big(\theta - \tfrac{1}{12}\big)\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\{\mathbf{u}^n\}_\varphi = 0$$

- Verfahren 4. Ordnung
- Erhält gestörte Energie
- $(\theta,\varphi) = (0,0) \quad \rightsquigarrow \quad$ modified equation
- $(\theta,\varphi) \neq (0,0) \quad \rightsquigarrow \quad$ implizit
- $\theta,\varphi \geq \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad$ unbeschränkt stabil
- Stabilität für andere $(\theta,\varphi) \quad \rightsquigarrow \quad$ Chabassier, Imperiale: Study of θ schemes

---

$$D_\tau^2\,\mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau^2} \qquad \{\mathbf{u}^n\}_\theta = \theta\mathbf{u}^{n+1} + (1-2\theta)\mathbf{u}^n + \theta\mathbf{u}^{n-1}$$

Energieerhaltung

θ- und (θ,φ)-Schemata erfüllen

$$\frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\tau} = 0$$

mit

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau}\right\|_{\widetilde{\mathbf{M}}}^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2}\right\|_{\widetilde{\mathbf{K}}}^2 \qquad (\|u\|_{\mathbf{A}}^2 = u \cdot \mathbf{A}u)$$

θ-Schema

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \tau^2(\theta - \tfrac{1}{4})\mathbf{K}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$$

(θ,φ)-Schema

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \tau^2(\theta - \tfrac{1}{4})\mathbf{K} + \tau^4(\theta - \tfrac{1}{12})(\varphi - \tfrac{1}{4})\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \tau^2(\theta - \tfrac{1}{12})\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

Beachte $\widetilde{\mathbf{M}}$ und $\widetilde{\mathbf{K}}$ nicht zwingend positiv! $\rightsquigarrow$ ggf. CFL

Outline

Gebietszerlegung & Ortsdiskretisierung

θ- & (θ, φ)-Schemata

Hybridschema 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

2. Ordnung

Semidiskretes Problem

$(\, q \in \{c, f\}\,)$

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f \qquad \text{in } \mathbb{R}_+$$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) θ-Schemata für ODEs (I) (und $\boldsymbol{\lambda}(t^n) \approx \boldsymbol{\lambda}^n$)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung

2. Ordnung

Semidiskretes Problem

$(\, q \in \{c, f\}\,)$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{(I)} & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q & = & \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} & \text{in } \mathbb{R}_+ \\
\text{(II)} & \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c & = & \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f & \text{in } \mathbb{R}_+
\end{array}
$$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) θ-Schemata für ODEs (I) (und $\boldsymbol{\lambda}(t^n) \approx \boldsymbol{\lambda}^n$)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung

Hybridschema 2. Ordnung

$$
\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}^n
$$

$$
\mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}
$$

2. Ordnung

Semidiskretes Problem $\quad (q \in \{c, f\})$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} & \text{in } \mathbb{R}_+ \\
\text{(II)} & \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f & \text{in } \mathbb{R}_+
\end{array}
$$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) θ-Schemata für ODEs (I) (und $\boldsymbol{\lambda}(t^n) \approx \boldsymbol{\lambda}^n$)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung

Hybridschema 2. Ordnung

$$
\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}^n
$$

$$
\mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}
$$

z.B. $\quad \theta_c = 0, \quad \theta_f = \frac{1}{4} \quad \rightsquigarrow \quad$ expl. auf grobem Gebiet, stabil auf feinem Gebiet

2. Ordnung – Energieerhaltung

Hybridschema 2. Ordnung $(q \in \{c, f\})$

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \lambda^n$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

Proposition. Lösung erfüllt

$$\frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\tau} = 0$$

$(\|u\|_{\mathbf{A}}^2 = u \cdot \mathbf{A}u)$

mit

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{q \in \{c,f\}} \left(\left\| \frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^n}{\tau} \right\|_{\widetilde{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}_q^{n+1} + \mathbf{u}_q^n}{2} \right\|_{\mathbf{K}_q}^2 \right)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{4}) \mathbf{K}_q$$

2. Ordnung – Energieerhaltung

Hybridschema 2. Ordnung $(\, q \in \{c, f\} \,)$

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \lambda^n$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

Proposition. Lösung erfüllt
$$\frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\tau} = 0$$

$(\|u\|_{\mathbf{A}}^2 = u \cdot \mathbf{A} u)$

mit

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{q \in \{c,f\}} \left(\left\| \frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^n}{\tau} \right\|_{\widetilde{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\| \frac{\mathbf{u}_q^{n+1} + \mathbf{u}_q^n}{2} \right\|_{\mathbf{K}_q}^2 \right)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{4}) \mathbf{K}_q$$

Beweis. Multipliziere (I) mit $\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^{n-1}}{2\tau}$ und (II) mit $\lambda^n \rightsquigarrow \lambda^n$-Terme fallen weg. Elementare Umformungen + Standard Energietechnik liefern Behauptung.

2. Ordnung – Energie & Stabilität

Proposition. Falls Energie $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ positiv ist, gilt $\qquad q \in \{c, f\}$

$$\|\mathbf{u}_q^{n+1}\|_{\mathbf{M}_q} \leq \|\mathbf{u}_q^0\|_{\mathbf{M}_q} + 4t^{n+1}\sqrt{\mathcal{E}_h^{1/2}}$$

Korollar. Energie $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ ist positiv, falls $\widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2(\theta_q - \frac{1}{4})\mathbf{K}_q$ positiv definit sind

Insbesondere Verfahren stabil, sobald Verfahren auf Teilgebieten stabil sind!

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\sum_{q\in\{c,f\}}\left(\left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1}-\mathbf{u}_q^n}{\tau}\right\|_{\widetilde{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1}+\mathbf{u}_q^n}{2}\right\|_{\mathbf{K}_q}^2\right), \qquad \widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2(\theta_q - \tfrac{1}{4})\mathbf{K}_q$$

2. Ordnung – Konsistenz

Proposition. Die Fehler $\mathbf{e}_q^n = \mathbf{u}_q(t^n) - \mathbf{u}_q^n$ und $\mathbf{e}_\lambda^n = \boldsymbol{\lambda}(t^n) - \boldsymbol{\lambda}^n$ erfüllen

$$\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{e}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{e}_q^n\}_{\theta_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \mathbf{e}_\lambda^n + \tau^2 r_q(t^n) + \mathcal{O}(\tau^4) \qquad q \in \{c, f\}$$

$$\mathbf{C}_c \frac{\mathbf{e}_c^{n+1} - \mathbf{e}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{e}_f^{n+1} - \mathbf{e}_f^{n-1}}{2\tau}$$

mit

$$r_q(t^n) = \left(\theta_q - \tfrac{1}{12}\right)\left(\mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1}\left(\mathbf{K}\mathbf{u}_q(t^n) - \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda}(t^n)\right)\right) - \tfrac{1}{12}\mathbf{C}_q^T \ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t^n)$$

Beachte: nur semidiskrete Fehler!

Beweis. Taylor-Entwicklung der semidiskreten Lösung + semidiskretes Problem für höhere Ableitungen

Outline

Gebietszerlegung & Ortsdiskretisierung

θ- & (θ, φ)-Schemata

Hybridschema 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

4. Ordnung

Semidiskretes Problem

$(q \in \{c, f\})$

$$\begin{array}{llr}
\text{(I)} & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \lambda & \text{in } \mathbb{R}_+ \\
\text{(II)} & \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f & \text{in } \mathbb{R}_+
\end{array}$$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) (θ, φ)-Schemata für ODEs (I)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung

4. Ordnung

Semidiskretes Problem $\quad (\, q \in \{c, f\} \,)$

(I)	$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \lambda$	in $\mathbb{R}_+$
(II)	$\mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f$	in $\mathbb{R}_+$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) (θ, φ)-Schemata für ODEs (I)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung

Hybridschema 4. Ordnung

$$\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2 \left(\theta_q - \tfrac{1}{12}\right) \mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1} \; \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\varphi_q} = \pm \mathbf{C}_q^T \Pi^n$$

$$\mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

4. Ordnung

Semidiskretes Problem $\quad (\, q \in \{c, f\}\,)$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{u}}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \pm \mathbf{C}_q^T \lambda & & \text{in } \mathbb{R}_+ \\
\text{(II)} & \mathbf{C}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{C}_f \mathbf{u}_f & & \text{in } \mathbb{R}_+
\end{array}
$$

Vorgehen

1. Verwende (voneinander unabh.) (θ, φ)-Schemata für ODEs (I)
2. Leite (II) ab und verwende zentralen Diff.quot. 2. Ordnung
3. **Korrekturterm für Lagrange-Multiplikator** (Sonst nichtmal Ordnung 2!)

Hybridschema 4. Ordnung

$$
\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{12}) \mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1} \left(\mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\varphi_q} \pm \mathbf{C}_q^T \mathbf{\Pi}^n \right) = \pm \mathbf{C}_q^T \mathbf{\Pi}^n
$$

$$
\mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}
$$

Anmerkung Umbenennung $\lambda^n \rightsquigarrow \mathbf{\Pi}^n$, da nicht mehr λ approximiert wird

4. Ordnung – Energieerhaltung

Karlsruhe Institute of Technology

Hybridschema 4. Ordnung $(\, q \in \{c, f\}\,)$

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q\{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2\big(\theta_q - \tfrac{1}{12}\big)\mathbf{K}_q\mathbf{M}_q^{-1}\big(\mathbf{K}_q\{\mathbf{u}_q^n\}_{\varphi_q} \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\Pi}^n\big) = \pm \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\Pi}^n$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

Problem Lösung erhält “naive” Energie nicht!

- Keine Elimination der Lagrange Multiplikator-Termen
- **Grund** Korrekturterm

4. Ordnung – Energieerhaltung

Hybridschema 4. Ordnung $\quad (q \in \{c, f\})$

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{12}) \mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{K}_q \{\mathbf{u}_q^n\}_{\varphi_q} \pm \mathbf{C}_q^T \Pi^n) = \pm \mathbf{C}_q^T \Pi^n$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{C}_c \frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f \frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

Problem Lösung erhält “naive” Energie nicht!

- Keine Elimination der Lagrange Multiplikator-Terme
- **Grund** Korrekturterm

Lösung Betrachte modifizierte Energie!

$$\widehat{\mathbf{M}}_q = \widetilde{\mathbf{I}}_q^{-1} \widetilde{\mathbf{M}}_q$$

$$\widetilde{\mathbf{I}}_q = \mathbf{I}_q + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{12}) \mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1}, \qquad \mathbf{I}_q\text{: Einheitsmatrix auf } \Omega_q$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2 (\theta_q - \tfrac{1}{4}) \mathbf{K}_q + \tau^4 (\theta_q - \tfrac{1}{12})(\varphi_q - \tfrac{1}{4}) \mathbf{K}_q \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{K}_q$$

4. Ordnung – Energieerhaltung

Hybridschema 4. Ordnung $\quad (q \in \{c, f\})$

(I) $$\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{u}_q^n + \mathbf{K}_q\{\mathbf{u}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2(\theta_q - \tfrac{1}{12})\mathbf{K}_q\mathbf{M}_q^{-1}\big(\mathbf{K}_q\{\mathbf{u}_q^n\}_{\varphi_q} \pm \mathbf{C}_q^T\Pi^n\big) = \pm\mathbf{C}_q^T\Pi^n$$

(II) $$\mathbf{C}_c\frac{\mathbf{u}_c^{n+1} - \mathbf{u}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f\frac{\mathbf{u}_f^{n+1} - \mathbf{u}_f^{n-1}}{2\tau}$$

Proposition. Lösung erfüllt $$\frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\tau} = 0$$

$(\|u\|_{\mathbf{A}}^2 = u \cdot \mathbf{A}u)$

mit

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\sum_{q\in\{c,f\}}\left(\left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^n}{\tau}\right\|_{\widehat{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} + \mathbf{u}_q^n}{2}\right\|_{\mathbf{K}_q}^2\right)$$

$\widehat{\mathbf{M}}_q = \widetilde{\mathbf{I}}_q^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}_q$

$\widetilde{\mathbf{I}}_q = \mathbf{I}_q + \tau^2(\theta_q - \tfrac{1}{12})\mathbf{K}_q\mathbf{M}_q^{-1}$, $\qquad \mathbf{I}_q$: Einheitsmatrix auf Ω_q

$\widetilde{\mathbf{M}}_q = \mathbf{M}_q + \tau^2(\theta_q - \tfrac{1}{4})\mathbf{K}_q + \tau^4(\theta_q - \tfrac{1}{12})(\varphi_q - \tfrac{1}{4})\mathbf{K}_q\mathbf{M}_q^{-1}\mathbf{K}_q$

4. Ordnung – Energie & Stabilität

Karlsruhe Institute of Technology

Proposition. Falls Energie $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ positiv ist und $\theta, \varphi \geq 1/4$, gilt $\quad q \in \{c, f\}$

$$\|\mathbf{u}_q^{n+1}\|_{\mathbf{M}_q} \leq \sqrt{2}\|\mathbf{u}_q^0\|_{\mathbf{M}_q} + t^{n+1}\eta(\theta_q)\sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}}$$

Beweis. Verwende “high-frequency” Projektor $\mathbf{P}_q^\alpha = \sum_{\ell=L_\alpha}^{N_q}(\mathbf{M}_q x \cdot v_\ell)v_\ell$ mit

- v_ℓ EV von $\mathbf{K}_q$ bzgl. $\mathbf{M}_q$ mit EW μ_ℓ (aufsteigend sortiert)
- N_q Anzahl EVen
- L_α kleinste Zahl mit $\mu_{L_\alpha} \geq \alpha$

Schätze Hochfrequenzanteil gegen “pot.”, Niederfrequenzanteil gegen “kin.” Energie ab (Benötigt Eigenschaften der involvierten Matrizen (für $\theta, \varphi \geq 1/4$))

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\sum_{q\in\{c,f\}}\left(\left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^n}{\tau}\right\|_{\widehat{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} + \mathbf{u}_q^n}{2}\right\|_{\mathbf{K}_q}^2\right), \qquad \eta(\theta) = 2 + \sqrt{1 + (\theta - \tfrac{1}{12})}$$

4. Ordnung – Energie & Stabilität

Proposition. Falls Energie $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ positiv ist und $\theta, \varphi \geq 1/4$, gilt $\quad q \in \{c, f\}$

$$\|\mathbf{u}_q^{n+1}\|_{\mathbf{M}_q} \leq \sqrt{2}\|\mathbf{u}_q^0\|_{\mathbf{M}_q} + t^{n+1}\eta(\theta_q)\sqrt{2\mathcal{E}_h^{1/2}}$$

Proposition. Energie $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ ist positiv, falls $\widehat{\mathbf{M}}_q$ positiv definit ist
(für $\theta_q \geq \frac{1}{12}$, ansonsten muss spezielles τ ausgeschlossen werden)

Insbesondere Verfahren stabil, sobald Verfahren auf Teilgebieten stabil sind!

$$\mathcal{E}_h^{n+1/2} = \frac{1}{2}\sum_{q\in\{c,f\}}\left(\left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} - \mathbf{u}_q^n}{\tau}\right\|_{\widehat{\mathbf{M}}_q}^2 + \left\|\frac{\mathbf{u}_q^{n+1} + \mathbf{u}_q^n}{2}\right\|_{\mathbf{K}_q}^2\right), \qquad \eta(\theta) = 2 + \sqrt{1 + (\theta - \tfrac{1}{12})}$$

4. Ordnung – Konsistenz

Proposition. Die Fehler $\mathbf{e}_q^n = \mathbf{u}_q(t^n) - \mathbf{u}_q^n$ und $\mathbf{e}_\lambda^n = \big(\boldsymbol{\lambda}(t^n) + \frac{\tau^2}{12}\ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t^n)\big) - \boldsymbol{\Pi}^n$ erfüllen das num. Schema bis auf τ^4-Terme, i.e.,

$$\mathbf{M}_q D_\tau^2 \mathbf{e}_q^n + \mathbf{K}_q\{\mathbf{e}_q^n\}_{\theta_q} + \tau^2(\theta_q - \tfrac{1}{12})\mathbf{K}_q\mathbf{M}_q^{-1}\big(\mathbf{K}_q\{\mathbf{e}_q^n\}_{\varphi_q} \pm \mathbf{C}_q^T\mathbf{e}_\lambda^n\big) = \pm\mathbf{C}_q^T\mathbf{e}_\lambda^n + \mathcal{O}(\tau^4)$$

$$\mathbf{C}_c\frac{\mathbf{e}_c^{n+1} - \mathbf{e}_c^{n-1}}{2\tau} = \mathbf{C}_f\frac{\mathbf{e}_f^{n+1} - \mathbf{e}_f^{n-1}}{2\tau} \qquad q \in \{c, f\}$$

Beachte: nur semidiskrete Fehler!
mod. Lagrange Multiplikator

Beweis. Taylor-Entwicklung der semidiskreten Lösung + semidiskretes Problem für höhere Ableitungen

Zusammenfassung, Weiteres & Offenes

Zusammenfassung

- Hybrid-Schemata 2. und 4. Ordnung mittels Gebietszerlegung
- Korrekturterm essentiell für 4. Ordnung (ansonsten <2)
- $\theta = \varphi = 0$ auf einem Teilgebiet $\rightsquigarrow$ lokal implizit
- Schemata erhalten modifizierte Energie
- Stabilität $\hat{=}$ Bedingungen auf Teilgebieten

Weiteres

- Effizienz beschrieben in Paper
- Numerische Experimente bestätigen Theorie & Effizienz
- Direkter Ansatz in Remarks $\rightsquigarrow$ unklar

Offenes

- Volldiskrete Fehleranalyse
- Stabilität für lokal implizit 4. Ordnung (generell $\theta, \varphi \leq 1/4$)