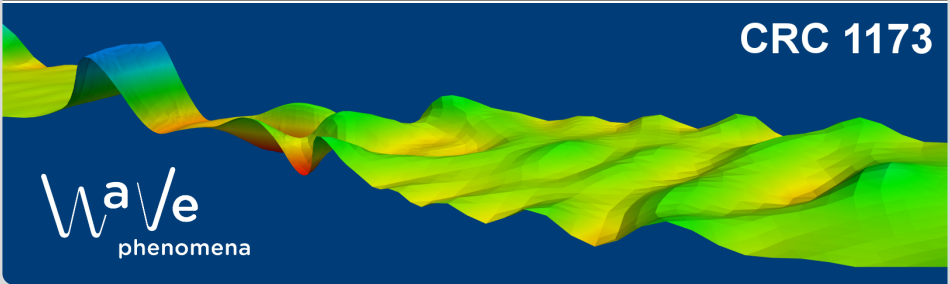


Finite Elemente Diskretisierungen semilinearer Wellengleichungen mit dynamischen Randbedingungen

Jan Leibold, Vortrag zur Masterarbeit

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik



CRC 1173

Wave
phenomena

- Dissertation von David (2017):
FE-Diskretisierungen linearer Wellengleichung mit dynamischen Randbedingungen
 - Allg. Framework: Evolutionsgleichung in Hilbertraum
 - Wohlgestelltheit mit Halbgruppentheorie
 - Allgemeine Fehleranalyse von FE-Diskretisierungen
 - Anwendung auf konkrete Gleichung

- Dissertation von David (2017):
FE-Diskretisierungen linearer Wellengleichung mit dynamischen Randbedingungen
 - Allg. Framework: Evolutionsgleichung in Hilbertraum
 - Wohlgestelltheit mit Halbgruppentheorie
 - Allgemeine Fehleranalyse von FE-Diskretisierungen
 - Anwendung auf konkrete Gleichung

Ziele:

- Erweiterung der Ergebnisse auf semilinearen Fall
 - Untersuchung von Wohlgestelltheit
 - Herleitung von FE-Diskretisierung
 - Fehlerabschätzungen der FE-Approximation

Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \Delta u, & \Omega \times (0, T), \\u_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u &= \tilde{f}_1(t, x) + \tilde{f}_2(u), & \Gamma \times (0, T), \\u(0) &= u^0, \quad u'(0) = v^0\end{aligned}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand $\Gamma = \partial\Omega$, $d \in \{2, 3\}$
- $\Delta_\Gamma = \operatorname{div} \nabla_\Gamma$ Laplace Beltrami Operator
- ∇_Γ Oberflächengradient, $\nabla_\Gamma v := (I - nn^T) \nabla v$
- $\tilde{f}_1 \in C^1([0, T] \times \Gamma; \mathbb{R})$
- $\tilde{f}_2 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \Delta u, & \Omega \times (0, T), \\u_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u &= \tilde{f}_1(t, x) + \tilde{f}_2(u), & \Gamma \times (0, T)\end{aligned}$$

- Multiplikation mit Testfunktion $\varphi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und Integration

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_{tt} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Gamma} \partial_\nu u \varphi \, ds, \\ \int_{\Gamma} u_{tt} \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \partial_\nu u \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma u \nabla_\Gamma \varphi \, ds &= \int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(u) \varphi \, ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \Delta u, & \Omega \times (0, T), \\u_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u &= \tilde{f}_1(t, x) + \tilde{f}_2(u), & \Gamma \times (0, T)\end{aligned}$$

- Multiplikation mit Testfunktion $\varphi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ und Integration

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_{tt} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Gamma} \partial_\nu u \varphi \, ds, \\ \int_{\Gamma} u_{tt} \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \partial_\nu u \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma u \nabla_\Gamma \varphi \, ds &= \int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(u) \varphi \, ds\end{aligned}$$

- Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite:

$$\int_{\Omega} u_{tt} \varphi \, dx + \int_{\Gamma} u_{tt} \varphi \, ds + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma u \nabla_\Gamma \varphi \, ds = \int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(u) \varphi \, ds$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_{tt} \varphi \, dx + \int_{\Gamma} u_{tt} \varphi \, ds}_{=: m(u_{tt}, \varphi)} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds}_{=: a(u, \varphi)} = \underbrace{\int_{\Gamma} (\tilde{f}_1(t, x) + \tilde{f}_2(u)) \varphi \, ds}_{=: m(f(t, u), \varphi)}$$

- m ist Skalarprodukt auf Hilbertraum $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) =: H$
- a ist symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform auf Hilbertraum $H^1(\Omega; \Gamma) = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) \in H^1(\Gamma)\} =: V$
- Gelfand-Triple: $V \xhookrightarrow{d} H \simeq H^* \xhookrightarrow{d} V^*$

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_{tt} \varphi \, dx + \int_{\Gamma} u_{tt} \varphi \, ds}_{=: m(u_{tt}, \varphi)} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi \, ds}_{=: a(u, \varphi)} = \underbrace{\int_{\Gamma} (\tilde{f}_1(t, x) + \tilde{f}_2(u)) \varphi \, ds}_{=: m(f(t, u), \varphi)}$$

- m ist Skalarprodukt auf Hilbertraum $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) =: H$
- a ist symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform auf Hilbertraum $H^1(\Omega; \Gamma) = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) \in H^1(\Gamma)\} =: V$
- Gelfand-Triple: $V \xhookrightarrow{d} H \simeq H^* \xhookrightarrow{d} V^*$

Frage: Unter welchen Voraussetzungen an $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ ist die Gleichung wohlgestellt?

Finde $u \in C^2([0, T]; H) \cap C([0, T]; V)$ mit

$$m(u''(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = m(f(t, u(t)), \varphi), \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in [0, T],$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0$$

Finde $u \in C^2([0, T]; H) \cap C([0, T]; V)$ mit

$$m(u''(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = m(f(t, u(t)), \varphi), \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in [0, T],$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0$$

Oder äquivalent in V^* :

$$u'' + \mathcal{A}u = f(u), \quad t \in [0, T],$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0,$$

mit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$ def. durch

$$\langle \mathcal{A}v, \varphi \rangle_V := a(v, \varphi) \quad \text{für alle } v, \varphi \in V$$

Gleichung: $u \in C^2([0, T]; H) \cap C([0, T]; V)$ mit

$$m(u''(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = m(f(t, u(t)), \varphi), \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in [0, T],$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0$$

wohlgestellt, falls

$$f \in C^1([0, T] \times V; H) \quad \text{und lokal Lipschitz-stetig (bzgl. } V)$$

Gleichung: $u \in C^2([0, T]; H) \cap C([0, T]; V)$ mit

$$m(u''(t), \varphi) + a(u(t), \varphi) = m(f(t, u(t)), \varphi), \quad \text{für alle } \varphi \in V, t \in [0, T],$$
$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = v^0$$

wohlgestellt, falls

$$f \in C^1([0, T] \times V; H) \quad \text{und lokal Lipschitz-stetig (bzgl. } V)$$

Beweis durch Umformulierung in Evolutionsgl. erster Ordnung und anwenden von Halbgruppentheorie

Erinnerung: Für $v \in V, \varphi \in H$:

$$m(f(t, v), \varphi) = \int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) \varphi \, ds + \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(u) \varphi \, ds$$

Somit:

$f \in C^1([0, T] \times V; H)$ und lokal Lipschitz-stetig,

falls

$$\begin{aligned} t \mapsto \tilde{f}_1(t, \cdot) &\in C^1([0, T]; L^2(\Gamma)), \quad \checkmark \\ u \mapsto \tilde{f}_2(u) &\in C^1(H^1(\Gamma); L^2(\Gamma)) \end{aligned}$$

und Abbildungen lokal Lipschitz-stetig

- Für alle $\tilde{q} \geq 1$ existiert stetige Einbettung

$$H^1(\Gamma) \hookrightarrow L^{\tilde{q}}(\Gamma)$$

(wegen $d = 2$ bzw. 3)

- Es existiere $q \geq 1$ sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_2(\xi)| &\leq |\xi|^q, \\ |\tilde{f}_2'(\xi)| &\leq |\xi|^{q-1} \end{aligned}$$

- Dann:

$$u \mapsto \tilde{f}_2(u) \in C^1(H^1(\Gamma); L^2(\Gamma))$$

und Abbildung ist lokal Lipschitz-stetig

Ab hier: $\Gamma \in C^{k+1}, p \leq k$

Konstruktion der Finiten Elemente von Elliot, Ranner (2012), David (2017):

- V_h Raum isoparametrischer Elemente der Ordnung p über Triangulierung $\mathcal{T}_h$, d.h.
 - Für alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt: $K = F_K(\hat{K})$ mit $F_K \in \mathcal{P}_p$, $\hat{K}$ Referenzsimplex
 - $\mathcal{T}_h$ ist „reguläres“ Gitter
 - Rechengebiet $\overline{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \approx \overline{\Omega}$ mit Rand $\Gamma_h = \partial\Omega_h$
 - $V_h = \{v \in C(\Omega_h) \mid v|_K \in \mathcal{P}_p \forall K \in \mathcal{T}_h\}$
 - Knotenbasis und alle Basisknoten von Γ_h liegen auch auf Γ

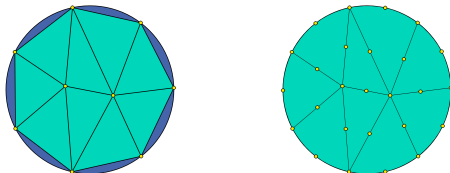


Abbildung: Beispiel- $\mathcal{T}_h$ für Einheitskreis und $p = 1$ bzw. $p = 2$

- Setze für $v_h, \varphi_h \in V_h$

$$a_h(v_h, \varphi_h) := \int_{\Omega_h} \nabla v_h \nabla \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} v_h \nabla_{\Gamma_h} \varphi_h \, ds,$$

$$m_h(v_h, \varphi_h) := \int_{\Omega_h} v_h \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} v_h \varphi_h \, ds$$

als Diskretisierungen von a und m

- Setze für $v_h, \varphi_h \in V_h$

$$a_h(v_h, \varphi_h) := \int_{\Omega_h} \nabla v_h \nabla \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} v_h \nabla_{\Gamma_h} \varphi_h \, ds,$$

$$m_h(v_h, \varphi_h) := \int_{\Omega_h} v_h \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_h} v_h \varphi_h \, ds$$

als Diskretisierungen von a und m

- Definiere $A_h \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ durch

$$m_h(A_h v_h, \varphi_h) = a_h(v_h, \varphi_h) \text{ für alle } v_h, \varphi_h \in V_h$$

Diskretisierung von f : Definiere $f_h: V_h \rightarrow V_h$ für $v_h, \varphi_h \in V_h$ durch

$$m_h(f_h(v_h), \varphi_h) = \int_{\Gamma_h} I_h \tilde{f}_1(t, x) \varphi_h \, ds + \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(v_h) \varphi_h \, ds$$

Hierbei: I_h Lagrange Interpolationsoperator

Diskretisierung von f : Definiere $f_h: V_h \rightarrow V_h$ für $v_h, \varphi_h \in V_h$ durch

$$m_h(f_h(v_h), \varphi_h) = \int_{\Gamma_h} I_h \tilde{f}_1(t, x) \varphi_h \, ds + \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(v_h) \varphi_h \, ds$$

Hierbei: I_h Lagrange Interpolationsoperator

FE-semidiskretisierte Gleichung:

Finde $u_h \in C^2([0, T], V_h)$ mit

$$\begin{aligned} u_h'' + A_h u_h &= f_h(t, u_h), \quad t \in [0, T], \\ u_h(0) &= u_h^0, \quad u_h'(0) = v_h^0 \end{aligned}$$

- u Lösung der semilinearen Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen mit
 - $u \in C^1([0, T]; H^2(\Omega; \Gamma))$
 - $u, u' \in L^\infty([0, T]; H^{p+1}(\Omega; \Gamma))$
 - $u'' \in L^\infty([0, T]; H^p(\Omega; \Gamma))$

- u Lösung der semilinearen Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen mit
 - $u \in C^1([0, T]; H^2(\Omega; \Gamma))$
 - $u, u' \in L^\infty([0, T]; H^{p+1}(\Omega; \Gamma))$
 - $u'' \in L^\infty([0, T]; H^p(\Omega; \Gamma))$
- u_h FE-Approximation der Ordnung p , $p \leq k$
- Anfangswerte mit Ordnung h^p approximiert
- $\tilde{f}_1(t, \cdot) \in H^p(\Gamma)$ für alle $t \in [0, T]$

Hauptresultat: Fehlerabschätzung

- u Lösung der semilinearen Wellengleichung mit kinetischen Randbedingungen mit
 - $u \in C^1([0, T]; H^2(\Omega; \Gamma))$
 - $u, u' \in L^\infty([0, T]; H^{p+1}(\Omega; \Gamma))$
 - $u'' \in L^\infty([0, T]; H^p(\Omega; \Gamma))$
- u_h FE-Approximation der Ordnung p , $p \leq k$
- Anfangswerte mit Ordnung h^p approximiert
- $\tilde{f}_1(t, \cdot) \in H^p(\Gamma)$ für alle $t \in [0, T]$

Dann: Es ex. ein $h^* > 0$, sodass für alle $h < h^*$ gilt:
 u_h ex. auf $[0, T]$ und es gilt eine Fehlerabschätzung

$$\|Q_h u_h(t) - u(t)\|_{H^1(\Omega; \Gamma)} + \|Q_h u'_h(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)} \leq C(t) h^p$$

mit C unabhängig von h

Hierbei: $Q_h \in \mathcal{L}(V_h; V)$ Liftoperator

1.Schritt: Allg. Abschätzung für Evolutionsgleichungen

- Startpunkt: Kontinuierliche und diskrete Gleichung in erster Ordnung Formulierung
- Herleiten von Fehlergleichung
- VOC Formel liefert implizite Gleichung für Fehler
- Abschätzen des Fehlers über lokale Lipschitz-Stetigkeit und Gronwall-Lemma
- $\Rightarrow$ Allgemeine Fehlerabschätzung, die Diskretisierungsfehler der Räume, Skalarprodukt, Bilinearform und Nichtlinearität enthält

2.Schritt: Anwenden auf spezielle Gleichung & Diskretisierung

- Abschätzung der einzelnen Fehler aus allg. Fehlerabschätzung (Interpolationsfehler, Fehler in Integralen, Fehler in der Nichtlinearität)
- Z.b. Fehlertherme in Nichtlinearität:

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} I_h \tilde{f}_1(t, x) \varphi_h(x) \, ds \quad \text{und} \\ \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(t, u(x)) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(t, I_h u(x)) \varphi_h(x) \, ds$$

2.Schritt: Anwenden auf spezielle Gleichung & Diskretisierung

- Abschätzung der einzelnen Fehler aus allg. Fehlerabschätzung (Interpolationsfehler, Fehler in Integralen, Fehler in der Nichtlinearität)
- Z.b. Fehlertherme in Nichtlinearität:

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} I_h \tilde{f}_1(t, x) \varphi_h(x) \, ds \quad \text{und} \\ \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(t, u(x)) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(t, I_h u(x)) \varphi_h(x) \, ds$$

- Alle Terme haben Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$
- $\Rightarrow$ Fehlerabschätzung (hängt von $\|u_h(t)\|_{\infty}$ und $\|u(t)\|_{\infty}, t \in [0, T]$ ab)

2.Schritt: Anwenden auf spezielle Gleichung & Diskretisierung

- Abschätzung der einzelnen Fehler aus allg. Fehlerabschätzung (Interpolationsfehler, Fehler in Integralen, Fehler in der Nichtlinearität)
- Z.b. Fehlertherme in Nichtlinearität:

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} I_h \tilde{f}_1(t, x) \varphi_h(x) \, ds \quad \text{und} \\ \int_{\Gamma} \tilde{f}_2(t, u(x)) Q_h \varphi_h(x) \, ds - \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(t, I_h u(x)) \varphi_h(x) \, ds$$

- Alle Terme haben Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$
- $\Rightarrow$ Fehlerabschätzung (hängt von $\|u_h(t)\|_{\infty}$ und $\|u(t)\|_{\infty}, t \in [0, T]$ ab)
- $\Rightarrow$ Für h klein: $\|u_h(t)\|_{\infty}$ für alle $t \in [0, T]$ unabhängig von h beschränkt
- $\Rightarrow$ Existenz der num. Lösung und Fehlerabschätzung unabhängig von u_h

Es sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_N\}$ Knotenbasis von V_h ,

$$u_h(t)(x) = \sum_{i=1}^N u_{h,i}(t) \Phi_i(x) \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_h := \begin{bmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,N} \end{bmatrix} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

$\mathbf{u}_h$ erfüllt ODE

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_h \mathbf{u}_h''(t) + \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h &= F_{h,1}(t) + F_{h,2}(\mathbf{u}_h(t)), \\ \mathbf{u}_h(0) &= \mathbf{u}_h^0, \quad \mathbf{u}_h'(0) = \mathbf{v}_h^0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_h)_{i,j} &= m_h(\Phi_j, \Phi_i), & (F_{h,1}(t))_i &= \int_{\Gamma_h} l_{h,\Gamma} \tilde{f}_1(t, x) \Phi_i(x) \, ds, \\ (\mathbf{A}_h)_{i,j} &= a_h(\Phi_j, \Phi_i), & (F_{h,2}(\mathbf{u}_h))_i &= \int_{\Gamma_h} \tilde{f}_2(u_h(x)) \Phi_i(x) \, ds \end{aligned}$$

Testbeispiel:

- $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ Einheitskreisscheibe
- Gleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u &= |u|u + \tilde{f}_{\Omega,1}(t, x), & (0, T) \times \Omega, \\u_{tt} + \partial_n u - \Delta_\Gamma u &= |u|^2 u + \tilde{f}_1(t, x), & (0, T) \times \partial\Omega, \\u(0, x) &= 0, \quad u_t(0, x) = 2\pi x_1 x_2, & \text{in } \overline{\Omega}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{\Omega,1}(t, x) &= - \left(4\pi^2 + |\sin(2\pi t)x_1 x_2| \right) \sin(2\pi t)x_1 x_2 \quad \text{und} \\ \tilde{f}_1(t, x) &= -4\pi^2 \sin(2\pi t)x_1 x_2 + 6 \sin(2\pi t)x_1 x_2 - (\sin(2\pi t)x_1 x_2)^3\end{aligned}$$

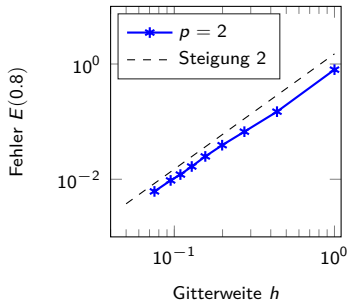
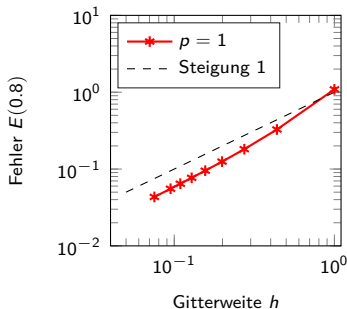
- Analytische Lösung:

$$u(t, x) = \sin(2\pi t)x_1 x_2$$

Fehler

$$E(t) := \|u_h(t) - I_h u(t)\|_{H^1(\Omega_h; \Gamma_h)} + \|u'_h(t) - I_h u'(t)\|_{L^2(\Omega_h) \times L^2(\Gamma_h)}$$

zur Zeit $t = 0.8$ für $p = 1$ und $p = 2$:



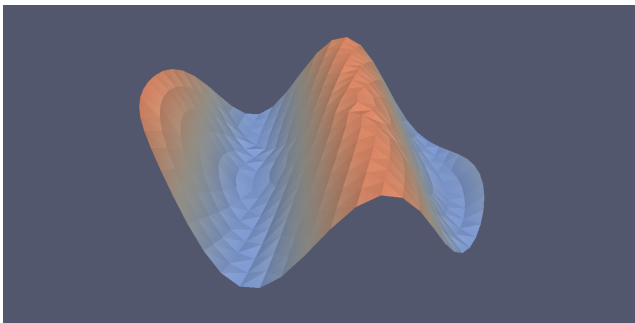
- Fehlerabschätzung für FE-Semidiskretisierungen semilinearer Wellengleichungen mit dyn. Randbedingungen (Resultate von David lassen sich übertragen)
- Allgemeine Theorie die auf weitere Gleichungen und Diskretisierungen anwendbar ist

- Fehlerabschätzung für FE-Semidiskretisierungen semilinearer Wellengleichungen mit dyn. Randbedingungen (Resultate von David lassen sich übertragen)
- Allgemeine Theorie die auf weitere Gleichungen und Diskretisierungen anwendbar ist

Schwierigkeiten:

- Nichtkonforme Diskretisierung ($\Omega \neq \Omega_h$)
- Behandlung der Nichtlinearität
 - Passende Voraussetzungen
 - (Fréchet-)Differenzierbarkeit zeigen
 - Diskretisierung
 - Fehlerabschätzung
- Implementierung

- Volldiskretisierung
 - Fehlerabschätzung für Standardzeitintegratoren
 - Splittingverfahren (Gleichungen in Ω und Γ getrennt lösen)
- Bedingung an Nichtlinearität lockern
- Anwenden der abstrakten Theorie auf weitere Beispiele
- Weitere numerische Experimente



- [1] Charles M Elliott and Thomas Ranner.
Finite element analysis for a coupled bulk–surface partial differential equation.
IMA Journal of Numerical Analysis, 33(2):377–402, 2012.
- [2] David Hipp.
A unified error analysis for spatial discretizations of wave-type equations with applications to dynamic boundary conditions.
PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2017.
- [3] Ammon Pazy.
Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.
Springer-Verlag New York, 1983.
- [4] Ralph E. Showalter.
Hilbert space methods in partial differential equations.
Dover Publications, Inc., Mineola, New York, dover edition edition, 2010.
- [5] Enzo Vitillaro.
Strong solutions for the wave equation with a kinetic boundary condition.
Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations. I. Evolution Problems, Contemporary in Mathematics, 594:295–307, 2013.