

ALEFELD, G.; LENHARDT, I.; MAYER, G.

Einfluß der Gewichte bei überlappenden Multisplitting-Verfahren für Bandmatrizen

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nichtsingulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Zur iterativen Lösung auf einem Parallelrechner mit p Prozessoren betrachten wir die in [1] eingeführten Multisplitting-Verfahren.

1. Multisplitting-Verfahren

Multisplitting-Verfahren basieren auf p Zerlegungen $A = M_\ell - N_\ell$, $\ell = 1, \dots, p$ der Matrix A , wobei M_ℓ jeweils nichtsingulär ist. Damit bildet man zur Berechnung von x^{k+1} die Verfahrensvorschrift

$$\begin{cases} y_\ell^{k+1} = M_\ell^{-1} N_\ell x^k + M_\ell^{-1} b, \ell = 1, \dots, p \\ x^{k+1} = \sum_{\ell=1}^p E_\ell y_\ell^{k+1} = \sum_{\ell=1}^p E_\ell M_\ell^{-1} N_\ell x^k + \sum_{\ell=1}^p E_\ell M_\ell^{-1} b =: H x^k + G b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

mit nichtnegativen Diagonalmatrizen E_ℓ und $\sum_{\ell=1}^p E_\ell = I$ mit der $n \times n$ Einheitsmatrix I . Dieses Verfahren weist eine natürliche Parallelität auf, da die Teiliterierten y_ℓ^{k+1} unabhängig voneinander berechnet werden können. Für

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix}, \quad M_\ell = \begin{pmatrix} D_1^{(\ell)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\ell\ell} & 0 \\ 0 & 0 & D_2^{(\ell)} \end{pmatrix}, \quad E_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $A_{\ell\ell} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\ell = 1, \dots, p$ und $m \cdot p = n$, $D_1^{(\ell)}, D_2^{(\ell)}$ nichtsinguläre Diagonalmatrizen passender Dimension und I_ℓ der $m \times m$ Einheitsmatrix sind die Iterierten des resultierenden Multisplitting-Verfahrens gleich denen des Block-Jacobi-Verfahrens. Ersetzt man in M_ℓ die Diagonalblöcke $A_{\ell\ell}$ durch deren unteren Dreiecksanteil, so erhält man (nichtüberlappende) Gauß-Seidel ähnliche Multisplitting-Verfahren.

Wir generieren überlappende Block-Jacobi- und Gauß-Seidel ähnliche Multisplitting-Verfahren, indem wir die Diagonalblöcke $A_{\ell\ell}$ für $1 \leq \ell < p$ um einem Wert $ovl \in \{0, \dots, m\}$ nach hinten ausdehnen, so daß sie jeweils mit den Blöcken $A_{\ell+1, \ell+1}$ überlappen. Damit, wie in [1] gefordert, $\sum_{\ell=1}^p E_\ell = I$ und $E_\ell \geq 0$ gilt, definieren wir

$$E_\ell := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)I_1^{(\ell)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2^{(\ell)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha I_3^{(\ell)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $\alpha \in [0, 1]$ und $I_j^{(\ell)}$ Einheitsmatrizen der Dimension des oberen Überlappungsbereichs, des nichtüberlappenden Bereichs bzw. des unteren Überlappungsbereichs. Für diese Verfahren untersuchen wir die Fragen:

1. Wie beeinflußt α im Intervall $[0, 1]$ die Konvergenz der Multisplitting-Verfahren?
2. Kann man auf $E_\ell \geq 0$ verzichten? Kann durch die Wahl von $\alpha > 1$ die Konvergenz sogar verbessert werden?

2. Block-Jacobi Multisplitting-Verfahren

Im Folgenden betrachten wir Bandmatrizen mit halber Bandbreite β , d.h. für $A = (a_{ij})$ soll $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > \beta$ gelten. Mit $\rho(H)$ bezeichnen wir den Spektralradius der Iterationsmatrix $H = \sum_{\ell=1}^p E_\ell M_\ell^{-1} N_\ell$. Es gilt (siehe [2])

Satz: Falls $\beta \leq m - ovl$ gilt, ist $\rho(H)$ unabhängig vom Gewichtsparameter α aus (3).

Für $\beta > m - ovl$ gilt diese Unabhängigkeit nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{256 \times 256}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ -2^{-|i-j|} & \text{für } 1 \leq |i-j| \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Wir betrachten 16 Zerlegungen der Art (2) mit $A_{\ell\ell} \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$, $\ell = 1, \dots, 16$. Das folgende Bild zeigt die Abhängigkeit des Spektralradius der Iterationsmatrix vom Gewichtsparameter α .

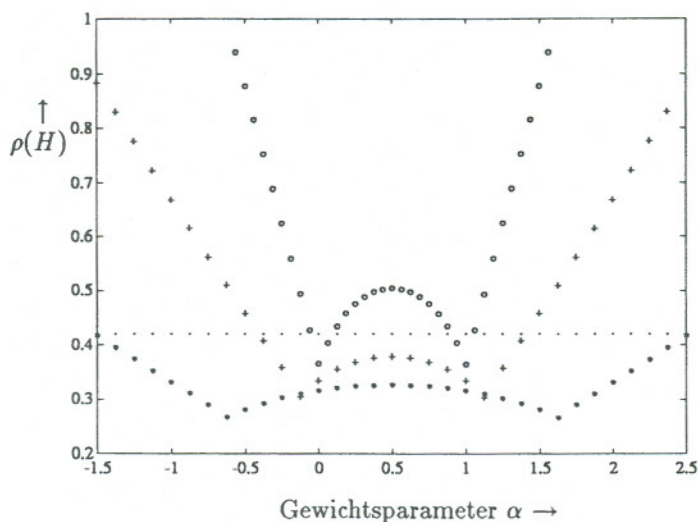


Bild 1. Abhängigkeit des Spektralradius $\rho(H)$ von α für Überlappungsbreite $ovl=8(\cdot)$, $14(*)$, $15(+)$, $16(o)$ (numerisch berechnet).

3. Gauß-Seidel ähnliche Multisplitting-Verfahren

Wendet man auf M-Matrizen mit halber Bandbreite β (wie oben) Gauß-Seidel ähnliche Multisplitting-Verfahren an, so gilt (siehe[2])

Satz: Sei A eine M-Matrix mit halber Bandbreite β , und es gelte $\beta \leq m - ovl$. Für α aus (3) fällt $\rho(H)$ im Intervall $[0, 1]$ monoton mit wachsendem α , d. h. im Intervall $[0, 1]$ ist $\alpha = 1$ optimales Gewicht.

Für die Matrix aus obigem Beispiel zeigt das folgende Bild, daß sich diese Monotonie außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ weiter fortsetzt, so daß Gewichte größer als 1 die Konvergenz weiter beschleunigen können.

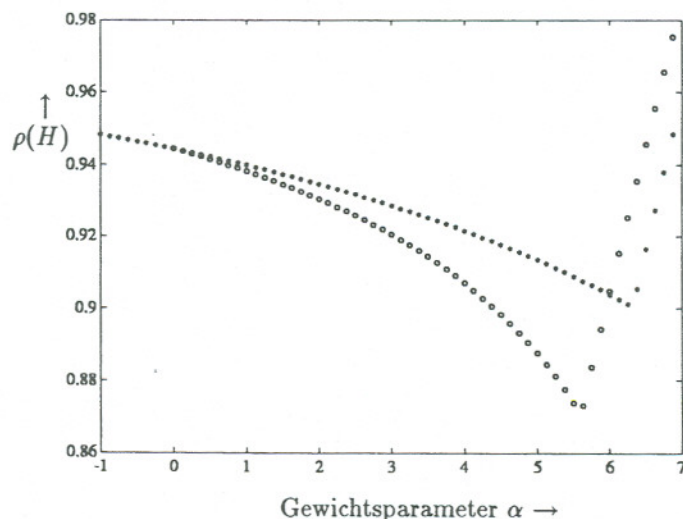


Bild 2. Abhängigkeit des Spektralradius $\rho(H)$ von α für Überlappungsbreite $ovl= 4(*)$, $12(o)$ (numerisch berechnet).

4. Literatur

1 O'LEARY, D., WHITE, R. E.: Multi-splittings of matrices and parallel solution of linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 6 (1985) 630 - 640.
 2 ALEFELD, G., LENHARDT, I., MAYER, G.: Multisplitting methods for band matrices, in Vorbereitung.
 Anschrift: PROF. DR. GÖTZ ALEFELD, DIPL. MATH. INGRID LENHARDT, Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Mathematik, D-76128 Karlsruhe, PROF. DR. GÜNTER MAYER, Universität Rostock, Fachbereich Mathematik, D-18051 Rostock