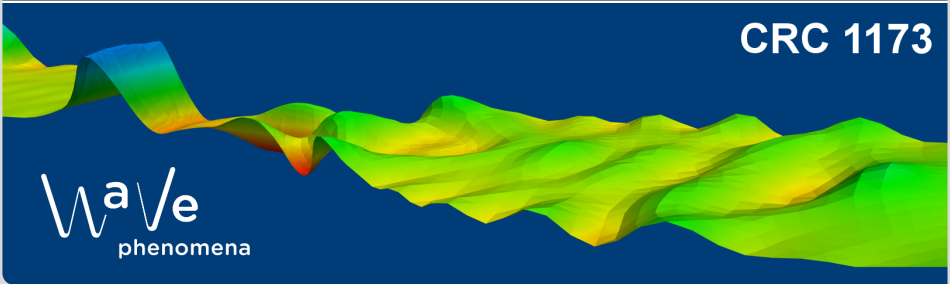


Locally Implicit Time Integration for Maxwell's Equations

Constantin Carle

Karlsruher Institut für Technologie



CRC 1173

Wave
phenomena

dG-Diskretisierung mit „central fluxes“

dG-Diskretisierung mit „upwind fluxes“

dG-Diskretisierung mit „central fluxes“

dG-Diskretisierung mit „upwind fluxes“

dG mit „central fluxes“

Cauchy-Problem in $V_h \times V_h$ ($\mathbf{J}_h \equiv 0$):

$$\partial_t \mathbf{H}_h(t) = -\mathbf{curl}_E \mathbf{E}_h(t), \quad \mathbf{H}_h(0) = \pi_h \mathbf{H}_0,$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h(t) = \mathbf{curl}_H \mathbf{H}_h(t), \quad \mathbf{E}_h(0) = \pi_h \mathbf{E}_0.$$

Cauchy-Problem in $V_h \times V_h$ ($\mathbf{J}_h \equiv 0$):

$$\partial_t \mathbf{H}_h(t) = -\mathbf{curl}_E \mathbf{E}_h(t), \quad \mathbf{H}_h(0) = \pi_h \mathbf{H}_0,$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h(t) = \mathbf{curl}_H \mathbf{H}_h(t), \quad \mathbf{E}_h(0) = \pi_h \mathbf{E}_0.$$

Lokal-implizites Verfahren (Verlet, Crank-Nicolson)

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^n = -\frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_E \mathbf{E}_h^n$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n = \tau \mathbf{curl}_H^e \mathbf{H}_h^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_H^i \left(\mathbf{H}_h^{n+1} + \mathbf{H}_h^n \right)$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} - \mathbf{H}_h^{n+1/2} = -\frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_E \mathbf{E}_h^{n+1}$$

Lokal-implizites Verfahren (Verlet, Crank-Nicolson)

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^n = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^n$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n = \tau \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \left(\mathbf{H}_h^{n+1} + \mathbf{H}_h^n \right)$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} - \mathbf{H}_h^{n+1/2} = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+1}$$

⇒ Lineares Gleichungssystem aus lokal-implizitem Verfahren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \\ \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

- Erinnerung: Block-LR-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

- Erinnerung: Schur-Komplement

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem

- Erinnerung: Block-LR-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

- Lineares Gleichungssystem aus lokal-implizitem Verfahren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_H^i \\ \frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_E & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

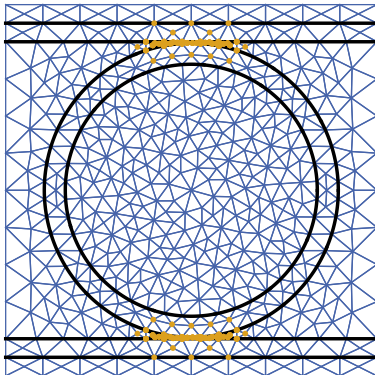
Block-LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} + \frac{\tau^2}{4} \mathbf{curl}_H^i \mathbf{curl}_E^i & 0 \\ \frac{\tau}{2} \mathbf{curl}_E & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

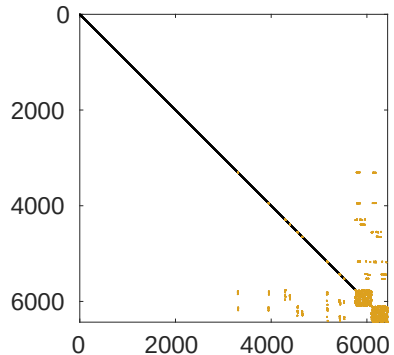
$\Rightarrow$ Zu lösendes Gleichungssystem:

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\tau^2}{4} \mathbf{curl}_H^i \mathbf{curl}_E^i \right) \mathbf{E}_h^{n+1} = \tilde{b}_1$$

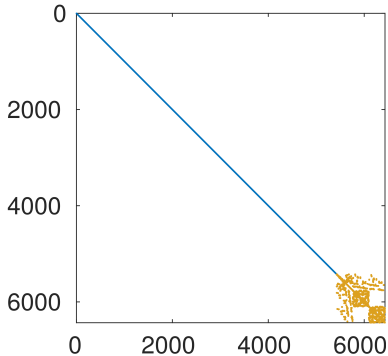
Besetzungsstruktur der Matrix $\left(\mathbf{I} + \frac{\tau^2}{4} \text{curl}_H^i \text{curl}_E^i \right)$ bei gegebener Triangulierung (expliziter, impliziter Bereich):



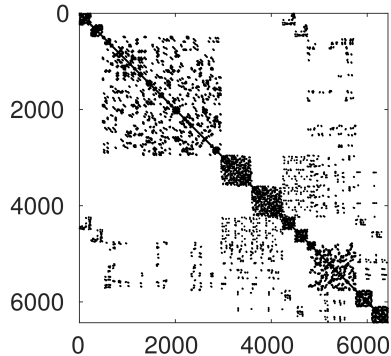
$\Rightarrow$



- Umsortierung der Freiheitsgrade
⇒ Trennung des expliziten und impliziten Bereichs



- Besetzungsstruktur der Matrix $\left(\mathbf{I} + \frac{\tau^2}{4} \mathbf{curl}_H \mathbf{curl}_E \right)$ aus dem Crank-Nicolson-Verfahren:



dG-Diskretisierung mit „central fluxes“

dG-Diskretisierung mit „upwind fluxes“

dG mit „upwind fluxes“

Cauchy-Problem in $V_h \times V_h$ ($\mathbf{J}_h \equiv 0$):

$$\partial_t \mathbf{H}_h(t) = -\mathbf{curl}_E \mathbf{E}_h(t) - \mathcal{S}_H \mathbf{H}_h(t), \quad \mathbf{H}_h(0) = \pi_h \mathbf{H}_0,$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h(t) = \mathbf{curl}_H \mathbf{H}_h(t) - \mathcal{S}_E \mathbf{E}_h(t), \quad \mathbf{E}_h(0) = \pi_h \mathbf{E}_0.$$

Cauchy-Problem in $V_h \times V_h$ ($\mathbf{J}_h \equiv 0$):

$$\partial_t \mathbf{H}_h(t) = -\operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h(t) - \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h(t), \quad \mathbf{H}_h(0) = \pi_h \mathbf{H}_0,$$

$$\partial_t \mathbf{E}_h(t) = \operatorname{curl}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h(t) - \mathcal{S}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h(t), \quad \mathbf{E}_h(0) = \pi_h \mathbf{E}_0.$$

Lokal-implizites Verfahren (Verlet, Crank-Nicolson)

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^n = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n &= \tau \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \left(\mathbf{H}_h^{n+1} + \mathbf{H}_h^n \right) \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}} (\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} - \mathbf{H}_h^{n+1/2} = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1}$$

Lokal-implizites Verfahren (Verlet, Crank-Nicolson)

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^n = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^n$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n &= \tau \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \left(\mathbf{H}_h^{n+1} + \mathbf{H}_h^n \right) \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}} (\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} - \mathbf{H}_h^{n+1/2} = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \mathbf{H}_h^{n+1}$$

⇒ Lineares Gleichungssystem aus lokal-implizitem Verfahren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}} & -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \\ \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} & \mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$$

- Lineares Gleichungssystem aus lokal-implizitem Verfahren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}} & -\frac{\tau}{2} \text{curl}_{\mathbf{H}}^i \\ \frac{\tau}{2} \text{curl}_{\mathbf{E}} & \mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Problem: Schur-Komplement benötigt $(\mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{E}})^{-1}$ oder $(\mathbf{I} + \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}})^{-1}$.

$\Rightarrow$ Approximiere $\mathbf{H}_h^{n+1} \approx \mathbf{H}_h^n$ und $\mathbf{E}_h^{n+1} \approx \mathbf{E}_h^n$ in Stabilitätstermen $\mathcal{S}_{\mathbf{H}}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{E}}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\frac{\tau}{2} \text{curl}_{\mathbf{H}}^i \\ \frac{\tau}{2} \text{curl}_{\mathbf{E}} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix}$$

- Zusätzlich: Ersetze $\mathcal{S}_{\mathbf{H}}$ und $\mathcal{S}_{\mathbf{E}}$ durch explizite Stabilisierungsoperatoren $\mathcal{S}_{\mathbf{H}}^e$ und $\mathcal{S}_{\mathbf{E}}^e$.

Neues lokal-implizites Verfahren für „upwind fluxes“

$$\mathbf{H}_h^{n+1/2} - \mathbf{H}_h^n = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^n - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^n$$

$$\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n = \tau \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^{n+1/2} + \frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{H}}^i \left(\mathbf{H}_h^{n+1} + \mathbf{H}_h^n \right) - \tau \mathcal{S}_{\mathbf{E}}^e \mathbf{E}_h^n$$

$$\mathbf{H}_h^{n+1} - \mathbf{H}_h^{n+1/2} = -\frac{\tau}{2} \operatorname{curl}_{\mathbf{E}} \mathbf{E}_h^{n+1} - \frac{\tau}{2} \mathcal{S}_{\mathbf{H}}^e \mathbf{H}_h^n$$