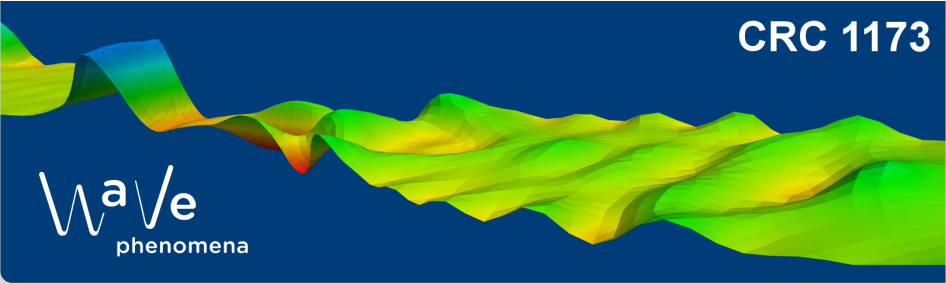


Nichtlineare Kontraktionshalbgruppen

Benjamin Dörich

CRC 1173 - Wave phenomena: analysis and numerics



CRC 1173

Wave
phenomena

Nichtlineare Evolutionsgleichung

$$u'(t) = F(u(t)), \quad u(0) = u_0$$

im (reellen) Hilbertraum H mit $F: \mathcal{D}(F) \rightarrow H$ maximal dissipativ.

Gesucht: „Lösung“ $u(t)$ bzw. die Halbgruppe $\mathcal{L}$ mit

↗
in welchem
Sinn?

$$\mathcal{L}(u_0): \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow H \\ t & \mapsto u(t) \end{cases}$$

$$u(t) = e^{tA} u_0$$

Nichtlineare Evolutionsgleichung

$$u'(t) = F(u(t)), \quad u(0) = u_0$$

im (reellen) Hilbertraum H mit $F: \mathcal{D}(F) \rightarrow H$ maximal dissipativ.

Definition 1

F heißt

- dissipativ, falls $\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_H \leq 0$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(F)$.
- maximal dissipativ, falls zusätzlich $R(I - \tau F) = H$ für ein $\tau > 0$.

Spektr:

$\rightarrow \text{subj.}$

Definition 2

F heißt maximal shift-dissipativ, falls $F - \ell_F I$ maximal dissipativ für ein $\ell_F > 0$.

$$u' = [F(u) - \ell_F u] + \ell_F u$$

Theorem 3 (Lumer Phillips)

nicht def.

Sei H ein Hilbertraum und $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow H$ ein linearer Operator. Dann erzeugt A genau dann eine Kontraktionshalbgruppe, falls

- A dissipativ ist, d.h. $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(A)$.
- es existiert ein $\tau > 0$ mit $R(I - \tau A) = H$. $\Rightarrow A$ abgeschlossen.

! deckt den linearen Fall ab

Definition 1

F heißt

- dissipativ, falls $\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_H \leq 0$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(F)$.
- maximal dissipativ, falls zusätzlich $R(I - \tau F) = H$ für ein $\tau > 0$.

Reaktions-Diffusionsgleichung mit $H = L^2(\Omega)$

$$u'(t) = \underbrace{\Delta u(t)}_{\text{diss.}} - \underbrace{|u(t)|^{p-1}u(t)}_{F(u(t)), \quad F(x) = |x|^{p-1}x}$$

~~X~~ monoton fallend

diss. F ist mon. fallend $\leadsto (F(x) - F(y)) \cdot (x - y) \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \langle F(u) - F(v), u - v \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} \underbrace{\dots}_{\leq 0} dz \leq 0$

(F)
range: Sei $\tau > 0, g \in L^2$. Löse $u - \tau F(u) = g \Leftrightarrow u + \tau |u|^{p-1}u = g$
 lösbar: linke Seite als Funktional, Variationskel., Mikhlin Theorem..
 mit $D(F) = L^{p+1}(\Omega)$. $\forall \int_{\Omega} \dots dz, \quad f \in L^{p+1}$

($\Delta + F$)
range: auch über Var. Tech.

$$\min J(u) = \int_{\Omega} \frac{\tau}{2} |u|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{p+1} |u|^{p+1} - g \cdot u \, dx$$

Gedämpfte Wellengleichung in $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$u' = \begin{pmatrix} q'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \Delta q(t) - |v(t)|^{p-1} v(t) \end{pmatrix} = Au + F(u)$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(v) \end{pmatrix} \text{ mit } f(v) = -|v|^{p-1} v$$

• disso. $\langle F(u) - F(\hat{u}), u - \hat{u} \rangle_H = \langle f(v) - f(\hat{v}), v - \hat{v} \rangle_{L^2} \leq 0$

↙ keine g. Abb. möglich

• var. wie oben

$$q''(t) = \Delta q(t) - |q'(t)|^{p-1} q'(t)$$

Maxwell-Gleichungen in $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$\begin{pmatrix} E'(t) \\ H'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{curl} H(t) \\ -\operatorname{curl} E(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(E(t), H(t)) \\ g(E(t), H(t)) \end{pmatrix}$$

dissipativ für $f = f(E)$, $g = g(H)$, f, g monoton fallend

Outline

Problemstellung $\leftarrow$ Bsp.

Mengenwertige Operatoren

Resolvente

Wofür mengenwertig?

Yoshida Approximation

Cauchy Problem

Cayley Transformation und Stabilität

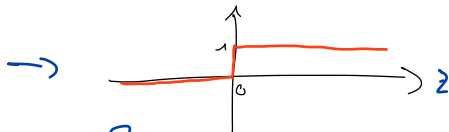
Mengenwertige Operatoren

Beispiel (Subdifferential)

$$f: z \mapsto \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ z & , z \geq 0 \end{cases}$$

Subdiff. $\hat{=}$ "Steigungen aller möglich Tangenten unter f ."

$$\partial f(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ [0, 1] & , z = 0 \\ 1 & , z > 0 \end{cases}$$



keine Funktion, aber
ist Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definition 4

Sei $F \subseteq H \times H$. Definiere

→ wird zur Funktion, falls $\exists!$

- Definitionsbereich $\mathcal{D}(F) = \{x \in H : \exists y \in H \text{ mit } [x, y] \in F\}$
- Bild $R(F) = \{y \in H : \exists x \in H \text{ mit } [x, y] \in F\}$
- Inverse $F^{-1} = \{[y, x] : [x, y] \in F\}$

Beispiel (Subdifferential)

$$f: z \rightarrow \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & z \geq 0 \end{cases} \quad \partial f: z \rightarrow \begin{cases} \{0\}, & z < 0 \\ [0, 1], & z = 0 \\ \{1\}, & z > 0 \end{cases}$$

Def. F ist dissipativ, falls $\langle \gamma_2 - \gamma_1, x_2 - x_1 \rangle_H \leq 0 \quad \forall [x_1, \gamma_1], [x_2, \gamma_2] \in F$

Bsp. $x_1 = 0, x_2 > 0$, $\gamma_1 \in \partial f(x_1) = [0, 1]$, $\gamma_2 \in \partial f(x_2) = \{1\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \gamma_2 - \gamma_1, x_2 - x_1 \rangle_H}_{\geq 0} \geq 0 \quad \leadsto -\partial f \text{ dissipativ.}$$

19min

Resolvente $\mathcal{R}_F, \ell_F = 0$

Resolvente für F maximal dissipativ und $\tau > 0$

$$\mathcal{R}_F = (I - \tau F)^{-1}$$

1. F nicht zusammenhängend: $\mathcal{R}_F(\gamma)$ Lösung von $x - \tau F(x) = \gamma$

a) Existenz durch "Lange cond."

b) End. $\|x - \tau F(x) - (z - \tau F(z))\|^2$
 $= \|x - z\|^2 + \tau^2 \|F(x) - F(z)\|^2 - 2\tau \underbrace{\langle x - z, F(x) - F(z) \rangle}_{\leq 0}$
 $> \|x - z\|^2$ & $\mathcal{R}_F$ Lipschitz mit konst. 1.

2. F zusammenhängend: ersetze $F(x)$ durch $y \in F(x)$

ABER: In beiden Fällen ist $\mathcal{R}_F: H \rightarrow D(F)$ eine Funktion,
nicht zusammenhängend.

Proposition 5

Sei $F \subseteq H \times H$ maximal dissipativ, $G \subseteq H \times H$ dissipativ und eine Fortsetzung von F , d.h.

$$\mathcal{D}(F) \subseteq \mathcal{D}(G) \text{ und } F(x) = G(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(F).$$

Dann ist $F = G$.

Moral: F nicht mengenwertig, aber max. dissipativ.
Dann ex. nicht einmal eine mengenwertige (edle) Fortsetzung, die diss. ist.

Proposition 6 ~ Abgeschlossenheit

Sei F maximal dissipativ, $[x_n, y_n] \in F$ mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ in H .

- (a) Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y) \implies x \in \mathcal{D}(F)$ und $y \in F(x)$. $\neq [x, \cdot] \in F$
- (b) $x_n \rightarrow x$ oder $y_n \rightarrow y \implies x \in \mathcal{D}(F)$ und $y \in F(x)$.

Idee: Definiere $G = F \cup [x, \cdot]$ (das ist wohldef., falls G auch mengenwertig sein darf)
und zeige G ist dissipativ.
 $\stackrel{\text{Prop. 5}}{\implies} F = G$ & $[x, \cdot] \in F$.

$\leadsto$ Prop. 5 muss mengenwertig bewiesen werden.

Ab hier braucht man dann keine mengenwertigen Operatoren mehr.

27.5min

Yoshida Approximation, $\ell_G = 0$

$$\mathcal{R}_F = (I - \tau \bar{F})^{-1}$$

Yoshida Approximation

$$F_\tau = \frac{1}{\tau} (\mathcal{R}_F - I) \quad , \quad D(\bar{F}_\tau) = H.$$

• Motivation (formal) $\bar{F}_\tau = \frac{1}{\tau} \left(\underbrace{\frac{1}{1 - \tau \bar{F}}}_{g(\tau)} \cdot \underbrace{1}_{g(0)} \right) = \frac{1}{\tau} (g(\tau) - g(0)) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} g'(0)$

$$\text{und } g'(\tau)|_{\tau=0} = \bar{F} \cdot \frac{1}{(1 - \tau \bar{F})^2}|_{\tau=0} = \bar{F}.$$

• γ_A wird auch im linearen Fall benutzt zur Lösung der H.C.

Yoshida Approximation, $\ell_G = 0$

$$T_\alpha = \frac{1}{\alpha} (R_T - I)$$

Proposition 7

Sei F maximal dissipativ und F_α die Yosida-Approximation. Dann gilt:

(a) Für alle $\alpha > 0$ ist F_α maximal dissipativ und Lipschitz mit Konstante $\frac{1}{\alpha}$.

(b) $(F_\alpha)_\beta = F_{\alpha+\beta}$ für alle $\alpha, \beta > 0$.

(c) Für jedes $x \in D(A)$ gilt:

- $\|F_\alpha(x)\| \nearrow \|F(x)\|$ und $F_\alpha(x) \rightarrow F(x)$ für $\alpha \rightarrow 0$
- $\|F_\alpha(x) - F(x)\|^2 \leq \|F(x)\|^2 - \|F_\alpha(x)\|^2$.

} $F_\alpha \rightarrow F$

Idee: $F(R_T(x)) = \frac{1}{\alpha} [\underbrace{\alpha F(R_T(x)) - R_T(x)}_{= -x} + R_T(x)] = \frac{1}{\alpha} (R_T(x) - x) = F_\alpha(x)$

$\leftarrow$ das F $\rightarrow$ $x = R_T(x) - \alpha F_\alpha(x)$

• in (c) wird Prop. 6 ebenfalls verwendet.

Idee: Anstatt

$$u' = F(u) \quad (1)$$

betrachte die regularisierte Gleichung

$$u'_\tau = F_\tau(u_\tau) \quad (2)$$

- Da F_τ global Lipschitz ist, ex. für festes $\tau > 0$ eine klass. Lösung u_τ auf $[0, \tau]$. (Picard. v. (.))
- Frage: Was passiert für $\tau \rightarrow 0$? ($F_\tau \rightarrow F$)

Proposition 8

Sei $u_0 \in D(F)$, $T > 0$ und zu $\alpha > 0$ sei u_α die Lösung von (2). Dann gilt

$$\|\dot{u}_\alpha'(t)\| = \|F_\alpha(u_\alpha(t))\| \leq \|F_\alpha(u_0)\| \leq \|F(u_0)\|$$

und $\exists!$ $u \in C([0, T], H)$, sodass für alle $\alpha > 0$ und $t \in [0, T]$ gilt:

"stetige Lösung"

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \left(\frac{\alpha T}{2}\right)^{1/2} \|F(u_0)\| \quad \leadsto \text{Konv.-rate}$$

(Idee: Für $u_\alpha'(t) = F_\alpha(u_\alpha(t))$ ↖ dass F_α

$$1. \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\alpha(t+h) - u_\alpha(t)\|^2 \stackrel{h \rightarrow 0}{\leq} 0$$

$$\|F_\alpha(u_\alpha(t))\| = \|u_\alpha'(t)\| \leq \|F_\alpha(u_0)\| \leq \|F(u_0)\| \rightarrow \text{gleich. Schranke in } \alpha$$

$\ddot{u}_\alpha(0)$

Cauchy Problem

$$2. \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\alpha(t) - u_\beta(t)\|_H^2 \leq \dots \leq \frac{\alpha + \beta}{4} \|F(u_0)\|^2$$

wieg.

- $\Rightarrow$ • Cauchy-Folge in $C([0, T], H)$
 $\rightarrow \exists!$ Grenzwert $u \in C([0, T], H)$
• $\beta \rightarrow 0$ liefert Abschätzung

Theorem 9

~ Notwendigkeit

Sei $F : \mathcal{D}(F) \rightarrow H$ ein maximal dissipativer Operator.

- (a) Für alle $u_0 \in \mathcal{D}(F)$ $\exists!$ absolut stetige Funktion $u : [0, \infty) \rightarrow H$ mit $u(0) = u_0$, $u(t) \in \mathcal{D}(F)$ für alle $t \geq 0$ und

$$u'(t) = F(u(t)) \quad \text{für fast alle } t \geq 0.$$

- (b) $t \mapsto F(u(t))$ rechtsseitig stetig, $t \mapsto \|F(u(t))\|$ monoton fallend. Weiter ist u Lipschitz mit

$$\|\dot{u}\|_{L^\infty(0, \infty, H)} \leq \|F(u_0)\|$$

- (c) $D^+ u(t) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)) = F(u(t))$ für alle $t \geq 0$.

sehr technischer Beweis

7,5 Seiten

Cayley Transformation, $\ell_F \geq 0$

$$C_F = (I + \frac{\tau}{2}F)(I - \frac{\tau}{2}F)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \| (I + \frac{\tau}{2}F)(x) - (I + \frac{\tau}{2}F)(y) \|^2 &= \| x - y \|^2 + \frac{\tau^2}{4} \| F(x) - F(y) \|^2 + \tau \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \\ &= \| (I - \frac{\tau}{2}F)(x) - (I - \frac{\tau}{2}F)(y) \|^2 + 2\tau \langle F(x) - F(y), x - y \rangle \\ &\leq \| \dots \|^2 + 2\tau \ell_F \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

$$x \rightsquigarrow (I - \tau F)^{-1} x$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \| C_F(x) - C_F(y) \|^2 &\leq \| x - y \|^2 + 2\tau \ell_F \| R_F(x) - R_F(y) \|^2 \\ &\leq \| x - y \|^2 \left(1 + 2\tau \ell_F \frac{1}{(1 - \frac{\tau}{2}\ell_F)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\leq e^{3\tau \ell_F} \quad \text{Lipschitz konst. von } C_F.$$

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle_H \leq \ell_F \|u - v\|_H^2, \quad \tau \ell_F < 1$$

Zeitschritt gegeben durch

$$u_{n+1} = S(u_n) = (I - \frac{\tau}{2}F)^{-1} \overbrace{(I + \frac{\tau}{2}L) (I - \frac{\tau}{2}L)^{-1}}^{C_L} (I + \frac{\tau}{2}F)(u_n)$$

Steil. $S^j(x) = R_F C_L C_F \dots C_L \cdot (I + \frac{\tau}{2}F)(x)$
 $= C_F (I - \frac{\tau}{2}F)(x)$
 $= \underbrace{R_F (C_L \cdot C_F)^j}_{\text{Upschritt}} (I - \frac{\tau}{2}F)(x)$
 zu umsetzen in Defekt

$$\tilde{g}_j = (I - \frac{\tau}{2}F)(u(t_{j+1})) - (I - \frac{\tau}{2}F)(S(u(t_j))) \stackrel{!}{=} O(\tau^3).$$