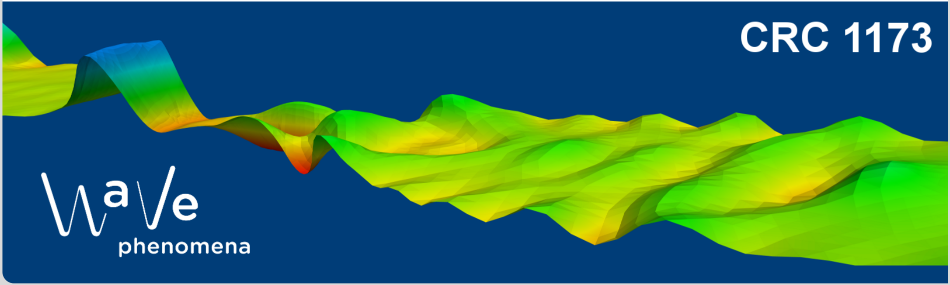
Karlsruher Institut für Technologie

# IMEX-Zeitintegration für semilineare Wellengleichungen zweiter Ordnung


**Jan Leibold, Marlis Hochbruck**

Institute für Angewandte und Numerische Mathematik

# Setting

## Schwache Formulierung einer PDE

finde $u\colon [0, T] \to V$ sodass

$$m\big(u'', w\big) + b(u', w) + a(u, w) = m\big(f(t, u), w\big), \quad \forall w \in V$$

mit

- Hilberträumen $V \overset{d}{\hookrightarrow} H$
- $m$ Skalarprodukt auf $H$
- $a$ Skalarprodukt auf $V$
- $b$ beschränkte und monotone Bilinearform auf $V \times H$
- $f\colon [0, T] \times V \to H$ (lokal) Lipschitz stetig d.h.

$$\|f(t, v) - f(t, w)\|_m \leq L\|v - w\|_a$$

# Formulierung als Evolutionsgleichung

**Erinnerung:**

$$m\big(u'', w\big) + b(u', w) + a(u, w) = m\big(f(t, u), w\big), \quad \forall w \in V$$

zugehörige Operatoren $A\colon D(A) \to H$, $B\colon V \to H$ mit

$$\begin{aligned} m\big(Av, w\big) &= a(v, w), && \forall v \in D(A), w \in V, \\ m\big(Bv, w\big) &= b(v, w), && \forall v \in V, w \in H \end{aligned}$$

**Evolutionsgleichung zweiter Ordnung in $H$**

finde $u\colon [0, T] \to D(A)$ sodass

$$u'' + Bu' + Au = f(t, u)$$

# Formulierung erster Ordnung

## Evolutionsgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + Bu' + Au = f(t,u) \quad \text{in } H$$

## Erste Ordnung Formulierung

$$x' + Sx = g(t,x) \quad \text{in } X = V \times H$$

$$\text{mit} \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ A & B \end{bmatrix}, \quad g(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t,u) \end{bmatrix}$$

# Formulierung erster Ordnung

## Evolutionsgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + Bu' + Au = f(t,u) \quad \text{in } H$$

## Erste Ordnung Formulierung

$$x' + Sx = g(t,x) \quad \text{in } X = V \times H$$

$$\text{mit} \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ A & B \end{bmatrix}, \quad g(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t,u) \end{bmatrix}$$

**Motivation für linear implizite/implizit-explizite (IMEX) Verfahren:**

- (unbeschränkter) linearer Teil muss implizit behandelt werden
- voll implizite Zeitintegration teuer wegen der Nichtlinearität

**Idee:** linearen Teil implizit aber „netten“ nichtlinearen Teil explizit behandeln

# Linear implizite Verfahren in Literatur

Karlsruher Institut für Technologie

Wird größtenteils so verstanden:

- wende implizites Verfahren auf DGL an
- Linearisierung des Verfahrens (exakte Linearisierung oder Approximation der Jacobi Matrix)
- Beispiele:
  - Rosenbrock-Verfahren
  - Linear implizites Crank–Nicolson Verfahren

# Rosenbrock-Verfahren

- DGL: $x' = g(x)$
- diagonal implizites RKV:

$$X_i' = g(x_0 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j' + \tau a_{ii} X_i'), \qquad i = 1, \ldots, s$$

- Linearisierung

$$X_i' = g(\widetilde{X}_i) + \tau g'(\widetilde{X}_i) a_{ii} X_i', \qquad i = 1, \ldots, s$$

$$\widetilde{X}_i = x_0 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j'$$

- allg. Rosenbrockverfahren: $J = g'(x_0)$

$$X_i' = g(x_0 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j') + \tau J \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} X_j', \qquad i = 1, \ldots, s$$

# IMEX Verfahren in der Literatur

- Kombination:
  - implizites Verfahren für steifen Anteil
  - explizites Verfahren für nichtsteifen Anteil
- häufige Verwendung bei Diffusion-Reaktionsgleichungen
  - steifer (linearer) Diffusionsterm
  - nichtsteifer (nichtlinearer) Reaktionsterm
- Beispiele: Kombination von explizitem und implizitem
  - Runge–Kutta Verfahren
  - Mehrschrittverfahren

# IMEX Verfahren in der Literatur

- Kombination:
  - implizites Verfahren für steifen Anteil
  - explizites Verfahren für nichtsteifen Anteil
- häufige Verwendung bei Diffusion-Reaktionsgleichungen
  - steifer (linearer) Diffusionsterm
  - nichtsteifer (nichtlinearer) Reaktionsterm
- Beispiele: Kombination von explizitem und implizitem
  - Runge–Kutta Verfahren
  - Mehrschrittverfahren

**IMEX Mehrschrittverfahren** für $x' = g_1(x) + g_2(x)$ :

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{n-j} + \tau \sum_{j=1}^{k} \widehat{\beta}_j g_1(x_{n-j}) + \tau \sum_{j=0}^{k} \beta_j g_2(x_{n-j})$$

# Neues IMEX Verfahren

**Bisher:** Verfahren für Gleichungen erster Ordnung
**Ziel:** effizientes Verfahren für Gleichung zweiter Ordnung

- Idee: Leapfrog für nichtlinearen Anteil, Crank–Nicolson für linearen Anteil

## Motivation: Crank–Nicolson (CN)

$$x^{n+1} = x^n - \tau S \frac{x^n + x^{n+1}}{2} + \tau \frac{g^n + g^{n+1}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$R_+ x^{n+1} = R_- x^n + \tfrac{\tau}{2}\left(g^n + g^{n+1}\right)$$

Schrittweite $\tau$, $t_n = \tau n$, $g^n = g(t_n, x^n)$, $R_\pm = (\mathrm{I} \pm \tfrac{\tau}{2} S)$

# IMEX Verfahren

## Motivation: CN (in zweiter Ordnung Formulierung)

$$
\begin{aligned}
Q_+ v^{n+1/2} &= v^n - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{4}\left(f^n + f^{n+1}\right) \\
u^{n+1} &= u^n + \tau v^{n+1/2} \\
v^{n+1} &= Q_- v^{n+1/2} - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{4}\left(f^n + f^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

mit $x^n = \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix}$, $f^n = f(t_n, u^n)$, $Q_\pm = \left(\mathrm{I} \pm \tfrac{\tau}{2} B \pm \tfrac{\tau^2}{4} A\right)$

# IMEX Verfahren

## IMEX Verfahren

$$
\begin{aligned}
Q_+ v^{n+1/2} &= v^n - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{2} f^n \\
u^{n+1} &= u^n + \tau v^{n+1/2} \\
v^{n+1} &= Q_- v^{n+1/2} - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{2} f^{n+1}
\end{aligned}
$$

mit $x^n = \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix}$, $f^n = f(t_n, u^n)$, $Q_\pm = (\mathrm{I} \pm \tfrac{\tau}{2} B \pm \tfrac{\tau^2}{4} A)$

Kombination von CN und Leapfrog Verfahren

# IMEX Verfahren

## IMEX Verfahren

$$\begin{aligned} Q_+ v^{n+1/2} &= v^n - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{2} f^n \\ u^{n+1} &= u^n + \tau v^{n+1/2} \\ v^{n+1} &= Q_- v^{n+1/2} - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{2} f^{n+1} \end{aligned}$$

mit $x^n = \begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix}$, $f^n = f(t_n, u^n)$, $Q_\pm = (\mathrm{I} \pm \tfrac{\tau}{2} B \pm \tfrac{\tau^2}{4} A)$

Kombination von CN und Leapfrog Verfahren

**Äquivalente Formulierung**:

1. Löse $Q_+ v^{n+1/2} = v^n - \tfrac{\tau}{2} A u^n + \tfrac{\tau}{2} f^n$
2. Setze $u^{n+1} = u^n + \tau v^{n+1/2}$
3. Setze $v^{n+1} = -v^n + 2 v^{n+1/2} + \tfrac{\tau}{2} \left( f^{n+1} - f^n \right)$

lediglich ein Gleichungssystem mit $A$

# Eigenschaften von $Q_+^{-1}$

Karlsruher Institut für Technologie

$Q_+ = \mathrm{I} + \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A \colon D(A) \to H$ ist invertierbar mit

**a)** $\left\| \left( \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A \right) Q_+^{-1} \right\|_{H \leftarrow H} \leq 1,$

**b)** $\left\| Q_+^{-1} \right\|_{V \leftarrow H} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau}.$

# Eigenschaften von $Q_+^{-1}$

$Q_+ = \mathrm{I} + \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A \colon D(A) \to H$ ist invertierbar mit

**a)** $\left\| \left(\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A\right) Q_+^{-1} \right\|_{H \leftarrow H} \leq 1,$

**b)** $\left\| Q_+^{-1} \right\|_{V \leftarrow H} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau}.$

**Beweis der Abschätzungen:** $v \in H$ und $z = Q_+^{-1} v \in D(A)$

$$
\begin{aligned}
\|v\|_m^2 &= \left\| \left(\mathrm{I} + \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A\right) z \right\|_m^2 \\
&= \|z\|_m^2 + \left\| \left(\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A\right) z \right\|_m^2 + 2\frac{\tau}{2} m\big(Bz, z\big) + 2\frac{\tau^2}{4} m\big(Az, z\big) \\
&\geq \left\| \left(\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A\right) z \right\|_m^2 + \frac{\tau^2}{2} \|z\|_a^2 \\
&= \left\| \left(\frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{4}A\right) Q_+^{-1} v \right\|_m^2 + \frac{\tau^2}{2} \|Q_+^{-1} v\|_a^2
\end{aligned}
$$

# Wohlgestelltheit des Schemas

Erinnerung:

1. Löse $Q_+ v^{n+1/2} = v^n - \frac{\tau}{2} A u^n + \frac{\tau}{2} f^n$
2. Setze $\qquad u^{n+1} = u^n + \tau v^{n+1/2}$
3. Setze $\qquad v^{n+1} = -v^n + 2 v^{n+1/2} + \frac{\tau}{2}\left(f^{n+1} - f^n\right)$

mit $Q_+ = \mathrm{I} + \frac{\tau}{2} B + \frac{\tau^2}{4} A$

- Erinnerung: $Q_+ \colon D(A) \to H$ ist invertierbar mit

$$Q_+^{-1} \colon H \to D(A)$$

- Für $u^n \in D(A), v^n \in H$
  $\Rightarrow v^{n+1/2} \in D(A) \quad \Rightarrow \quad u^{n+1} \in D(A), v^{n+1} \in H$

$\Rightarrow$ Schema ist wohldefiniert

# Fehleranalyse

- in erster Ordnung Formulierung
- IMEX-Verfahren als Störung von Crank–Nicolson

## Erste Ordnung Crank–Nicolson Rekursion

$$R_+ x^{n+1} = R_- x^n + \frac{\tau}{2}\left(f^n + f^{n+1}\right)$$

# Fehleranalyse

- in erster Ordnung Formulierung
- IMEX-Verfahren als Störung von Crank–Nicolson

**Erste Ordnung Rekursion des IMEX Verfahrens**

$$R_+ x^{n+1} = R_- x^n + \frac{\tau}{2}\left(f^n + f^{n+1}\right) + \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} f^n - f^{n+1} \\ -B\left(f^n - f^{n+1}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_+^{-1} = \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\left(\mathrm{I} + \frac{\tau}{2}B\right) & \frac{\tau}{2}Q_+^{-1} \\ -\frac{2}{\tau} + \frac{2}{\tau}Q_+^{-1}\left(\mathrm{I} + \frac{\tau}{2}B\right) & Q_+^{-1} \end{bmatrix}$$

# Fehleranalyse

- in erster Ordnung Formulierung
- IMEX-Verfahren als Störung von Crank–Nicolson

## Erste Ordnung Rekursion des IMEX Verfahrens

$$x^{n+1} = R_+^{-1} R_- x^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( f^n + f^{n+1} \right) + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1} \left( f^n - f^{n+1} \right) \\ - \left( B + \tfrac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \left( f^n - f^{n+1} \right) \end{bmatrix}$$

$$R_+^{-1} = \begin{bmatrix} Q_+^{-1} \left( \mathrm{I} + \tfrac{\tau}{2} B \right) & \tfrac{\tau}{2} Q_+^{-1} \\ -\tfrac{2}{\tau} + \tfrac{2}{\tau} Q_+^{-1} \left( \mathrm{I} + \tfrac{\tau}{2} B \right) & Q_+^{-1} \end{bmatrix}$$

# Fehleranalyse für Crank–Nicolson

Notation: $e^n = x^n - x(t_n)$, $\widetilde{g}^n = g(t_n, x(t_n))$

1) Fehlerrekursion von Crank–Nicolson

$$e^{n+1} = R_+^{-1} R_- e^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right) + R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1}$$

- **Lipschitz Bedingung:** $\|g^n - \widetilde{g}^n\|_X \leq L \|e^n\|_X$
- **Lokaler Fehler:** $\|\delta_{\mathrm{CN}}^m\|_X \leq C\tau^3$, $C = C(u^{(4)}, u^{(3)})$
- **Stablilität:** $\|R_+^{-1} R_-\|_{X \leftarrow X} \leq 1$, $\|R_+^{-1}\|_{X \leftarrow X} \leq 1$

# Fehleranalyse für Crank–Nicolson

Notation: $e^n = x^n - x(t_n)$, $\widetilde{g}^n = g(t_n, x(t_n))$

1) Fehlerrekursion von Crank–Nicolson

$$e^{n+1} = R_+^{-1} R_- e^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right) + R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1}$$

2) aufgelöste Rekursion

$$\|e^{n+1}\|_X \leq L\tau \sum_{m=1}^{n+1} \|e^m\|_X + C\tau^2$$

---

- **Lipschitz Bedingung:** $\|g^n - \widetilde{g}^n\|_X \leq L \|e^n\|_X$
- **Lokaler Fehler:** $\|\delta_{\mathrm{CN}}^m\|_X \leq C\tau^3$, $C = C(u^{(4)}, u^{(3)})$
- **Stablilität:** $\|R_+^{-1} R_-\|_{X \leftarrow X} \leq 1$, $\|R_+^{-1}\|_{X \leftarrow X} \leq 1$

# Fehleranalyse für Crank–Nicolson

Notation: $e^n = x^n - x(t_n)$, $\widetilde{g}^n = g(t_n, x(t_n))$

**1)** Fehlerrekursion von Crank–Nicolson

$$e^{n+1} = R_+^{-1} R_- e^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right) + R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1}$$

**2)** aufgelöste Rekursion

$$\|e^{n+1}\|_X \leq L\tau \sum_{m=1}^{n+1} \|e^m\|_X + C\tau^2$$

**3)** Gronwall (für $\tau \leq \frac{1}{L}$)

$$\|e^{n+1}\|_X \leq C \mathrm{e}^{LT/(1-L\tau)} \tau^2$$

# Fehleranalyse für das IMEX Verfahren

**1)** Fehlerrekursion des CN Verfahrens

$$e^{n+1} = R_+^{-1} R_- e^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right)$$

$$+ R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1}$$

# Fehleranalyse für das IMEX Verfahren

**1)** Fehlerrekursion des IMEX Verfahrens

$$
\begin{aligned}
e^{n+1} = R_+^{-1} R_- e^n &+ \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right) \\
&+ \tfrac{\tau^2}{4} \left[ \begin{array}{l} Q_+^{-1} \left( f^n \qquad\qquad - f^{n+1} \right) \\ - \left( B + \tfrac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \left( f^n \qquad\qquad - f^{n+1} \right) \end{array} \right] \\
&+ R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1}
\end{aligned}
$$

---

**Stabilität:**

- $\left\| Q_+^{-1} \right\|_{V \leftarrow H} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau}$
- $\left\| \left( B + \frac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \right\|_{H \leftarrow H} \leq \frac{2}{\tau}$

# Fehleranalyse für das IMEX Verfahren

1) Fehlerrekursion des IMEX Verfahrens

$$
\begin{aligned}
e^{n+1} = {} & R_+^{-1} R_- e^n + \tfrac{\tau}{2} R_+^{-1} \left( g^n - \widetilde{g}^n + g^{n+1} - \widetilde{g}^{n+1} \right) \\
& + \tfrac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1} \left( f^n - \widetilde{f}^n + \widetilde{f}^{n+1} - f^{n+1} \right) \\ - \left( B + \tfrac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \left( f^n - \widetilde{f}^n + \widetilde{f}^{n+1} - f^{n+1} \right) \end{bmatrix} \\
& + R_+^{-1} \delta_{\mathrm{CN}}^{n+1} + \widetilde{\delta}^{n+1}
\end{aligned}
$$

mit $\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1} \left( \widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1} \right) \\ - \left( B + \frac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \left( \widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1} \right) \end{bmatrix}$

---

**Stabilität:**

- $\left\| Q_+^{-1} \right\|_{V \leftarrow H} \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau}$
- $\left\| \left( B + \frac{\tau}{2} A \right) Q_+^{-1} \right\|_{H \leftarrow H} \leq \frac{2}{\tau}$

# Fehleranalyse für das IMEX Verfahren

2) aufgelöste Rekursion

$$\|e^{n+1}\|_X \leq C_{LI} L\tau \sum_{m=1}^{n+1} \|e^m\|_X + C\tau^2 + \sum_{m=1}^{n+1} \|\widetilde{\delta}^m\|_X$$

---

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \end{bmatrix}, \quad C_{LI} = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

# Fehleranalyse für das IMEX Verfahren

**2)** aufgelöste Rekursion

$$\|e^{n+1}\|_X \le C_{LI} L\tau \sum_{m=1}^{n+1} \|e^m\|_X + C\tau^2 + \sum_{m=1}^{n+1} \|\widetilde{\delta}^m\|_X$$

**3)** Gronwall

$$\|e^{n+1}\|_X \le \mathrm{e}^{(C_{LI} LT)/(1-C_{LI} L\tau)} \left( C\tau^2 + \sum_{m=1}^{n+1} \|\widetilde{\delta}^m\|_X \right)$$

---

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2} A\right) Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \end{bmatrix}, \quad C_{LI} = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

# Beschränkung des Defekts

Erinnerung:

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^{n} - \widetilde{f}^{n+1}\big) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^{n} - \widetilde{f}^{n+1}\big) \end{bmatrix}$$

# Beschränkung des Defekts

Erinnerung:

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \end{bmatrix} = \frac{\tau^2}{4} R_+^{-1}\begin{bmatrix} \widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1} \\ -B\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \end{bmatrix}$$

Da $B \in \mathcal{L}(V, H)$ und $X = V \times H$:

$$\|\widetilde{\delta}^{n+1}\|_X \leq C\tau^2 \|\widetilde{f}^{n+1} - \widetilde{f}^n\|_a$$

# Beschränkung des Defekts

Erinnerung:

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) Q_+^{-1}\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \end{bmatrix} = \frac{\tau^2}{4} R_+^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1} \\ -B\left(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\right) \end{bmatrix}$$

Da $B \in \mathcal{L}(V, H)$ und $X = V \times H$:

$$\|\widetilde{\delta}^{n+1}\|_X \leq C\tau^2 \|\widetilde{f}^{n+1} - \widetilde{f}^n\|_a$$

---

Mit Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^{n+1} - \widetilde{f}^n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f(t, u(t))\right) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'''(t) + (Bu)''(t) + (Au)'(t) \,\mathrm{d}t \in V \end{aligned}$$

# Beschränkung des Defekts

Erinnerung:

$$\widetilde{\delta}^{n+1} = \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \\ -\left(B + \frac{\tau}{2}A\right) Q_+^{-1}\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \end{bmatrix} = \frac{\tau^2}{4} R_+^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1} \\ -B\big(\widetilde{f}^n - \widetilde{f}^{n+1}\big) \end{bmatrix}$$

Da $B \in \mathcal{L}(V, H)$ und $X = V \times H$:

$$\|\widetilde{\delta}^{n+1}\|_X \le C\tau^2 \|\widetilde{f}^{n+1} - \widetilde{f}^n\|_a \le C\tau^3 \qquad \text{mit } C = C(u''', (Bu)'', (Au)')$$

---

Mit Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^{n+1} - \widetilde{f}^n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( f(t, u(t)) \right) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'''(t) + (Bu)''(t) + (Au)'(t) \, \mathrm{d}t \in V \end{aligned}$$

# Fehlerresultat

## Theorem

*Voraussetzung:*

- *Exakte Lösung* $u \in C^4([0,T],H) \cap C^3([0,T],V)$ *mit* $Au \in C^1([0,T],V)$, $Bu \in C^2([0,T],V)$
- $\tau < \frac{1}{L}$ *hinreichend klein,* $t_n < T$

*Dann:*

$$\|u^n - u(t_n)\|_a + \|v^n - u'(t_n)\|_m \leq C\tau^2$$

*mit* $C$ *unabhängig von* $\tau$

# Bemerkung: CNLF in der Literatur

- in der Literatur: CNLF Schema für Gleichungen erster Ordnung
- für

$$x' + Sx = g(t,x)$$

  hat es die Form

$$x^{n+1} = x^{n-1} + \tau S(x^{n+1} + x^{n-1}) + 2\tau g^n, \qquad n \geq 2$$

- 2-Schrittverfahren, nicht äquivalent zu dem IMEX Verfahren dieses Vortrages

# Bemerkungen/Ausblick/offene Fragen

- Kombination mit unified error analysis (David Hipp) möglich
  $\Rightarrow$ Volldiskretisierungsfehlerresultat
- Verallgemeinerung: $a$ erfüllt Gårding-Ungleichung, $b$ quasi-monoton
- Paper aktuell in Entstehung
- IMEX Verfahren für Gleichungen erster Ordnung sind systematisch untersucht
  - auch für Gleichungen zweiter Ordnung möglich?
  - höhere Ordnung möglich?
- In numerischen Tests:
  - IMEX effizienter als CN
  - noch kein konkurrenzfähiges explizites Vergleichsverfahren gefunden (LF bei gedämpfter Gleichung implizit...)
    **Ideen?**