

Numerische Verfahren für plasmonische Nanostrukturen

Constantin Carle

Karlsruher Institut für Technologie

CRC 1173

WaVe
phenomena

Problemstellung

Analytische Betrachtung

Raumdiskretisierung

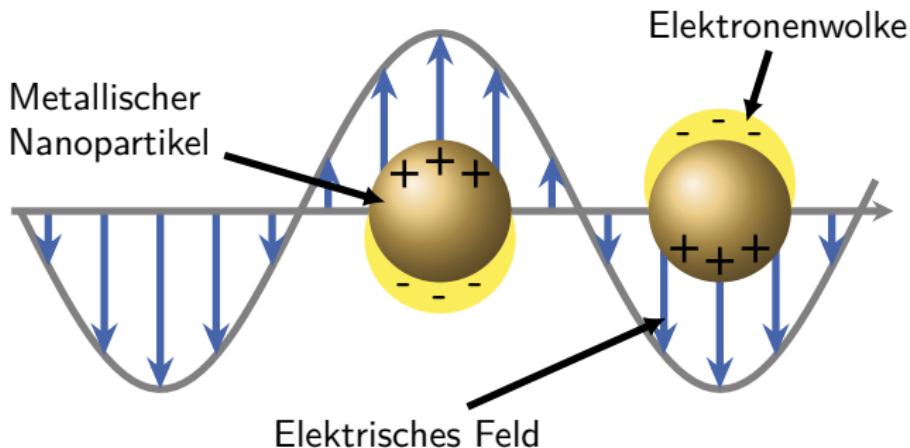
Numerische Zeitintegration

Numerische Beispiele und Vergleiche

Ausblick

Plasmonische Nanostrukturen

- Erzeugung starker elektromagnetischer Felder durch Schwingungen der freien Elektronen (Plasmonen) in metallischen Nanoteilchen



■ Maxwell-Gleichungen

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

- Maxwell-Gleichungen
 - + Eulergleichungen (hydrodynamisches Drude-Modell)

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{J} = & - \operatorname{div}(\rho^{-1} \mathbf{J} \otimes \mathbf{J}) - \kappa \nabla \rho^{\frac{5}{3}} \\ & - \gamma \mathbf{J} + \frac{q}{m_e} (\rho \mathbf{E} + \mu \mathbf{J} \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (0, T) \times \Omega$$

Mathematisches Modell

- Maxwell-Gleichungen
 - + linearisiertes hydrodynamisches Drude-Modell

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J} = - \beta^2 \nabla \rho - \gamma \mathbf{J} + \omega^2 \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

Mathematisches Modell

- Maxwell-Gleichungen
 - + linearisiertes hydrodynamisches Drude-Modell

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J} = - \beta^2 \nabla \rho - \gamma \mathbf{J} + \omega^2 \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet, $T \in (0, \infty)$
- Parameter $\beta, \gamma, \omega > 0$
- $\varepsilon, \mu > \delta > 0$ stückweise konstant
- Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

Rand- und Anfangsbedingungen

■ Randbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} :

- Silver-Müller-Randbedingung (SM):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mu c \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} - \varepsilon c \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

- Perfekt leitende Randbedingungen (PEC):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

Rand- und Anfangsbedingungen

■ Randbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} :

- Silver-Müller-Randbedingung (SM):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + \mu c \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} - \varepsilon c \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

- Perfekt leitende Randbedingungen (PEC):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

■ Randbedingungen für \mathbf{J} (und ρ): $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ $(0, T) \times \partial\Omega$

Rand- und Anfangsbedingungen

■ Randbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} :

- Silver-Müller-Randbedingung (SM):

$$\begin{aligned} n \times \mathbf{E} + \mu c n \times (n \times \mathbf{H}) &= 0 & (0, T) \times \partial\Omega \\ n \times \mathbf{H} - \varepsilon c n \times (n \times \mathbf{E}) &= 0 & (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

- Perfekt leitende Randbedingungen (PEC):

$$n \times \mathbf{E} = 0 \quad n \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

■ Randbedingungen für \mathbf{J} (und ρ):

$$n \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (0, T) \times \partial\Omega$$

■ Anfangsbedingungen:

$\mathbf{E}(0)$, $\mathbf{H}(0)$ erfüllen Divergenz-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0 & (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho & (0, T) \times \Omega \end{aligned}$$

Energie und Stabilität

Energie: $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|\mathbf{H}(t)\|_{\mu}^2 + \omega^2 \|\mathbf{E}(t)\|_{\varepsilon}^2 + \beta^2 \|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{J}(t)\|^2 \right)$$

Energie: $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|\mathbf{H}(t)\|_{\mu}^2 + \omega^2 \|\mathbf{E}(t)\|_{\varepsilon}^2 + \beta^2 \|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{J}(t)\|^2 \right)$$

- für PEC-Randbedingungen:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 \leq 0$$

Energie: $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|\mathbf{H}(t)\|_{\mu}^2 + \omega^2 \|\mathbf{E}(t)\|_{\varepsilon}^2 + \beta^2 \|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{J}(t)\|^2 \right)$$

- für PEC-Randbedingungen:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 \leq 0$$

- für SM-Randbedingung:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 - \omega^2 \|(\mu c)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{H}\|_{\partial\Omega}^2 \leq 0$$

Energie: $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|\mathbf{H}(t)\|_{\mu}^2 + \omega^2 \|\mathbf{E}(t)\|_{\varepsilon}^2 + \beta^2 \|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{J}(t)\|^2 \right)$$

- für PEC-Randbedingungen:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 \leq 0$$

- für SM-Randbedingung:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 - \omega^2 \|(\mu c)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{H}\|_{\partial\Omega}^2 \leq 0$$

→ Dissipativität des Modells

Energie: $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}(t)) := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 := \frac{1}{2} \left(\omega^2 \|\mathbf{H}(t)\|_{\mu}^2 + \omega^2 \|\mathbf{E}(t)\|_{\varepsilon}^2 + \beta^2 \|\rho(t)\|^2 + \|\mathbf{J}(t)\|^2 \right)$$

- für PEC-Randbedingungen:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 \leq 0$$

- für SM-Randbedingung:

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\gamma \|\mathbf{J}\|^2 - \omega^2 \|(\mu c)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{H}\|_{\partial\Omega}^2 \leq 0$$

➔ Dissipativität des Modells

➔ Stabilität:

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathcal{E}} \leq \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathcal{E}} \quad \text{für alle } t > 0$$

Existenz und Eindeutigkeit

- nur für Modell mit PEC-Randbedingungen

Existenz und Eindeutigkeit

- nur für Modell mit PEC-Randbedingungen

- abstraktes Cauchy-Problem $\partial_t \mathbf{u} = \mathcal{A} \mathbf{u}$ mit

- $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$

- $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & -\mu^{-1} \operatorname{curl} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \operatorname{curl} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} I \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{div} \\ 0 & \omega^2 I & -\beta^2 \nabla & -\gamma I \end{pmatrix}$

- $D(\mathcal{A}) := H(\operatorname{curl}, \Omega) \times H_0(\operatorname{curl}, \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0(\operatorname{div}, \Omega)$

- nur für Modell mit PEC-Randbedingungen
- abstraktes Cauchy-Problem $\partial_t \mathbf{u} = \mathcal{A} \mathbf{u}$ mit
 - $\mathbf{u} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}, \rho, \mathbf{J})$
 - $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & -\mu^{-1} \operatorname{curl} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \operatorname{curl} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} I \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{div} \\ 0 & \omega^2 I & -\beta^2 \nabla & -\gamma I \end{pmatrix}$
 - $D(\mathcal{A}) := H(\operatorname{curl}, \Omega) \times H_0(\operatorname{curl}, \Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0(\operatorname{div}, \Omega)$
- \mathcal{A} dissipativer Operator
- Existenz und Eindeutigkeit mit Satz von Lumer-Philips

Raumdiskretisierung

- Discontinuous-Galerkin-Methode mit Central Flux

Raumdiskretisierung

- Discontinuous-Galerkin-Methode mit Central Flux
- semidiskretes Problem mit PEC-Randbedingungen

$$\partial_t \mathbf{H}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho_h = -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J}_h = -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

- diskrete Operatoren

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \approx \mu^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \approx \varepsilon^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \approx \operatorname{div}, \quad \mathcal{G}_{\rho} \approx \nabla$$

- Discontinuous-Galerkin-Methode mit Central Flux
- semidiskretes Problem mit **SM-Randbedingung**

$$\partial_t \mathbf{H}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h - \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^{SM} \mathbf{H}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h - \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho_h = -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J}_h = -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

- diskrete Operatoren

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \approx \mu^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \approx \varepsilon^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \approx \operatorname{div}, \quad \mathcal{G}_{\rho} \approx \nabla$$

Raumdiskretisierung

- Discontinuous-Galerkin-Methode mit Central Flux
- semidiskretes Problem mit PEC-Randbedingungen

$$\partial_t \mathbf{H}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h = -\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho_h = -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J}_h = -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \quad (0, T) \times \Omega$$

- diskrete Operatoren

$$\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \approx \mu^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \approx \varepsilon^{-1} \operatorname{curl}, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \approx \operatorname{div}, \quad \mathcal{G}_{\rho} \approx \nabla$$

- Stabilität und Energie wie im kontinuierlichen Fall:

$$\|\mathbf{u}_h(t)\|_{\varepsilon} \leq \|\mathbf{u}_h(0)\|_{\varepsilon} \quad \text{für alle } t > 0$$

In Anwendung: low-storage Runge-Kutta-Verfahren (LSRK),
z.B. LSRK(14,4) in Hille, Moeferdt et al., *Second Harmonic Generation from Metal Nano-Particle Resonators*, 2016

In Anwendung: low-storage Runge-Kutta-Verfahren (LSRK),
z.B. LSRK(14,4) in Hille, Moeferdt et al., *Second Harmonic Generation from Metal Nano-Particle Resonators*, 2016

$$\partial_t y = f(t, y), \quad y(0) = y^0$$

- explizite Runge-Kutta-Verfahren (Schrittweite τ):

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i Y'_i$$

$$Y_i = y_n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} Y'_j, \quad i = 1, \dots, s$$

$$Y'_i = f(t_n + c_i \tau, Y_i), \quad i = 1, \dots, s$$

In Anwendung: low-storage Runge-Kutta-Verfahren (LSRK),
z.B. LSRK(14,4) in Hille, Moeferdt et al., *Second Harmonic Generation from Metal Nano-Particle Resonators*, 2016

$$\partial_t y = f(t, y), \quad y(0) = y^0$$

- explizite Runge-Kutta-Verfahren (Schrittweite τ):

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i Y'_i$$

$$Y_i = y_n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} Y'_j, \quad i = 1, \dots, s$$

$$Y'_i = f(t_n + c_i \tau, Y_i), \quad i = 1, \dots, s$$

- Problem: Speicherung von s temporären Vektoren Y'_i , $i = 1, \dots, s$

Low-storage Runge-Kutta-Verfahren

- LSRK (Schrittweite τ):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= y_n \\ \tilde{Y}'_i &= A_i \tilde{Y}'_{i-1} + f(t_n + c_i \tau, \tilde{Y}_{i-1}) \\ \tilde{Y}_i &= \tilde{Y}_{i-1} + \tau B_i \tilde{Y}'_i \\ y_{n+1} &= \tilde{Y}_s \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für alle } i = 1, \dots, s \\ \end{array} \right\}$$

- A_i, B_i reelle Koeffizienten mit $A_1 = 0$

Low-storage Runge-Kutta-Verfahren

- LSRK (Schrittweite τ):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= y_n \\ \tilde{Y}'_i &= A_i \tilde{Y}'_{i-1} + f(t_n + c_i \tau, \tilde{Y}_{i-1}) \\ \tilde{Y}_i &= \tilde{Y}_{i-1} + \tau B_i \tilde{Y}'_i \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{ für alle } i = 1, \dots, s$$
$$y_{n+1} = \tilde{Y}_s$$

- A_i, B_i reelle Koeffizienten mit $A_1 = 0$
- Speicherung von nur 2 temporären Vektoren $\tilde{Y}'_i, \tilde{Y}_i$

Low-storage Runge-Kutta-Verfahren

- LSRK (Schrittweite τ):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= y_n \\ \tilde{Y}'_i &= A_i \tilde{Y}'_{i-1} + f(t_n + c_i \tau, \tilde{Y}_{i-1}) \\ \tilde{Y}_i &= \tilde{Y}_{i-1} + \tau B_i \tilde{Y}'_i \\ y_{n+1} &= \tilde{Y}_s \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für alle } i = 1, \dots, s \\ \end{array} \right\}$$

- A_i, B_i reelle Koeffizienten mit $A_1 = 0$
- Speicherung von nur 2 temporären Vektoren $\tilde{Y}'_i, \tilde{Y}_i$
- aber: mehr Stufen für höhere Ordnung des Verfahrens

Low-storage Runge-Kutta-Verfahren

- LSRK (Schrittweite τ):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= y_n \\ \tilde{Y}'_i &= A_i \tilde{Y}'_{i-1} + f(t_n + c_i \tau, \tilde{Y}_{i-1}) \\ \tilde{Y}_i &= \tilde{Y}_{i-1} + \tau B_i \tilde{Y}'_i \\ y_{n+1} &= \tilde{Y}_s \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für alle } i = 1, \dots, s \\ \end{array} \right\}$$

- A_i, B_i reelle Koeffizienten mit $A_1 = 0$
- Speicherung von nur 2 temporären Vektoren $\tilde{Y}'_i, \tilde{Y}_i$
- aber: mehr Stufen für höhere Ordnung des Verfahrens
- **Aufwand:** s Auswertungen von f

Idee: Splitting-Verfahren

$$\partial_t y = f(t, y) = \textcolor{blue}{f^{[1]}}(t, y) + \textcolor{red}{f^{[2]}}(t, y)$$

Idee: Splitting-Verfahren

$$\partial_t y = f(t, y) = \textcolor{blue}{f^{[1]}}(t, y) + \textcolor{red}{f^{[2]}}(t, y)$$

- Ansatz für PEC-Randbedingungen:

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \\ -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ 0 \\ 0 \\ -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}$$

- Teilprobleme exakt lösbar

Teilproblem 1

■ Problem

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \\ -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(0) \\ \mathbf{E}_h(0) \\ \rho_h(0) \\ \mathbf{J}_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}_h^0 \\ \hat{\mathbf{E}}_h^0 \\ \hat{\rho}_h^0 \\ \hat{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

Teilproblem 1

■ Problem

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \\ -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(0) \\ \mathbf{E}_h(0) \\ \rho_h(0) \\ \mathbf{J}_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}_h^0 \\ \hat{\mathbf{E}}_h^0 \\ \hat{\rho}_h^0 \\ \hat{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

■ exakte Lösung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(\tau) \\ \mathbf{E}_h(\tau) \\ \rho_h(\tau) \\ \mathbf{J}_h(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}_h^0 \\ \hat{\mathbf{E}}_h^0 + \tau (\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{H}}_h^0 - \varepsilon^{-1} \hat{\mathbf{J}}_h^0) \\ \hat{\rho}_h^0 - \tau \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{J}}_h^0 \\ \hat{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

Teilproblem 2

■ Problem

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ 0 \\ 0 \\ -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(0) \\ \mathbf{E}_h(0) \\ \rho_h(0) \\ \mathbf{J}_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\rho}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

Teilproblem 2

■ Problem

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ 0 \\ 0 \\ -\beta^2 \mathbf{g}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(0) \\ \mathbf{E}_h(0) \\ \rho_h(0) \\ \mathbf{J}_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\rho}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

■ exakte Lösung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(\tau) \\ \mathbf{E}_h(\tau) \\ \rho_h(\tau) \\ \mathbf{J}_h(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_h^0 & -\tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_h^0 & \tilde{\rho}_h^0 \\ \tilde{\rho}_h^0 & e^{-\gamma\tau} \tilde{\mathbf{J}}_h^0 + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) (-\beta^2 \mathbf{g}_{\rho} \tilde{\rho}_h^0 + \omega^2 \tilde{\mathbf{E}}_h^0) \end{pmatrix}$$

$$■ \varphi_1(z) := \frac{\exp(z) - 1}{z} = \int_0^1 \exp(\theta z) d\theta$$

Teilproblem 2

■ Problem

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ 0 \\ 0 \\ -\beta^2 \mathbf{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(0) \\ \mathbf{E}_h(0) \\ \rho_h(0) \\ \mathbf{J}_h(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\rho}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{J}}_h^0 \end{pmatrix}$$

■ exakte Lösung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_h(\tau) \\ \mathbf{E}_h(\tau) \\ \rho_h(\tau) \\ \mathbf{J}_h(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_h^0 - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{E}}_h^0 \\ \tilde{\rho}_h^0 \\ \tilde{\mathbf{J}}_h^0 + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) (-\beta^2 \mathbf{G}_{\rho} \tilde{\rho}_h^0 - \gamma \tilde{\mathbf{J}}_h^0 + \omega^2 \tilde{\mathbf{E}}_h^0) \end{pmatrix}$$

$$■ \varphi_1(z) := \frac{\exp(z) - 1}{z} = \int_0^1 \exp(\theta z) d\theta$$

Splitting-Verfahren

- Strang-Splitting: $\psi_\tau(y_n) \approx \phi_{\frac{\tau}{2}}^{[1]} \circ \phi_\tau^{[2]} \circ \phi_{\frac{\tau}{2}}^{[1]}(y_n)$

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right)$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma \tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_\rho \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right)$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1}$$

Approximiertes Splitting-Verfahren

- für numerische Analyse
- (1,1)-Padé-Approximation von $e^{-\gamma\tau}$ in \mathbf{J}_h :

$$e^{-\gamma\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\gamma}{1 + \frac{1}{2}\tau\gamma}$$

Approximiertes Splitting-Verfahren

- für numerische Analyse
- (1,1)-Padé-Approximation von $e^{-\gamma\tau}$ in \mathbf{J}_h :

$$e^{-\gamma\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\gamma}{1 + \frac{1}{2}\tau\gamma}$$

→ $\varphi_1(-\gamma\tau) \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma\tau}$

Approximiertes Splitting-Verfahren

- für numerische Analyse
- (1,1)-Padé-Approximation von $e^{-\gamma\tau}$ in \mathbf{J}_h :

$$e^{-\gamma\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\gamma}{1 + \frac{1}{2}\tau\gamma}$$

- $\varphi_1(-\gamma\tau) \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma\tau}$
- $\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma\tau} \left(-\beta^2 \mathbf{G}_\rho \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$

Approximiertes Splitting-Verfahren

- für numerische Analyse
- (1,1)-Padé-Approximation von $e^{-\gamma\tau}$ in \mathbf{J}_h :

$$e^{-\gamma\tau} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\gamma}{1 + \frac{1}{2}\tau\gamma}$$

- $\varphi_1(-\gamma\tau) \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma\tau}$
- $\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma\tau} \left(-\beta^2 \mathcal{G}_\rho \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$

- gerechtfertigt, da in Anwendung $\gamma \ll 1$
- entspricht Mittelpunktsregel für \mathbf{J}_h

- Diskrete Energie:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h) := \mathcal{E}(\mathbf{u}_h) - \frac{\tau^2}{8} \omega^2 \|\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h\|_{\varepsilon}^2 - \frac{\tau^2}{8} \beta^2 \|\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h\|^2$$

- Diskrete Energie:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h) := \mathcal{E}(\mathbf{u}_h) - \frac{\tau^2}{8} \omega^2 \|\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h\|_{\varepsilon}^2 - \frac{\tau^2}{8} \beta^2 \|\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h\|^2$$

- Energie-Identität:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h^{n+1}) := \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h^n) - \frac{\tau\gamma}{4} \|\mathbf{J}_h^{n+1} + \mathbf{J}_h^n\|^2$$

➔ dissipatives Verhalten für diskrete Energie:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h^n) := \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h^0) - \frac{\tau\gamma}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \|\mathbf{J}_h^{m+1} + \mathbf{J}_h^m\|^2$$

Stabilität für approximiertes Splitting-Verfahren

CFL-Bedingung:

$$\tau \leq 2 \theta C_{\text{CFL}} h_{\min}$$

- $\theta \in (0,1)$
- C_{CFL} unabhängig von γ

CFL-Bedingung:

$$\tau \leq 2 \theta C_{\text{CFL}} h_{\min}$$

- $\theta \in (0,1)$
- C_{CFL} unabhängig von γ

→ Schranken für die diskrete Energie:

$$(1 - \theta^2) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2 \leq 2 \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2$$

Stabilität für approximiertes Splitting-Verfahren

CFL-Bedingung:

$$\tau \leq 2 \theta C_{\text{CFL}} h_{\min}$$

- $\theta \in (0,1)$
- C_{CFL} unabhängig von γ

→ Schranken für die diskrete Energie:

$$(1 - \theta^2) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2 \leq 2 \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2$$

→ Stabilität des Verfahrens ($C_{\text{stb}} = (1 - \theta^2)^{-1}$):

$$\|\mathbf{u}_h^n\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C_{\text{stb}} \|\mathbf{u}_h^0\|_{\mathcal{E}}^2 - C_{\text{stb}} \frac{\tau \gamma}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \|\mathbf{J}_h^{m+1} + \mathbf{J}_h^m\|^2$$

Stabilität für approximiertes Splitting-Verfahren

CFL-Bedingung:

$$\tau \leq 2 \theta C_{\text{CFL}} h_{\min}$$

- $\theta \in (0,1)$
- C_{CFL} unabhängig von γ

→ Schranken für die diskrete Energie:

$$(1 - \theta^2) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2 \leq 2 \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_h) \leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{E}}^2$$

→ Stabilität des Verfahrens ($C_{\text{stb}} = (1 - \theta^2)^{-1}$):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^n\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq C_{\text{stb}} \|\mathbf{u}_h^0\|_{\mathcal{E}}^2 - C_{\text{stb}} \frac{\tau \gamma}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \|\mathbf{J}_h^{m+1} + \mathbf{J}_h^m\|^2 \\ \Rightarrow \quad \|\mathbf{u}_h^n\|_{\mathcal{E}} &\leq C_{\text{stb}}^{1/2} \|\mathbf{u}_h^0\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Splitting-Verfahren mit SM-Randbedingung

- Adaption des vorherigen Splitting-Verfahrens

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right)$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right)$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1}$$

Splitting-Verfahren mit SM-Randbedingung

- Adaption des vorherigen Splitting-Verfahrens

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \tau \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^{SM} \mathbf{H}_h^n$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma \tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1}$$

Splitting-Verfahren mit SM-Randbedingung

- Adaption des vorherigen Splitting-Verfahrens

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \tau \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^{SM} \mathbf{H}_h^n$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1}$$

- Energie und Stabilität ähnlich wie zuvor

Rechenaufwand

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right)$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right)$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1}$$

Rechenaufwand

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \tau \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^{SM} \mathbf{H}_h^n$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right)$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

Rechenaufwand

$$\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_h^n + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^n \right) - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

$$\rho_h^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} = \mathbf{H}_h^n - \tau \mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} - \tau \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^{SM} \mathbf{H}_h^n$$

$$\mathbf{J}_h^{n+1} = \mathbf{J}_h^n + \tau \varphi_1(-\gamma\tau) \left(-\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \gamma \mathbf{J}_h^n + \omega^2 \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} = \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left(\mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1} - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h^{n+1} \right)$$

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h^{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^{SM} \mathbf{E}_h^n$$

→ **Aufwand:** 1 Auswertung der rechten Seite

Numerisches Beispiel

Hohlraum

- Würfel mit Kantenlänge von 1

Numerisches Beispiel

Hohlraum

- Würfel mit Kantenlänge von 1
- Erweiterung des Modells um **künstliche Ströme**:

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} + \mathbf{J}^{\text{art}} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J} = - \beta^2 \nabla \rho - \gamma \mathbf{J} + \omega^2 \mathbf{E} + \gamma \mathbf{J}^{\text{art}} - \omega^2 \mathbf{E}^{\text{art}} \quad (0, T) \times \Omega$$

- analytische Lösungen für PEC-Randbedingungen bekannt

Numerisches Beispiel

Hohlraum

- Würfel mit Kantenlänge von 1
- Erweiterung des Modells um **künstliche Ströme**:

$$\mu \partial_t \mathbf{H} = - \operatorname{curl} \mathbf{E} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{E} = - \operatorname{curl} \mathbf{H} - \mathbf{J} + \mathbf{J}^{\text{art}} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \rho = - \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (0, T) \times \Omega$$

$$\partial_t \mathbf{J} = - \beta^2 \nabla \rho - \gamma \mathbf{J} + \omega^2 \mathbf{E} + \gamma \mathbf{J}^{\text{art}} - \omega^2 \mathbf{E}^{\text{art}} \quad (0, T) \times \Omega$$

- analytische Lösungen für PEC-Randbedingungen bekannt
- Parameter $\varepsilon = \mu = \beta = \gamma = \omega = 1$
- Simulationszeit $T = 5$

Analytische Lösung

$$\mathbf{H}(t,x,y,z) = \Theta^{-1} \begin{pmatrix} (-k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \\ (k_x + k_z) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \\ (-k_y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \end{pmatrix} \sin(\Theta t)$$

$$\mathbf{E}(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} -\cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ 0 \\ \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{pmatrix} \cos(\Theta t)$$

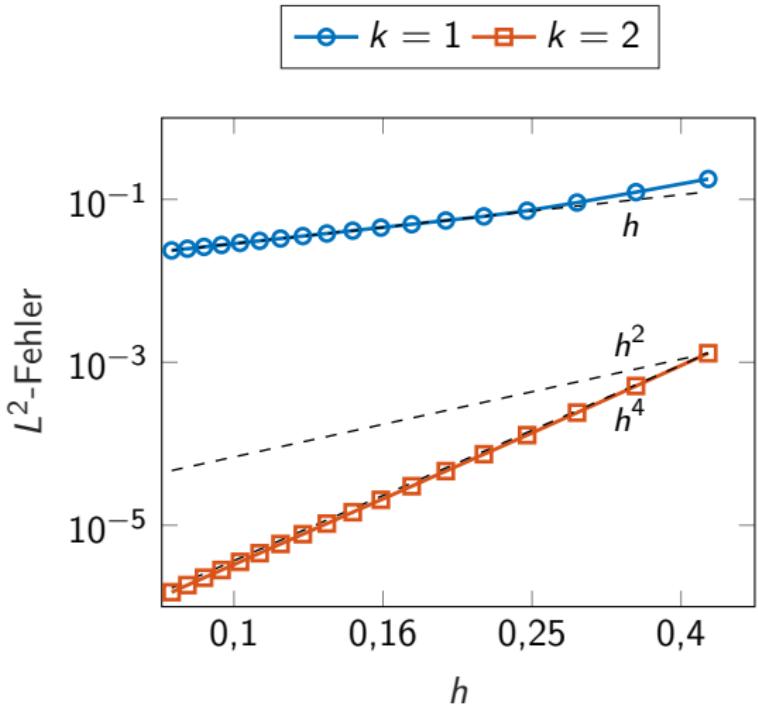
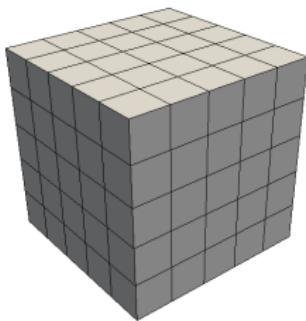
$$\rho(t,x,y,z) = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\Theta t)$$

$$\mathbf{J}(t,x,y,z) = \Theta^{-1} \begin{pmatrix} k_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \\ k_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \\ k_z \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \end{pmatrix} \sin(\Theta t)$$

■ $k_x = k_y = k_z = \pi, \quad \Theta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

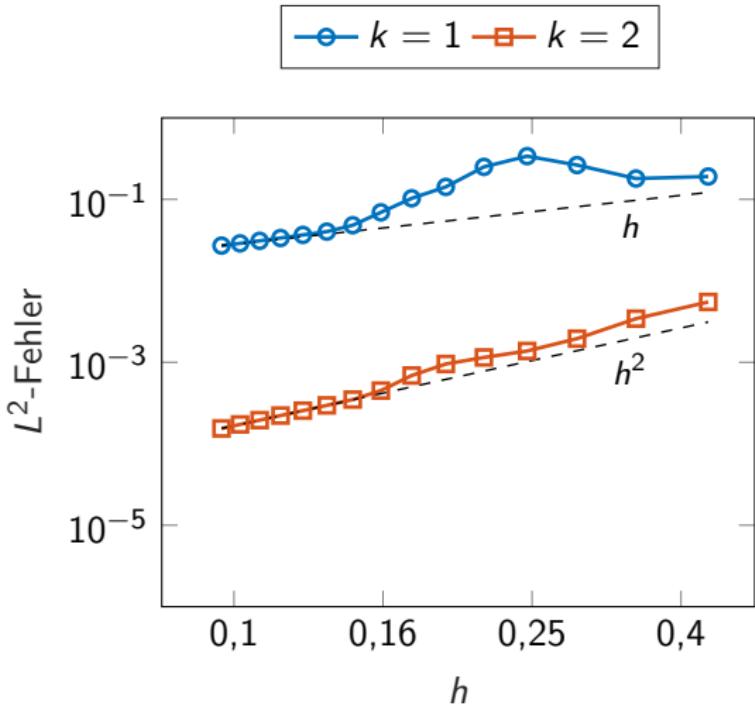
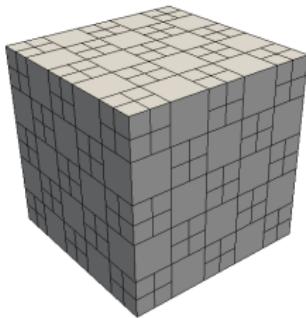
Ortskonvergenz

- LSRK (5,4)
- 1000 Zeitschritte
- regelmäßiges Gitter



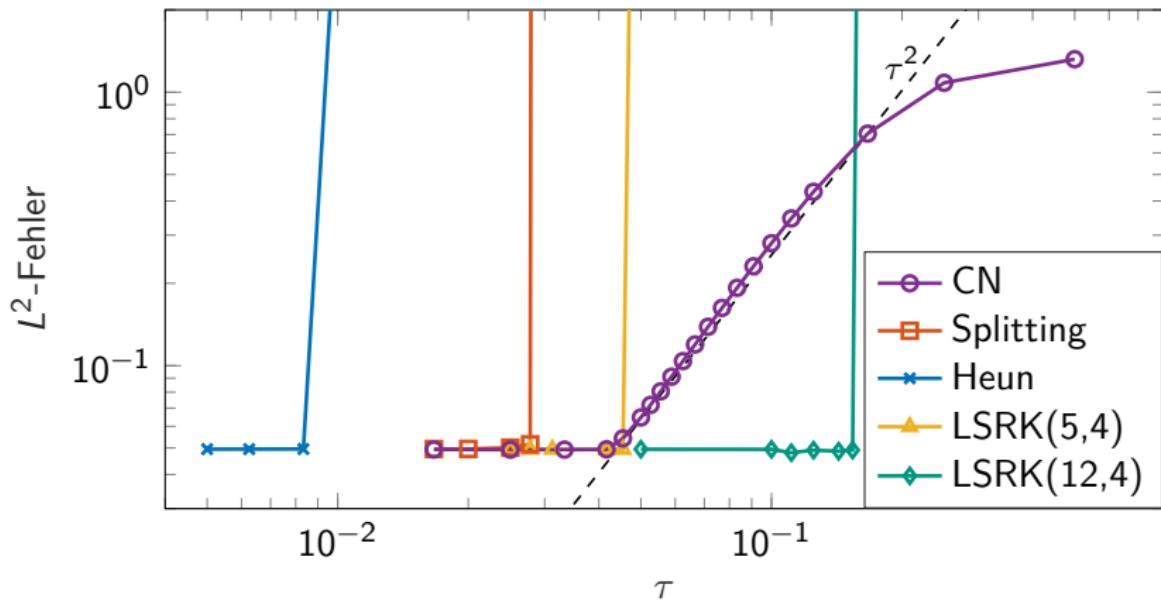
Ortskonvergenz

- LSRK (5,4)
- 1000 Zeitschritte
- unregelmäßiges Gitter



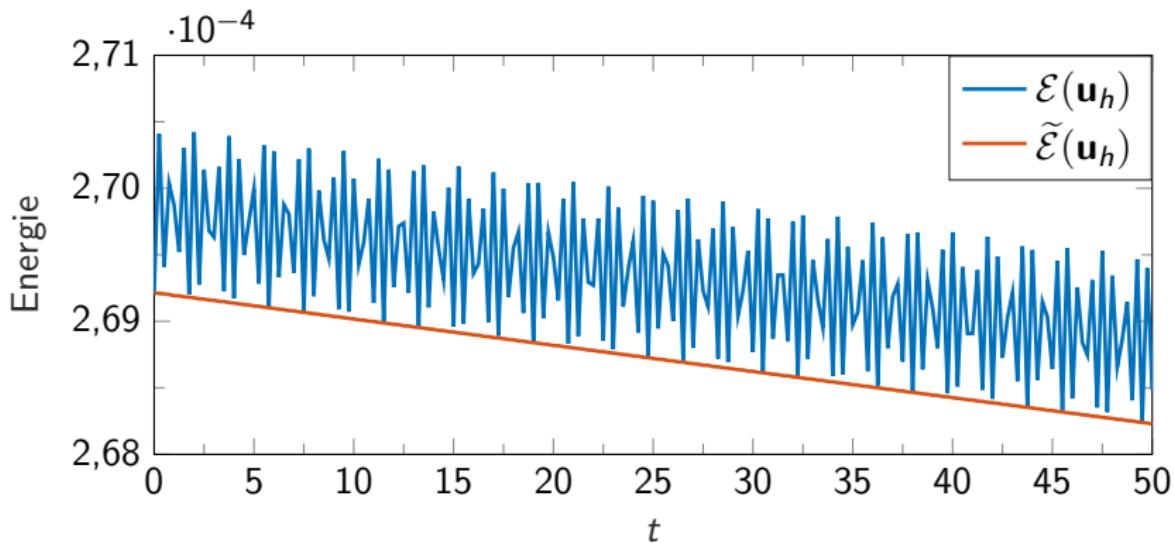
Zeitkonvergenz

- regelmäßiges Gitter mit $h \approx 0.1732$, Polynomgrad $k = 1$



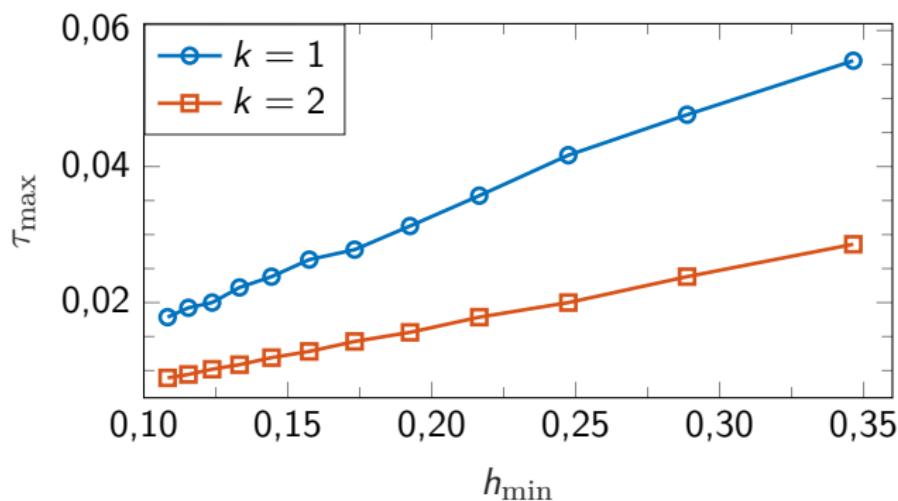
Diskrete Energie vs. Energie für Splitting

- regelmäßiges Gitter mit $h \approx 0.1732$, Polynomgrad $k = 1$
- 2000 Zeitschritte, $T = 50$
- Werte für Konstanten: $\beta^2 \approx 2,37 \times 10^{-5}$, $\omega^2 \approx 2,15 \times 10^{-3}$, $\gamma = 1$



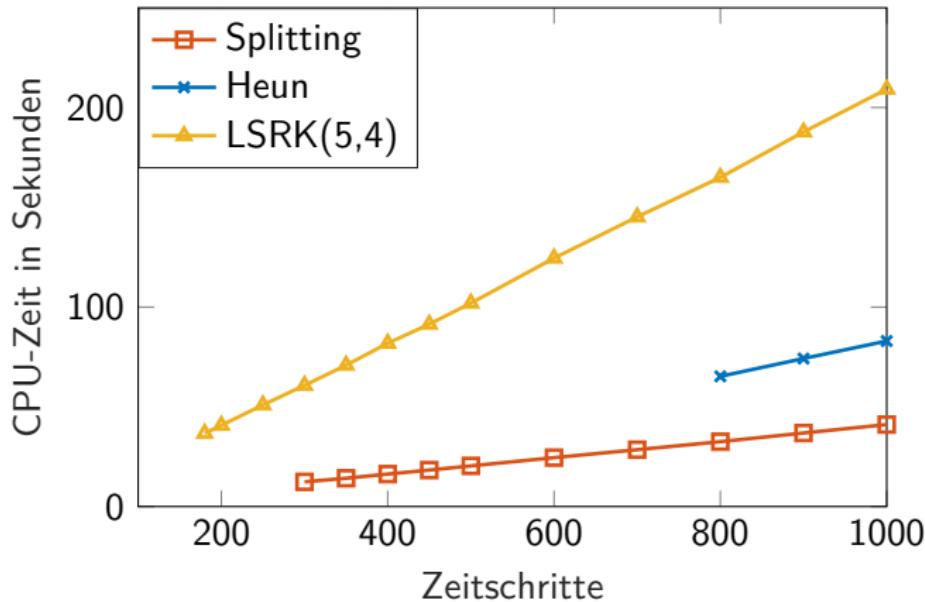
CFL-Bedingung

- regelmäßige Gitter, Simulationszeit $T = 5$, Polynomgrad $k = 1$
- Werte für Konstanten:
 $\beta^2 \approx 2,37 \times 10^{-5}$, $\omega^2 \approx 2,15 \times 10^{-3}$, $\gamma \approx 1,08 \times 10^{-4}$



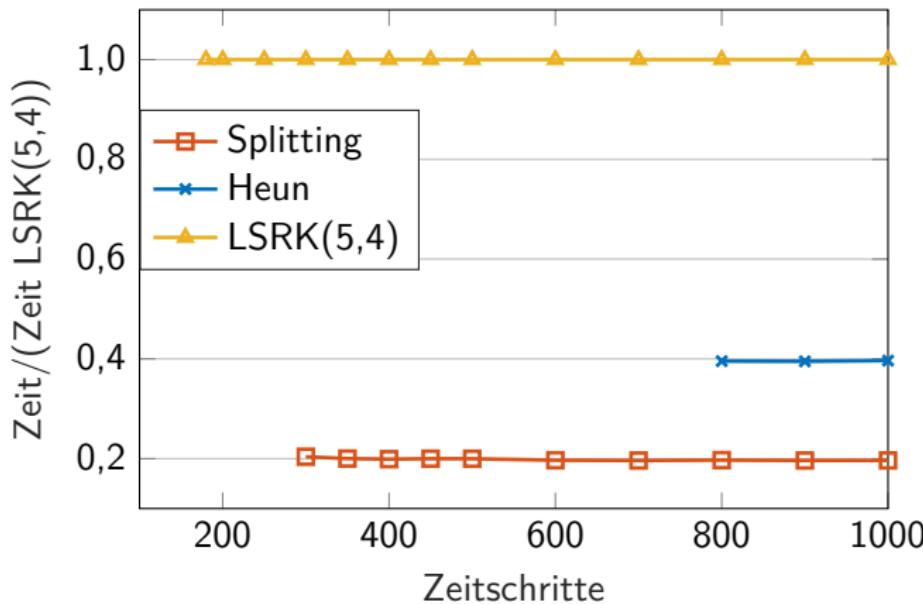
Vergleich CPU-Zeit

- regelmäßiges Gitter mit $h \approx 0,1083$, Polynomgrad $k = 1$
- realistische Werte für Konstanten:
 $\beta^2 \approx 2,37 \cdot 10^{-5}$, $\gamma \approx 1,08 \cdot 10^{-4}$, $\omega^2 \approx 2,15 \cdot 10^{-3}$



Vergleich CPU-Zeit

- regelmäßiges Gitter mit $h \approx 0,1083$, Polynomgrad $k = 1$
- realistische Werte für Konstanten:
 $\beta^2 \approx 2,37 \cdot 10^{-5}$, $\gamma \approx 1,08 \cdot 10^{-4}$, $\omega^2 \approx 2,15 \cdot 10^{-3}$



Ausblick

- weitere Beispiele und Laufzeitvergleiche

- weitere Beispiele und Laufzeitvergleiche
- andere Splitting-Varianten für das linearisierte Modell, z.B. Trennung nach Maxwell/Drude

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \\ -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}$$

- Stabilität für nicht approximiertes Splitting-Verfahren
- Konvergenz-Resultate für linearisiertes Modell

- weitere Beispiele und Laufzeitvergleiche
- andere Splitting-Varianten für das linearisierte Modell, z.B. Trennung nach Maxwell/Drude

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h \\ \partial_t \mathbf{E}_h \\ \partial_t \rho_h \\ \partial_t \mathbf{J}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{C}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h \\ \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{J}_h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathcal{D}_{\mathbf{J}} \mathbf{J}_h \\ -\beta^2 \mathcal{G}_{\rho} \rho_h - \gamma \mathbf{J}_h + \omega^2 \mathbf{E}_h \end{pmatrix}$$

- Stabilität für nicht approximiertes Splitting-Verfahren
- Konvergenz-Resultate für linearisiertes Modell
- Splitting-Verfahren für nichtlineares Modell
- Ansatz:

$$\partial_t \mathbf{u} = f(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{u} + (f(\mathbf{u}) - \mathbf{A} \mathbf{u})$$