F A S C I C U L I   M A T H E M A T I C I

Nr 19 228 1990

To Professor Jerzy Albrycht on his 65th birthday

GÖTZ ALEFELD

ÜBER DIE DIVERGENZGESCHWINDIGKEIT DES INTERVALL-NEWTON-VERFAHRENS

If the starting interval contains no zero then the interval Newton-method breaks down because the intersection becomes empty after a finite number of steps. It is shown that in a certain sense this divergence behaviour is quadratic.

Key words: interval Newton method, quadratic divergence, starting interval.

I

Es sei $f: D \subseteq R \to R$ eine reelle Function f, die auf einem kompakten Intervall $[x]^0 = [x_1^0, x_2^0]$ differenzierbar ist. Die Ableitung f' sei für $[x] \subseteq [x]^0$ intervallmäßig auswertbar, d.h. es existiert $f'([x])$ und es gelte für den Durchmesser von $f'([x])$

$$d(f'([x])) \leqslant c\, d[x], \quad [x] \subseteq [x]^0, \quad c \geqslant 0. \tag{0}$$

Außerdem sei $0 \notin f'([x]^0)$, was aufgrund der Teilmengeneigenschaft impliziert, daß $0 \notin f'([x])$ für $[x] \subseteq [x]^0$ gilt. Für ein Element $m[x] \in [x]$ – gewöhnlich wählt man den Mittelpunkt von $[x]$ – und mit der intervallmäßigen Auswertung $f'([x])$ der Ableitung ist unter der Voraussetzung $0 \notin f'([x])$ der *Intervall-Newton-Operator* definiert als

$$N[x] = m[x] - \frac{f(m[x])}{f'([x])}. \tag{1}$$

Das Iterationsverfahren

$$[x]^{k+1} = N[x]^k \cap [x]^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

wird als *Intervall-Newton-Verfahren* bezeichnet.
Siehe dazu etwa [2, 4 und 5].

Für das Verfahren (2) gelten unter der Voraussetzung $0 \notin f'([x]^0)$ die folgenden Aussagen:

(a) *Besitzt* f *in* $[x]^0$ *eine Nullstelle* x^*, *so ist* (2) *wohldefiniert (d.h. der Durchschnitt ist stets nichtleer) und es gilt* $x^* \in [x]^k$, $k \geqslant 0$, *sowie* $\lim_{k\to\infty} [x]^k = x^*$.

(b) *Gilt außerdem* (0), *so erfolgt die Konvergenz quadratisch in dem Sinne, daß für die Folge* $\left\{[x]^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *gilt*

$$d[x]^{k+1} \leqslant \kappa\,(d\,[x]^k)^2 \quad \textit{mit einem } \kappa > 0.$$

(c) *Ist* $N[x]^{k_0} \cap [x]^{k_0} = \phi$ *(= leere Menge) für ein* $k_0 \geqslant 0$, *dies bezeichnen wir als Divergenz des Verfahrens* (7) *— so besitzt* f *in* $[x]^0$ *keine Nullstelle.*

Beweise dieser Aussagen findet man z. B. in [2 und 4, 5].

Besitzt f in $[x]^0$ keine Nullstelle, so tritt die Voraussetzung $N[x]^{k_0} \cap [x]^{k_0} = \phi$ für ein $k_0 \geqslant 0$ in (c) mit Sicherheit ein. Andernfalls würde nämlich die Intervallfolge $\left\{[x]^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ gegen eine reelle Zahl in $[x]^0$ konvergieren, die dann notwendig Nullstelle von f in $[x]^0$ wäre.

Die Aussage (c) ist die Basis zur Berechnung von Intervallen, welche mit Sicherheit keine Nullstelle von f enthalten. Auch spielt diese Aussage eine Rolle in der globalen Optimierung unter Verwendung von intervallarithmetischen Hilfsmitteln. Siehe dazu [3]. Während im Falle der Existenz einer Nullstelle die Konvergenz nach (b) quadratisch erfolgt, ist im Falle der Nichtexistenz einer Nullstelle, also im Falle der Divergenz nach (c), offenbar bisher nicht diskutiert worden, "wie schnell" diese Divergenz erfolgt. Wir werden zeigen, daß diese Divergenz – genauso wie die Konvergenz im Falle (b) – in einem unten präzisierten Sinne ebenfalls quadratisch erfolgt.

II

Wir setzen o. E. d. A.

$$f(x) > 0,\; f'(x) > 0$$

für $x \in [x]^0$ voraus. Die intervallmäßige Auswertung $f'([x])$ für ein Intervall $[x] = [x_1, x_2] \subseteq [x]^0$ habe die Darstellung $f'([x]) = [f'_1, f'_2]$ und es gelte (0). Es gilt dann für den Newton-Intervall-Operator $N[x] = [n_1, n_2]$

$$N[x] = m[x] - \frac{f(m[x])}{f'([x])} = \left[m[x] - \frac{f(m[x])}{f'_1},\; m[x] - \frac{f(m[x])}{f'_2} \right].$$

Für die Differenz $n_2 - x_1$ erhält man dann unter Verwendung des Mittelwertsatzes mit einem ξ zwischen $m[x]$ und x_1

$$n_2 - x_1 = m[x] - \frac{f(m[x])}{f'_2} - x_1 =$$

$$= m[x] - x_1 - \frac{f(x_1) + f'(\xi)(m[x] - x_1)}{f'_2} =$$

$$= \left(1 - \frac{f'(\xi)}{f'_2}\right)(m[x] - x_1) - \frac{f(x_1)}{f'_2}.$$

Wegen $\xi \in [x] = [x_1, x_2]$ gilt aufgrund der Teilmengeneigenschaft der Intervallrechnung $f'(\xi) \in f'([x])$, d. h. $f'(\xi) \geqslant f'_1$.
Damit und mit (0) folgt

$$1 - \frac{f'(\xi)}{f'_2} \leqslant 1 - \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{f'_2 - f'_1}{f'_2} = \frac{d(f'[x])}{f'_2} \leqslant \frac{c}{f'_2}\, d[x]$$

und damit, wegen $m[x] - x_1 \leqslant d[x]$,

$$n_2 - x_1 = 0\,((d[x])^2) - \frac{f(x_1)}{f'_2}. \tag{3}$$

Wegen $-\dfrac{f(x_1)}{f'_2} < 0$ ist also $n_2 - x_1 \leqslant 0$ – d. h. es gilt $N[x] \cap [x] = \phi$ – für hinreichend kleinen Durchmesser $d[x]$. *Die Divergenz des Verfahrens* (2) *erfolgt also in dem Sinne quadratisch, daß die Differenz von* $n_2 - x_1$ *und* $-f(x_1)/f'_2$ *eine Funktion des Quadrates von* $d[x]$ *ist, die mit* $d[x]$ *quadratisch gegen Null geht.*
In den anderen möglichen Fällen

$$f(x) > 0, \qquad f'(x) < 0$$
$$f(x) < 0, \qquad f'(x) > 0$$

und

$$f(x) < 0, \qquad f'(x) < 0$$

für $x \in [x]$ kann man eine ähnliche Gleichung wie (3) herleiten.

III

Wie in [1] in Einzelheiten beschrieben, kann das Intervall-Newton-Verfahren im Falle $0 \in f'([x]^0)$ so modifiziert werden, daß man aus dem Intervall $[x]^0$ ein Intervall ausscheidet, in welchem mit Sicherheit keine Nullstelle liegt. Im allgemeinen erhält man dadurch zwei Intervalle, die man weiter untersuchen muß. In dem nachfolgend angegebenen numerischen Beispiel haben wir diese Modifikation verwendet, bis nur noch

Intervalle mit $0 \notin f'([x]^0)$ vorliegen. Für jedes dieser Intervalle $[x]^0$ kann dann (2) gestartet werden. Enthält ein solches $[x]^0$ dann eine Nullstelle, so gilt (a) aus I. Besitzt $[x]^0$ keine Nullstelle, so gilt $N[x]^{k_0} \cap [x]^{k_0} = \phi$ für ein $k_0 \geqslant 0$. Zur Illustration betrachten wir ein numerisches *Beispiel*. Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = x^5 + x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 18x, \quad x \in R,$$

welches die Nullstellen −3, −1, 0, 2 und 3 besitzt. Wir wählen als Startintervall $[x]^0 = [-5,6]$; dieses enthält alle Nullstellen von p. In der nachfolgenden Tabelle 1 sind alle Teilintervalle von [−5,6] angegeben, welche durch die gerade besprochene

Tabelle 1

n	
1	$[-0.355\,086\,805\,863\,204\,424 \times 10^1;$ $-0.293\,795\,679\,098\,219\,953 \times 10^1]$
2	$[-0.140\,941\,325\,605\,785\,117 \times 10^1;$ $-0.870\,561\,844\,540\,492\,874]$
3	$[-0.976\,334\,565\,487\,275\,291;$ $0.498\,446\,377\,840\,909\,102]$
4	$[0.501\,343\,673\,218\,673\,208;$ $0.632\,518\,070\,938\,065\,058]$
5	$[0.140\,134\,711\,542\,762\,047 \times 10^1;$ $0.184\,743\,116\,174\,618\,360 \times 10^1]$
6	$[0.188\,468\,607\,628\,294\,493 \times 10^1;$ $0.211\,637\,994\,457\,660\,539 \times 10^1]$
7	$[0.265\,004\,149\,830\,186\,120 \times 10^1;$ $0.268\,090\,481\,151\,052\,540 \times 10^1]$
8	$[0.297\,092\,007\,835\,618\,799 \times 10^1;$ $0.324\,472\,599\,560\,166\,586 \times 10^1]$
9	$[0.327\,022\,864\,768\,385\,157 \times 10^1;$ $0.600\,000\,000\,000\,000\,000 \times 10^1]$

Tabelle 2

n	1	2	3	4*	5*	6	7*	8	9*
	5	6	9	1	2	6	1	5	3

Modifikation des Intervall-Newton-Verfahrens berechnet wurden. In der Vereinigung dieser Intervalle sind alle Nullstellen enthalten (aber nicht jedes dieser Intervall enthält eine Nullstelle). In Tabelle 2 ist angegeben, wieviele Schritte man benötigt, bis auf der Maschine die Nullstelle jeweils maximal genau eingeschlossen wurde bzw. bis der Durchschnitt zweier aufeinanderfolgender Iterierten leer wurde.
Die mit einem Stern versehenen Intervallnummern in Tabelle 2 enthalten keine Nullstellen. Es sind jeweils nur wenige Schritte notwendig bis der Durchschnitt leer wird.

Literatur

[1] Alefeld G., Eine Modifikation des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der reellen Nullstellen einer reellen Funktion, Z. Angew. Math., Mech, 50, T32-T33 (1970).

[2] Alefeld G., Herzeberger J., *Introduction to Interval Computations.* Academic Press, New York 1983.

[3] Hansen E., An Overview of Global Optimization using Interval Analysis. To appear in the Proceedings of the Conference on "The role of interval methods in scientific computing", Columbus/Ohio (1987).

[4] Moore R.E., *Interval Analysis,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

[5] Moore R.E., *Methods and Applications of Interval Analysis,* SIAM Studies, Philadelphia (1979).

(Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Mathematik,
Karlsruhe, Deutschland)
Received on 13.1.1988.