Karlsruhe Institute of Technology

Konvergenz Lokaler Zeitschritt-Verfahren in Kombination mit Finiten Elementen: Schwierigkeiten

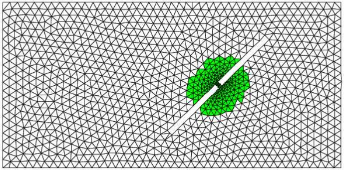
Michaela Mehlin

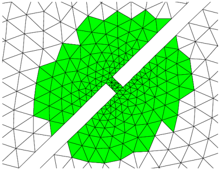
Institute for Applied and Numerical Mathematics, Karlsruhe Institute of Technology

CRC 1173

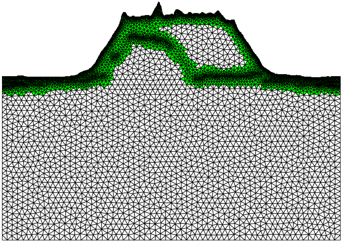
Wave phenomena

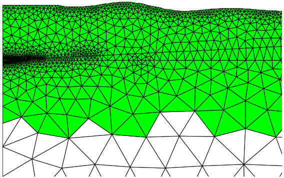
Motivation lokale Zeitschrittverfahren





geometrische Eigenschaften





Gittergenerierung

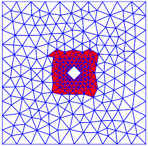
Motivation lokale Zeitschrittverfahren

Problem

Lokal verfeinerte Gitter verursachen schwere Stabilitätseinschränkungen für explizite Zeitschritt-Verfahren

Lösungen

- Lokal implizite Verfahren
- Explizite lokale Zeitschrittverfahren



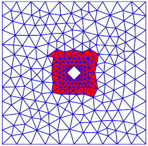
Motivation lokale Zeitschrittverfahren

Problem

Lokal verfeinerte Gitter verursachen schwere Stabilitätseinschränkungen für explizite Zeitschritt-Verfahren

Lösungen

- Lokal implizite Verfahren
- Explizite lokale Zeitschrittverfahren



Insbesondere konzentrieren wir uns hier auf lokale Zeitschritt-Verfahren basierend auf Leap-Frog.

Modellproblem

Klassische Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \nabla \cdot \left(c^2 \nabla u \right) &= f, && \text{in } \Omega \times (0, T), \\
u &= 0, && \text{auf } \Gamma_D \times (0, T), \\
u &= u_0, && \text{in } \Omega \times \{t = 0\}, \\
u_t &= v_0, && \text{in } \Omega \times \{t = 0\}.
\end{aligned}
$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet.

Schwache Formulierung

Finde $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ so dass,

$$
\begin{aligned}
(\ddot{u}, w) + a(u, w) &= (f, w), && \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega),\ t > 0, \\
u(0) &= u_0, \\
\dot{u}(0) &= v_0,
\end{aligned}
$$

mit $a(u, w) = (c\nabla u, c\nabla w)$.

Schwache Lösung: Existenz und Eindeutigkeit

Karlsruhe Institute of Technology

Schwache Formulierung

Finde $u : [0, T] \to H_0^1(\Omega)$ so dass,

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, w) + a(u, w) &= (f, w)\,, \qquad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega),\ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \\ \dot{u}(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Theorem

Sei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung u von (1) mit $u \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Siehe z.B. Evans

Galerkin-Approximation

Sei $S \subset H_0^1(\Omega)$ endlich dimensionaler Unterraum (bzw FE-Raum).
Finde $u_S : [0, T] \times S \to \mathbb{R}$ so dass

$$(\ddot{u}_S, v) + a(u_S, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in S\,, \quad t \in (0, T)\,.$$

Das ist (für $f = 0$) äquivalent zu

$$M\,\frac{d^2 U}{dt^2}(t) + K\,U(t) = 0\,, \qquad t \in (0, T),$$

wobei die Massenmatrix M und die Steifigkeitsmatrix K SPD sind.

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) + Ay(t) = 0, \qquad t \in (0, T),$$

mit $y = M^{\frac{1}{2}}\,U$ und A immer noch SPD.

Leap-Frog und schwache Formulierung

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + Ay(t) = 0, \qquad t \in (0, T)$$

Leap-Frog:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Diskrete FE-Lösung

$$\begin{aligned}
(u_S^0, v) &= (u_0, v), \quad \forall v \in S, \\
(u_S^1, v) &= (u_0, v) + \tau(v_0, v) - \frac{\tau^2}{2} a(u_0, v), \ \forall v \in S, \\
\left(u_S^{n+1} - 2u_S^n + u_S^{n-1}, v\right) + \tau^2 a(u_S^n, v) &= 0, \qquad \forall v \in S,
\end{aligned} \tag{2}$$

Konvergenz LF

Für $S = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \in P^{k-1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $\mathcal{T}_h$ formreguläres Gitter gilt

Theorem (Baker '76)

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u(t_n) - u_S^n\| \leq C(1+T)\left(h^k + \tau^2\right)$$

für $u \in L^\infty(0, T; H^k(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^k(\Omega))$ und $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ für $\ell = 3, 4$ unter CFL-Bedingung $\tau^2 \leq \frac{4}{C_\lambda} h^2$ mit

$$\max_{0 \neq v \in S} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} \leq \frac{C_\lambda}{h^2}.$$

LTS-LF: Herleitung

Annahme: $y(t_{n-1})$ und $y(t_n)$ für $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + Ay(t) = 0$ sind bekannt.
Dann können $y(t_{n+1})$ bestimmen, in dem wir

$$\begin{aligned} z_n''(s) + Az_n(s) &= 0, \quad 0 < s < \tau, \\ z_n(0) = y(t_n), &\quad z_n'(0) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

lösen und anschließend

$$y(t_{n+1}) - 2y(t_n) + y(t_{n-1}) = 2[z_n(\tau) - z_n(0)]$$

setzen.

Bis hier keine Approximation!
Wenn wir $Az_n(s)$ in (3) durch $Az_n(0) = Ay(t_n)$ ersetzen, erhalten wir klassischen Leap-Frog.

LTS-LF: Herleitung

Ähnlich können wir LTS-LF herleiten: Starten bei (3)

$$\begin{aligned} z_n''(s) + Az_n(s) &= 0, \quad 0 < s < \tau, \\ z_n(0) = y(t_n), &\quad z_n'(0) = 0, \end{aligned}$$

Ersetze nun $z_n(s) = z_n^c(s) + z_n^f(s) = (I - P)z_n(s) + Pz_n(s)$ und verwende für $z_n^c(s)$ die Approximation von LF:

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_n''(s) + A(I-P)y(t_n) + AP\widetilde{z}_n(s) &= 0, \quad 0 < s < \tau, \\ \widetilde{z}_n(0) = y(t_n), &\quad \widetilde{z}_n'(0) = 0, \end{aligned}$$

lösen und anschließend

$$y(t_{n+1}) - 2y(t_n) + y(t_{n-1}) = 2[\widetilde{z}_n(\tau) - \widetilde{z}_n(0)].$$

LTS-LF: Algorithmus

$$y_{n+1} = -y_{n-1} + 2\,\mathrm{LTS}_2(y_n, -A(I-P)y_n),$$

wobei die Funktion $z_{new} = \mathrm{LTS}_2(z, w)$ definiert wird als:

1. $z_{new} := z + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{p}\right)^2 (w - APz)$
2. For $m = 1, ..., p-1$
   (i) $z_{old} := z;\ z := z_{new}$
   (ii) $z_{new} := 2z - z_{old} + \left(\frac{\tau}{p}\right)^2 (w - APz)$

Der LTS-LF Algorithmus ist äquivalent zu

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = -\tau^2 A_p y_n$$

mit $A_p = A - \frac{2}{p^2}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{2j}\alpha_j^p (AP)^j A$ ist symmetrisch.

Schwache Formulierung LTS

$$
\begin{aligned}
(u_S^0, v) &= (u_0, v), \quad \forall v \in S, \\
(u_S^1, v) &= (u_0, v) + \tau(v_0, v) - \frac{\tau^2}{2} a_p(u_0, v), \ \forall v \in S, \\
\left(u_S^{n+1} - 2u_S^n + u_S^{n-1}, v\right) + \tau^2 a_p(u_S^n, v) &= 0, \qquad \forall v \in S,
\end{aligned} \tag{4}
$$

mit

$$
a_p\left(u, v\right) := a\left(u, v\right) - \frac{2}{p^2} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j^p \left(\frac{\tau}{p}\right)^{2j} a\left(\left(R_{\mathcal{N}} A_S\right)^j u, v\right) \qquad \forall u, v \in V_h,
$$

wobei $A_S : S \to S$, $R_{\mathcal{N}} : S \to S$ lineare Abbildungen, die zu den Matrizen A und P gehören.

LTS-LF: Konvergenz

Theorem

Für $u \in W^{6,\infty}(0, T; H^k(\Omega))$ und $\tau \sim h$ klein genug (CFL Bedingung), erfüllt der Fehler zur Zeit t_n

$$\|u(t_n) - u_S^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_T(h^k + \tau^2),$$

wobei C_T unabhängig von h, τ und p ist.

Schwierigkeiten:

- Hohe Regularität nötig.
- CFL-Bedingung abhängig vom feinen Bereich.

$$C_{\text{cont}}\tau^2\left(1 + \frac{C_{\text{inv}}^2 C_{\text{qu}}^2}{h^2}\right) \leq \min\left\{6c_{\text{eq}}^2\left(\frac{c_{\text{coer}}}{C_{\text{cont}}}\right)^{3/2}, \frac{4C_{\text{cont}}}{\max\{C_{\text{cont}}, 3\}}\right\}$$

LTS-LF: Konvergenz

Theorem

Für $u \in W^{6,\infty}(0, T; H^k(\Omega))$ und $\tau \sim h$ klein genug (CFL Bedingung), erfüllt der Fehler zur Zeit t_n

$$\|u(t_n) - \widetilde{u}_S^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_T(h^k + \tau^2),$$

wobei C_T unabhängig von h, τ und p ist.

Schwierigkeiten:

- Hohe Regularität nötig.
- CFL-Bedingung abhängig vom feinen Bereich.

$$C_{\text{cont}}\tau^2\left(1 + \frac{C_{\text{inv}}^2 {C_{\text{qu}}}^2}{h^2}\right) \leq \min\left\{6c_{\text{eq}}^2\left(\frac{c_{\text{coer}}}{C_{\text{cont}}}\right)^{3/2}, \frac{4C_{\text{cont}}}{\max\{C_{\text{cont}}, 3\}}\right\}$$

$$C_{\text{qu}} = \frac{h}{h_{\min}}, \text{ Quasiuniformitätskonstante}$$

Konvergenz: Beweisideen

- Schwache Formulierung in erster Ordnung: Finde $u, v : [0, T] \to V$ so dass

$$\begin{aligned}(\dot{v}, w) + a(u, w) &= 0, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \quad t > 0,\\ (v, w) &= (\dot{u}, w) \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega), \quad t > 0,\end{aligned} \tag{5}$$

- Semidiskretes Problem in erster Ordnung: Finde $u_S, v_S : [0, T] \to S$ so dass

$$\left.\begin{aligned}(\dot{v}_S, w) + a(u_S, w) &= 0\\ (v_S, w) &= (\dot{u}_S, w)\end{aligned}\right\} \quad \forall w \in S, \quad t > 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(u_S(0), w) &= (u_0, w)\\ \\ (v_S(0), w) &= (v_0, w)\end{aligned}\right\} \quad \forall w \in S.$$

Konvergenz: Beweisideen

- LTS-LF: Formulierung in erster Ordnung

$$v_S^{(n+1/2)} := \frac{u_S^{(n+1)} - u_S^{(n)}}{\tau}, \tag{6}$$

und schreiben das LTS-LF-Verfahren um als 1-Schritt-Verfahren

$$\begin{aligned}
\left(v_S^{(n+1/2)}, q\right) &= \left(v_S^{(n-1/2)}, q\right) - \tau a_p \left(u_S^{(n)}, q\right) \ \forall q \in S, \\
-\tau \left(v_S^{(n+1/2)}, r\right) + \left(u_S^{(n+1)}, r\right) &= \left(u_S^{(n)}, r\right) \ \forall r \in S, \\
\left(u_S^{(0)}, w\right) &= (u_0, w) \\
\left(v_S^{(1/2)}, w\right) &= (v_0, w) - \frac{\tau}{2} a_p (u_0, w) \ \forall w \in S.
\end{aligned} \tag{7}$$

Konvergenz: Beweisideen

- Fehlerdarstellung:

$$\mathbf{e}^{n+1} := \left(e_v^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}, e_u^{(n+1)} \right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{e}_S^{(n+1)} + \mathbf{e}_{S,\tau}^{(n+1)}$$

with

$$\mathbf{e}_S^{(n+1)} := \begin{pmatrix} e_{v,S}^{(n+1/2)} \\ e_{u,S}^{(n+1)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v\left(t_{n+1/2}\right) - v_S\left(t_{n+1/2}\right) \\ u\left(t_{n+1}\right) - u_S\left(t_{n+1}\right) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{e}_{S,\tau}^{(n+1)} := \begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(n+1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(n+1)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_S\left(t_{n+1/2}\right) - v_S^{(n+1/2)} \\ u_S\left(t_{n+1}\right) - u_S^{(n+1)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Konvergenz: Beweisideen

- $\mathbf{e}_S^{(n+1)} \leq Ch^k$ folgt mit Standardargumenten.
- Zeit-Fehler erfüllt

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(n+1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(n+1)} \end{pmatrix} &= \mathfrak{S}^n \begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(1)} \end{pmatrix} + \tau \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathfrak{S}^\ell \left(I_S^{2\times 2} - \mathfrak{S} \right) \sigma^{(n-\ell)} \\
&= \mathfrak{S}^n \begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(1)} \end{pmatrix} + \tau \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathfrak{S}^\ell \operatorname{diff}^{(n-\ell)} \\
&+ \tau \sigma^{(n)} - \tau \mathfrak{S}^n \sigma^{(1)}.
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{diff}^{(n)} := \begin{pmatrix} \operatorname{diff}_1^{(n-1/2)} \\ \operatorname{diff}_2^{(n)} \end{pmatrix} &:= \sigma^{(n)} - \sigma^{(n+1)} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{u_S(t_{n+2}) - 2u_S(t_{n+1}) + u_S(t_n)}{\tau^2} + \frac{v_S(t_{n+1/2}) - v_S(t_{n+3/2})}{\tau} \\ \frac{u_S(t_n) - u_S(t_{n+1})}{\tau} + A_{S,p}^{-1} \left(\frac{-v_S(t_{n+3/2}) + 2v_S(t_{n+1/2}) - v_S(t_{n-1/2})}{\tau^2} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Konvergenz: Beweisideen

- $\mathbf{e}_S^{(n+1)} \leq Ch^k$ folgt mit Standardargumenten.
- Zeit-Fehler erfüllt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(n+1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(n+1)} \end{pmatrix} &= \mathfrak{S}^n \begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(1)} \end{pmatrix} + \tau \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathfrak{S}^\ell \left(I_S^{2\times 2} - \mathfrak{S} \right) \sigma^{(n-\ell)} \\ &= \mathfrak{S}^n \begin{pmatrix} e_{v,S,\tau}^{(1/2)} \\ e_{u,S,\tau}^{(1)} \end{pmatrix} + \tau \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathfrak{S}^\ell \, \mathrm{diff}^{(n-\ell)} \\ &\quad + \tau \sigma^{(n)} - \tau \mathfrak{S}^n \sigma^{(1)}.\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{S} := \begin{bmatrix} I_S & -\tau A_{S,p} \\ \tau I_S & I_S - \tau^2 A_{S,p} \end{bmatrix}$$

Konvergenz: Beweisideen

- Mit Stabilitätsabschätzungen können wir zeigen, dass

$$\left\| e_{u,S,\tau}^{(n+1)} \right\| \leq C_0 \left\| \mathbf{e}_{S,\tau}^{(1)} \right\|_{\ell^1} + C_0 \tau \sum_{\ell=1}^{n-1} \left\| \mathrm{diff}^{(n-\ell)} \right\|_{\ell^1} + \tau \left\| \sigma^{(n)} \right\|_{\ell^1} + C_0 \tau \left\| \sigma^{(1)} \right\|_{\ell^1}, \tag{10}$$

wobei $\|\mathbf{v}\|_{\ell^1} := \|v_1\| + \|v_2\|$.

Die Therme werden nun einzeln abgeschätzt. Dann erhalten wir

$$\left\| e_{u,S,\tau}^{(n+1)} \right\| \leq C\tau^2 (1 + T) \mathcal{M}(u_S)$$

mit

$$\mathcal{M}(u_S) := \max \left\{ \max_{3 \leq \ell \leq 5} \left\| \partial_t^\ell u_S \right\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} \right\}$$

Problem: Die Herleitung von (10) und die Abschätzung der Terme 2-4 benötigt die CFL-Bedingung.

Konvergenz: Beweisideen

- Die Summanden enthalten Terme der Form $A_{S,p}^{-1}w$. Wir können folgendes Lemma zeigen mithilfe

Lemma

Es sei die CFL-Bedingung erfüllt. Dann gilt

$$\left\| A_{S,p}^{-1} w \right\| \leq \frac{2}{c_{\text{coer}}} \|w\| \qquad \forall w \in S,$$

- Beweis erfordert viel Notation und lange Rechnungen. Deshalb verzichte ich darauf ihn zu zeigen.
- Schon wenn wir zeigen wollen, dass das $a_p(u, v)$ stetig und koerziv ist, benötigen wir CFL.

Zusammenfassung

Konvergenzbeweis für LTS-LF, aber

- Hohe Regularitätsvorraussetzungen
- Nicht optimale CFL-Bedingung

Lösung: Siehe Präsentation von Andreas

Zusammenfassung

Konvergenzbeweis für LTS-LF, aber

- Hohe Regularitätsvorraussetzungen
- Nicht optimale CFL-Bedingung

Lösung: Siehe Präsentation von Andreas

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!