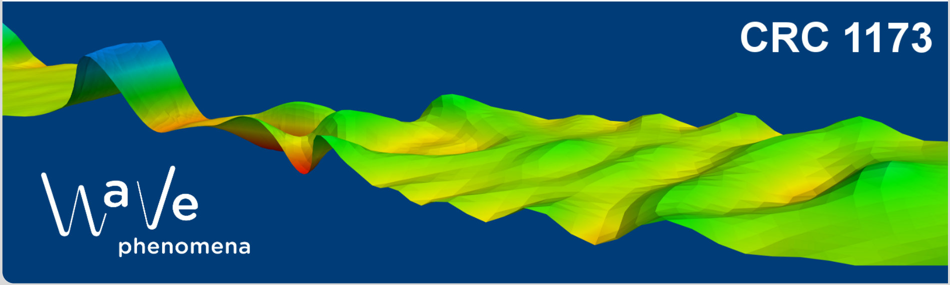
Karlsruher Institut für Technologie

# Ortsdiskretisierung für die quasilineare Wellengleichung

KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY (KIT)



## Motivation

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:

  **Linear:** $\frac{1}{c^2} u'' - \Delta\, u = 0 \qquad (c > 0)$

  auf $[0,T] \times \Omega$

- Rand- und Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= 0, && (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in \Omega, \\ u'(0,x) &= u_{\mathtt{t},0}(x), && x \in \Omega \end{aligned}$$

# Motivation

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:

  **Linear:** $$\frac{1}{c^2} u'' - \Delta\, u = 0 \qquad (c > 0)$$

  **Quasilinear:** $$(u + \lambda u^3)'' - \Delta\, u = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

  auf $[0,T] \times \Omega$

- Rand- und Anfangswerte:
$$\begin{aligned} u(t,x) &= 0, & (t,x) &\in [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x), & x &\in \Omega, \\ u'(0,x) &= u_{\mathtt{t},0}(x), & x &\in \Omega \end{aligned}$$

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# Quasilineare Wellengleichung

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:

$$(u + \lambda u^3)'' - \Delta\, u = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

auf $[0,T] \times \Omega$

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:

$$* \;\; u'' + \;\; * \;\; u' + \;\; * \;\; u = 0$$

auf $[0,T] \times \Omega$

## Quasilineare Wellengleichung

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:
$$(u + \lambda u^3)'' - \Delta\, u = 0 \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$
auf $[0,T] \times \Omega$
- Forme Zeitableitung um
$$\begin{aligned}(u + \lambda u^3)'' &= u'' + \lambda (u^3)'' \\ &= u'' + 3\lambda (u^2 u')' \\ &= u'' + 3\lambda (u^2 u'' + 6\lambda u u' u') \\ &= (1 + 3\lambda u^2) u'' + (6\lambda u u') u'\end{aligned}$$
- Suche $u\colon [0,T] \to X$:
$$(1 + 3\lambda u^2) u'' + (6\lambda u u') u' - \Delta\, u = 0$$
auf $[0,T] \times \Omega$

# Quasilineare Wellengleichung

- Suche $u \colon [0,T] \to X$:
$$(u + \lambda u^3)'' - \Delta u = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$
auf $[0,T] \times \Omega$
- Forme Zeitableitung um
$$\begin{aligned}(u + \lambda u^3)'' &= u'' + \lambda (u^3)'' \\ &= u'' + 3\lambda (u^2 u')' \\ &= u'' + 3\lambda (u^2 u'' + 6\lambda u u' u') \\ &= (1 + 3\lambda u^2) u'' + (6\lambda u u') u'\end{aligned}$$
- Suche $u \colon [0,T] \to X$:
$$\gamma(u) u'' + [\Gamma(u) u'] \, u' - \Delta u = 0$$
auf $[0,T] \times \Omega$

# Quasilineare Wellengleichung

- Suche $u\colon [0,T] \to X$:

$$\gamma(u)u'' + \left[\Gamma(u)u'\right] u' - \Delta\, u = 0$$

  auf $[0,T] \times \Omega$
- Funktionenräume

$$\begin{aligned} X = X^0 &= L^2(\Omega) \\ X^1 &= H_0^1(\Omega) \\ X^2 &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ X^3 &= \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) |\, \Delta\, u \in H_0^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# Annahmen für Wohlgestelltheit

Karlsruher Institut für Technologie

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^2}(0,R)$:

  (PD) $\gamma(y)$ positiv definit (L$\gamma$) $\gamma(y)$ Lipschitz

  (L$\gamma$i) $\gamma(y)^{-1}$ Lipschitz (G) $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} - \gamma(y)^{-1}\Delta) = X$

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0,r)$:

  (L$\Gamma$) $\Gamma(y_1)y_2$ Lipschitz

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^2 \times X^1}(0,R) \cap \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0,r)$:

  (CC) $\left[\Delta, \gamma(y_1)^{-1}\right]$ stetig, $\left[\Delta, \gamma(y_1)^{-1}\left[\Gamma(y_1)y_2\right]\right]\Delta^{-1}$ stetig

---

$$\gamma(u)u'' + \left[\Gamma(u)u'\right]u' - \Delta u = 0$$

## Annahmen für Wohlgestelltheit

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^2}(0,R)$:

(PD) $\gamma(y)$ positiv definit (L$\gamma$) $\gamma(y)$ Lipschitz

(L$\gamma$i) $\gamma(y)^{-1}$ Lipschitz (G) $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} - \gamma(y)^{-1}\Delta) = X$

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0,r)$:

(L$\Gamma$) $\Gamma(y_1)y_2$ Lipschitz

- Für alle $y \in \overline{B}_{X^2 \times X^1}(0,R) \cap \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0,r)$:

(CC) $\left[\Delta, \gamma(y_1)^{-1}\right]$ stetig, $\left[\Delta, \gamma(y_1)^{-1}\left[\Gamma(y_1)y_2\right]\right]\Delta^{-1}$ stetig

---

$$u'' + \gamma(u)^{-1}\left[\Gamma(u)u'\right]u' - \gamma(u)^{-1}\Delta u = 0$$

# Wohlgestelltheit

## Wohlgestelltheit der quasilinearen Wellengleichung[1]

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $C^3$-Gebiet, $R, r > 0$ und

$$(u_0, u_{\mathtt{t},0}) \in \overline{B}_{X^2 \times X^1}(0, \tilde{R}) \cap \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0, \tilde{r})$$

existiert

$$u \in C([0,T], X^3) \cap C^1([0,T], X^2) \cap C^2([0,T], X^1)$$

mit $T = T(r, R) > 0$

[1] Müller 2014.

# Wohlgestelltheit

## Wohlgestelltheit der quasilinearen Wellengleichung[1]

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $C^3$-Gebiet, $R, r > 0$ und

$$(u_0, u_{\mathtt{t},0}) \in \overline{B}_{X^2 \times X^1}(0, \tilde{R}) \cap \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0, \tilde{r})$$

existiert

$$u \in C([0,T], X^3) \cap C^1([0,T], X^2) \cap C^2([0,T], X^1)$$

mit $T = T(r, R) > 0$

- Resultat kann vermutlich auf Quader erweitert werden

[1] Müller 2014.

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# 1. Ordnung Formulierung

- Suche $u\colon [0,T] \to X^1$, sodass für alle $\psi \in X^1$:

$$\left(\gamma(u)u'' \mid \psi\right)_0 + \left(\left[\Gamma(u)u'\right] u' \mid \psi\right)_0 + \left(\nabla u \mid \nabla \psi\right)_0 = 0$$

- Definiere Bilinearformen

$$\begin{aligned} m[u](\varphi, \psi) &= \left(\gamma(u)\varphi \mid \psi\right)_0 \\ b[u,w](\varphi, \psi) &= \left(\left[\Gamma(u)w\right] \varphi \mid \psi\right)_0 \\ a(\varphi, \psi) &= \left(\nabla \varphi \mid \nabla \psi\right)_0 \end{aligned}$$

# 1. Ordnung Formulierung

- Suche $u\colon [0,T] \to X^1$, sodass für alle $\psi \in X^1$:

$$m[u](u'',\psi) + b[u,u'](u',\psi) + a(u,\psi) = 0$$

- Definiere Bilinearformen

$$\begin{aligned} m[u](\varphi,\psi) &= (\gamma(u)\varphi \mid \psi)_0 \\ b[u,w](\varphi,\psi) &= ([\Gamma(u)w]\,\varphi \mid \psi)_0 \\ a(\varphi,\psi) &= (\nabla\varphi \mid \nabla\psi)_0 \end{aligned}$$

- (PD)+(L$\gamma$) $\Rightarrow m[u]$ ist für alle $u \in \overline{B}_{X^2}(0,R)$ Skalarprodukt auf $X \times X$
- (L$\Gamma$) $\Rightarrow b[u,w]$ ist für $(u,w) \in \overline{B}_{X^3 \times X^2}(0,r)$ monoton und beschränkt
- $a$ ist Skalarprodukt auf $X^1 \times X^1$

# 1. Ordnung Formulierung

- Definiere Operatoren

$$\mathrm{A}[u] = -\gamma(u)^{-1}\,\Delta \qquad \mathrm{B}[u,w] = \gamma(u)^{-1}\,[\Gamma(u)w]$$

- Suche $u\colon [0,T] \to X^1$:

$$u'' + \gamma(u)^{-1}\,[\Gamma(u)u']\,u' - \gamma(u)^{-1}\,\Delta\,u = 0$$

## 1. Ordnung Formulierung

- Definiere Operatoren

$$\mathrm{A}[u] = -\gamma(u)^{-1}\,\Delta \qquad\qquad \mathrm{B}[u,w] = \gamma(u)^{-1}\,[\Gamma(u)w]$$

- Es folgt

$$\begin{aligned} m[u](\varphi,\psi) &= (\gamma(u)\varphi \mid \psi)_0 \\ b[u,w](\varphi,\psi) &= ([\Gamma(u)w]\,\varphi \mid \psi)_0 = m[u](\mathrm{B}[u,w]\varphi,\psi) \\ a(\varphi,\psi) &= (\nabla\,\varphi \mid \nabla\,\psi)_0 \quad = m[u](\mathrm{A}[u]\varphi,\psi) \end{aligned}$$

- Suche $u\colon [0,T] \to X^1$:

$$u'' + \mathrm{B}[u,u']u' + \mathrm{A}[u]u = 0$$

# 1. Ordnung Formulierung

- Definiere Operatoren

$$\mathrm{A}[u] = -\gamma(u)^{-1}\,\Delta \qquad\qquad \mathrm{B}[u,w] = \gamma(u)^{-1}\,[\Gamma(u)w]$$

- Es folgt

$$\begin{aligned} m[u](\varphi,\psi) &= (\gamma(u)\varphi \mid \psi)_0 \\ b[u,w](\varphi,\psi) &= ([\Gamma(u)w]\,\varphi \mid \psi)_0 = m[u](\mathrm{B}[u,w]\varphi,\psi) \\ a(\varphi,\psi) &= (\nabla\varphi \mid \nabla\psi)_0 \qquad = m[u](\mathrm{A}[u]\varphi,\psi) \end{aligned}$$

- Suche $u, w\colon [0,T] \to X^1$:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{A}[u] & \mathrm{B}[u,w] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

mit Skalarprodukt "$a, m[u]$"

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# Diskrete Funktionenräume

- Standard-Finite Elemente

$$\begin{aligned}\widehat{X} \;\; &= (\mathcal{P}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}) \subset L^2(\Omega) = X \\ \widehat{X}^1 &= (\mathcal{P}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}) \subset H_0^1(\Omega) = X^1\end{aligned}$$

- Ähnliche Definiton für $\widehat{X}^2, \widehat{X}^3$ nicht möglich, da $\mathcal{P}^k \not\subset H^2(\Omega)$

# Diskrete Funktionenräume

- Standard Finite Elemente

$$\begin{aligned} \widehat{X} \; &= (\mathcal{P}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}) \subset L^2(\Omega) = X \\ \widehat{X}^1 &= (\mathcal{P}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}) \subset H_0^1(\Omega) = X^1 \end{aligned}$$

- Ähnliche Definiton für $\widehat{X}^2, \widehat{X}^3$ nicht möglich, da $\mathcal{P}^k \not\subset H^2(\Omega)$
- Ausweg: $H^3(\Omega)$-konforme Finite Elemente[2]

[2]Hu and Zhang 2015, (auf Rechtecksgitter).

# Diskrete Funktionenräume

- Ausweg: $H^3(\Omega)$-konforme Finite Elemente
- Definiere für $k \geq 3$ stückweisen Polynomraum $\mathcal{V}^k = \mathcal{Q}^k(\widehat{\mathcal{T}}) \cap H^3(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\widehat{X} \; &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_X) \subset L^2(\Omega) = X \\
\widehat{X}^1 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^1}) \subset H_0^1(\Omega) = X^1 \\
\widehat{X}^2 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^2}) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = X^2 \\
\widehat{X}^3 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^3}) \subset \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) | \, \Delta\, u \in H_0^1(\Omega)\} = X^3
\end{aligned}
$$

# Diskrete Funktionenräume

- Ausweg: $H^3(\Omega)$-konforme Finite Elemente
- Definiere für $k \geq 3$ stückweisen Polynomraum $\mathcal{V}^k = \mathcal{Q}^k(\widehat{\mathcal{T}}) \cap H^3(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\widehat{X} \ &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_X) \subset L^2(\Omega) = X \\
\widehat{X}^1 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^1}) \subset H_0^1(\Omega) = X^1 \\
\widehat{X}^2 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^2}) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = X^2 \\
\widehat{X}^3 &= (\mathcal{V}^k(\widehat{\mathcal{T}}), \|\cdot\|_{X^3}) \subset \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) | \, \Delta\, u \in H_0^1(\Omega)\} = X^3
\end{aligned}
$$

- Interpolation $\mathrm{I}_h : H^r(\Omega) \to \mathcal{V}(\widehat{\mathcal{T}})$ $(r \geq k)$ mit Konvergenzordnung

$$
\|(\mathrm{Id} - \mathrm{I}_h)u\|_{H^i(\Omega)} \leq C h^{\min(k+1,r)-i} \|u\|_{H^r(\Omega)} \qquad (i \leq k)
$$

- Konstruktion der Basisfunktionen und Interpolation kompliziert

# Ortsdiskretisierung

- Suche $u\colon [0,T] \to X^1$, sodass für alle $\psi \in X^1$:

$$m[u](u'', \psi) + b[u, u'](u', \psi) + a(u, \psi) = 0$$

- Suche $\widehat{u}\colon [0,T] \to \widehat{X}^1$, sodass für alle $\widehat{w} \in \widehat{X}^1$:

$$\widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{u}'', \widehat{w}) + \widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{u}'](\widehat{u}', \widehat{w}) + \widehat{a}(\widehat{u}, \widehat{w}) = 0$$

  mit

$$\widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) \approx m[u](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$
$$\widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{w}](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) \approx b[u, w](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$
$$\widehat{a}(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) \approx a(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$

# Ortsdiskretisierung

- Suche $\widehat{u}\colon [0,T] \to \widehat{X}^1$, sodass für alle $\widehat{w} \in \widehat{X}^1$:

$$\widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{u}'', \widehat{w}) + \widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{u}'](\widehat{u}', \widehat{w}) + \widehat{a}(\widehat{u}, \widehat{w}) = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
\widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) &= \left(\widehat{\gamma}(\widehat{u})\widehat{\varphi} \mid \widehat{\psi}\right)_0, & \widehat{\gamma}(\widehat{u}) &= \mathrm{I}_h\, \gamma(\widehat{u}) \\
\widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{w}](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) &= \left([\widehat{\Gamma}(\widehat{u})\widehat{w}]\widehat{\varphi} \mid \widehat{\psi}\right)_0, & [\widehat{\Gamma}(\widehat{u})\widehat{w}] &= \mathrm{I}_h\, [\Gamma(\widehat{u})\widehat{w}] \\
\widehat{a}(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) &= a(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})
\end{aligned}$$

- $\widehat{m}[\widehat{u}]$ ist für alle $\widehat{u} \in \overline{B}_{\widehat{X}^2(\Omega)}(0, R_d)$ Skalarprodukt auf $\widehat{X} \times \widehat{X}$
- $\widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{u}']$ ist für $(\widehat{u}, \widehat{u}') \in \overline{B}_{\widehat{X}^3 \times \widehat{X}^2}(0, r_d)$ monoton und beschränkt
- $\widehat{a}$ ist Skalarprodukt auf $\widehat{X}^1 \times \widehat{X}^1$

# 1. Ordnung Formulierung

- Definiere Operatoren $\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}], \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}] \colon \widehat{X}^1 \to \widehat{X}^1$:

$$\widehat{b}[\widehat{u}, \widehat{w}](\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}]\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$
$$\widehat{a}(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$

- Suche $\widehat{u} \colon [0, T] \to \widehat{X}^1$:

$$\widehat{u}'' + \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{u}']\widehat{u}' + \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\widehat{u} = 0$$

- Suche $\widehat{u}, \widehat{w} \colon [0, T] \to \widehat{X}^1$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{w} \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{w} \end{pmatrix} = 0,$$

mit Skalarprodukt "$\widehat{a}, \widehat{m}[\widehat{u}]$"

shortcut

# Gliederung

Quasilineare Wellengleichung

Wohlgestelltheit

1. Ordnung Formulierung

Ortsdiskretisierung

Konvergenzanalyse

# Vorbereitung für unified error analysis[4]

- Orthogonalprojektionen $\Pi_u, \Pi_w[\widehat{u}, u] \colon X^1 \to \widehat{X}^1$:

$$\widehat{a}(\Pi_u \varphi, \widehat{\psi}) = a(\varphi, \widehat{\psi})$$
$$\widehat{m}[\widehat{u}](\Pi_w[\widehat{u}, u]\varphi, \widehat{\psi}) = m[u](\varphi, \widehat{\psi})$$

- **Ziel:** Beschränke Diskretisierungsfehler $\widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u u - \widehat{u} \\ \mathrm{I}_h w - \widehat{w} \end{pmatrix}$

[3] Hipp, Hochbruck, and Stohrer 2018.

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u - \widehat{u} \\ \mathrm{I}_h\, w - \widehat{w} \end{pmatrix}$ erfüllt:

$$\widehat{e}' + \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \Pi_u\, u' - \mathrm{I}_h\, w$$

$$\delta_2 = \mathrm{I}_h\, w' + \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\, \Pi_u\, u + \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\, \mathrm{I}_h\, w$$

shortcut

---

$$\begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{w} \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \widehat{w} \end{pmatrix} = 0$$

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u - \widehat{u} \\ \mathrm{I}_h\, w - \widehat{w} \end{pmatrix}$ erfüllt:

$$\widehat{e}' + \begin{pmatrix} 0 & -\,\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\,\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \Pi_u\, u' - \mathrm{I}_h\, w \overset{w=u'}{=} (\Pi_u - \mathrm{I}_h) u' \\
\delta_2 &= \mathrm{I}_h\, w' + \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\, \Pi_u\, u + \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\, \mathrm{I}_h\, w \\
&= (\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]) w' + (\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\, \Pi_u - \Pi_w[\widehat{u},u]\, \mathrm{A}[u]) u \\
&\qquad + (\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\, \mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]\, \mathrm{B}[u,w]) w
\end{aligned}$$

---

$$\Pi_w[\widehat{u},u](w' - \mathrm{A}[u]u - \mathrm{B}[u,w]w) = 0$$

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u - \widehat{u} \\ \mathrm{I}_h\, w - \widehat{w} \end{pmatrix}$ erfüllt:

$$\widehat{e}' + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix} \widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix}' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}] \end{pmatrix}}_{=\widehat{\mathrm{S}}} \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

- Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} \|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} &\leq \|e^{-t\widehat{\mathrm{S}}}\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + \int_0^t \|e^{-(t-s)\widehat{\mathrm{S}}}\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds \\ &\leq e^{\beta t}\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}\|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds \\ &\leq e^{\beta t}\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t}\int_0^t \|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds \end{aligned}$$

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u - \widehat{u} \\ \mathrm{I}_h\, w - \widehat{w} \end{pmatrix}$ erfüllt:

$$\widehat{e}' + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}] \end{pmatrix} \widehat{e} = \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix}' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}] & \widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}] \end{pmatrix}}_{=\widehat{\mathrm{S}}} \begin{pmatrix} \Pi_u\, u \\ \mathrm{I}_h\, w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

- Variation der Konstanten:

$$\|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq e^{\beta t} \|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t} \int_0^t \|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\Pi_u - \mathrm{I}_h) u' \\ \delta_2 &= (\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u}, u]) w' + (\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\, \Pi_u - \Pi_w[\widehat{u}, u]\, \mathrm{A}[u]) u \\ &\quad + (\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u}, \widehat{w}]\, \mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u}, u]\, \mathrm{B}[u, w]) w \end{aligned}$$

# Diskretisierungsfehler

- $(\Pi_u\,\widehat{u} - \mathrm{I}_h)u'$:

$$\begin{aligned}\widehat{a}((\Pi_u\,\widehat{u} - \mathrm{I}_h)u', \widehat{\varphi}) &= a(u', \widehat{\varphi}) - \widehat{a}(\mathrm{I}_h\,u', \widehat{\varphi}) \\ &= a((\mathrm{Id} - \mathrm{I}_h)u', \widehat{\varphi}) + a(\mathrm{I}_h\,u', \widehat{\varphi}) - \widehat{a}(\mathrm{I}_h\,u', \widehat{\varphi})\end{aligned}$$

---

$$\widehat{a}(\Pi_u\,\varphi, \widehat{\psi}) = a(\varphi, \widehat{\psi})$$

# Diskretisierungsfehler

- $(\Pi_u \,\widehat{u} - \mathrm{I}_h)u'$:

$$\widehat{a}((\Pi_u \,\widehat{u} - \mathrm{I}_h)u', \widehat{\varphi}) = a(u', \widehat{\varphi}) - \widehat{a}(\mathrm{I}_h \,u', \widehat{\varphi})$$
$$= a((\mathrm{Id} - \mathrm{I}_h)u', \widehat{\varphi}) + a(\mathrm{I}_h \,u', \widehat{\varphi}) - \widehat{a}(\mathrm{I}_h \,u', \widehat{\varphi})$$

- $(\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u}, u])w'$:

$$\widehat{m}[\widehat{u}]((\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u}, u])w', \widehat{\psi}) = \widehat{m}[\widehat{u}](\mathrm{I}_h \,w', \widehat{\psi}) - m[u](w', \widehat{\psi})$$
$$= \widehat{m}[\widehat{u}](\mathrm{I}_h \,w', \widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{I}_h \,w', \widehat{\psi}) + m[u]((\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})w', \widehat{\psi})$$

---

$$\widehat{m}[\widehat{u}](\Pi_w[\widehat{u}, u]\varphi, \widehat{\psi}) = m[u](\varphi, \widehat{\psi})$$

# Diskretisierungsfehler

- $(\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u}, u]\,\mathrm{A}[u])u$:

$$\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u}, u]\,\mathrm{A}[u])u, \widehat{\psi}) = \widehat{a}(\Pi_u\, u, \widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{A}[u]u, \widehat{\psi})$$

---

$$\widehat{a}(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$$

$$\widehat{m}[\widehat{u}](\Pi_w[\widehat{u}, u]\varphi, \widehat{\psi}) = m[u](\varphi, \widehat{\psi})$$

# Diskretisierungsfehler

Karlsruher Institut für Technologie

- $(\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u}, u]\,\mathrm{A}[u])u$:

$$\begin{aligned}\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u}, u]\,\mathrm{A}[u])u, \widehat{\psi}) &= \widehat{a}(\Pi_u\, u, \widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{A}[u]u, \widehat{\psi}) \\ &= a(u, \widehat{\psi}) - a(u, \widehat{\psi}) = 0\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}\widehat{a}(\Pi_u\, \varphi, \widehat{\psi}) &= a(\varphi, \widehat{\psi}) \\ a(\varphi, \psi) &= m[u](\mathrm{A}[u]\varphi, \psi)\end{aligned}$$

# Diskretisierungsfehler

- $(\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{A}[u])u$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{A}[u])u,\widehat{\psi}) &= \widehat{a}(\Pi_u\,u,\widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{A}[u]u,\widehat{\psi}) \\
&= a(u,\widehat{\psi}) - a(u,\widehat{\psi}) = 0
\end{aligned}
$$

- $(\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\,\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{B}[u,w])w$:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\,\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{B}[u,w])w,\widehat{\psi}) \\
&\qquad = \widehat{b}[\widehat{u},\widehat{w}](\mathrm{I}_h\,w,\widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{B}[u,w]w,\widehat{\psi})
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
\widehat{b}[\widehat{u},\widehat{w}](\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) &= \widehat{m}[\widehat{u}](\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) \\
\widehat{m}[\widehat{u}](\Pi_w[\widehat{u},u]\varphi,\widehat{\psi}) &= m[u](\varphi,\widehat{\psi})
\end{aligned}
$$

# Diskretisierungsfehler

- $(\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{A}[u])u$:

$$\begin{aligned}\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{A}}[\widehat{u}]\,\Pi_u - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{A}[u])u,\widehat{\psi}) &= \widehat{a}(\Pi_u\,u,\widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{A}[u]u,\widehat{\psi})\\ &= a(u,\widehat{\psi}) - a(u,\widehat{\psi}) = 0\end{aligned}$$

- $(\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\,\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{B}[u,w])w$:

$$\begin{aligned}&\widehat{m}[\widehat{u}]((\widehat{\mathrm{B}}[\widehat{u},\widehat{w}]\,\mathrm{I}_h - \Pi_w[\widehat{u},u]\,\mathrm{B}[u,w])w,\widehat{\psi})\\ &\quad= \widehat{b}[\widehat{u},\widehat{w}](\mathrm{I}_h\,w,\widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{B}[u,w]w,\widehat{\psi})\\ &\quad= \widehat{b}[\widehat{u},\widehat{w}](\mathrm{I}_h\,w,\widehat{\psi}) - b[u,w](\mathrm{I}_h\,w,\widehat{\psi}) + b[u,w]((\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})w,\widehat{\psi})\end{aligned}$$

---

$$b[u,w](\varphi,\psi) = m[u](\mathrm{B}[u,w]\varphi,\psi)$$

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e}$ erfüllt:

$$\|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq e^{\beta t}\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t}\int_0^t \|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds$$

mit

$$\|\delta_1\|_{\widehat{a}} = \sup_{\|\widehat{\varphi}\|_{\widehat{a}}=1} \Big(a((\mathrm{Id}-\mathrm{I}_h)u',\widehat{\varphi}) + a(\mathrm{I}_h\, u',\widehat{\varphi}) - \widehat{a}(\mathrm{I}_h\, u',\widehat{\varphi})\Big)$$

$$\begin{aligned}\|\delta_2\|_{\widehat{m}[\widehat{u}]} = \sup_{\|\widehat{\psi}\|_{\widehat{m}[\widehat{u}]}=1} \Big(&\widehat{m}[\widehat{u}](\mathrm{I}_h\, w',\widehat{\psi}) - m[u](\mathrm{I}_h\, w',\widehat{\psi}) \\ &+ m[u]((\mathrm{I}_h-\mathrm{Id})w',\widehat{\psi}) + b[u,w]((\mathrm{I}_h-\mathrm{Id})w,\widehat{\psi}) \\ &+ \widehat{b}[\widehat{u},\widehat{w}](\mathrm{I}_h\, w,\widehat{\psi}) - b[u,w](\mathrm{I}_h\, w,\widehat{\psi})\Big)\end{aligned}$$

# Diskretisierungsfehler

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e}$ erfüllt:

$$\|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq e^{\beta t}\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t}\int_0^t \|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds$$

mit

$$\|\delta_1\|_{\widehat{a}} = |(\mathrm{Id} - \mathrm{I}_h)u'|_1$$

$$\begin{aligned}\|\delta_2\|_{\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq C\Big(&\|(\widehat{\gamma}(\widehat{u}) - \gamma(u))\,\mathrm{I}_h\, w'\|_0 \\ &+ \|\gamma(u)(\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})w'\|_0 + \|[\Gamma(u)w]\,(\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})w\|_0 \\ &+ \|([\widehat{\Gamma}(\widehat{u})\widehat{w}] - [\Gamma(u)w])\,\mathrm{I}_h\, w\|_0\Big)\end{aligned}$$

# Diskretisierungsfehler

Karlsruher Institut für Technologie

- Diskretisierungsfehler $\widehat{e}$ erfüllt:

$$\|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq e^{\beta t}\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + e^{\beta t}\int_0^t \|\delta(s)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]}\, ds$$

mit

$$\|\delta_1\|_{\widehat{a}} = \|(\mathrm{Id} - \mathrm{I}_h)u'\|_1$$

$$\|\delta_2\|_{\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq C(\|w\|, \|w'\|)\|\widehat{e}\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + C\|*(\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})*\|_*$$

- Gronwall liefert

$$\|\widehat{e}(t)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} \leq e^{(C(\|w\|,\|w'\|)+\beta)t}\left(\|\widehat{e}(0)\|_{\widehat{a},\widehat{m}[\widehat{u}]} + t\sup_{t\in[0,T]} C\|*(\mathrm{I}_h - \mathrm{Id})*\|_*\right)$$

# Offene Fragen



- Wohlgestelltheit auf Quadern?
- Wohlgestelltheit für Standard-FE/dG? In welchen Räumen?
- Ähnliche Abschätzung für Standard-FE/dG?
- Volldiskretisierung?

# References

Hipp, David, Marlis Hochbruck, and Christian Stohrer (2018). "Unified error analysis for nonconforming space discretizations of wave-type equations". In: *IMA Journal of Numerical Analysis*, dry036. eprint: /oup/backfile/content_public/journal/imajna/pap/10.1093_imanum_dry036/1/dry036.pdf.

Hu, Jun and Shangyou Zhang (2015). "The minimal conforming $H^k$ finite element spaces on $R^n$ rectangular grids". In: *Math. Comp.* 84.292, pp. 563–579.

Müller, Dominik (2014). "Well-posedness for a general class of quasilinear evolution equations - with applications to Maxwell's equations". PhD thesis.