Numer. Math. 39, 163–173 (1982)

Numerische
Mathematik

Zur Konvergenz eines Verfahrens von D.J. Evans zur iterativen Verbesserung einer Näherung für die inverse Matrix

G. Alefeld

Universität Karlsruhe, Institut für Angewandte Mathematik,
Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe, FRG

Herrn Johannes Weissinger zum Siebzigsten Geburtstag gewidmet.

On the Convergence of D.J. Evans' Implicit Matrix Inversion Process

Summary. Recently D.J. Evans introduced an implicit matrix inversion process showing asymptotic behaviour which is superior to that of the well known Schulz-method. In this paper we give sufficient conditions for convergence, prove some error bounds and show that under certain conditions the iterates are converging monotonously.

Subject Classifications: AMS(MOS): 65F10 CR: 5.14.

1. Einleitung

In der kürzlich erschienenen Arbeit [3] hat D.J. Evans einen Algorithmus zur iterativen Verbesserung einer Näherung für A^{-1} angegeben, der bei gleichem Aufwand wie das bekannte Schulzsche Verfahren (s. [6]) asymptotisch günstigeres Konvergenzverhalten als dieses zeigt. In der vorliegenden Arbeit werden nach Bereitstellung einiger Hilfsmittel hinreichende Konvergenzaussagen für das Evans-Verfahren angegeben. Es wird außerdem eine Norm angegeben, in welcher die Residuen mindestens genausogut wie die des Schulz-Verfahrens durch das Residuum der Anfangsnäherung abgeschätzt werden können. Für hinreichend gute Näherungen kann man dabei die ∞-Norm verwenden. Schließlich wird gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen an A und an die Startwerte die Evans-Folge monoton konvergiert. Ähnliche Aussagen sind seit langem für das Schulzsche Verfahren bekannt (s. z.B. [1]).

2. Verfahren von Schulz und Evans

Zur Vollständigkeit geben wir das Schulzsche Verfahren an [6]:

$$Y_{k+1} = Y_k + (I - Y_k A) Y_k, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{1}$$

0029-599X/82/0039/0163/$02.20

Genügt die Startmatrix Y_1 der Bedingung $\rho(I-Y_1 A)<1$ (ρ=Spektralradius), so gilt $\lim_{k\to\infty} Y_k=A^{-1}$ und für jede Matrixnorm gilt

$$\|I-Y_{k+1}A\| \leqq \|I-Y_k A\|^{2^k}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2}$$

d.h. die Residuen konvergieren quadratisch gegen Null, woraus auch die quadratische Konvergenz des Fehlers gegen Null folgt.

Von Evans wurde in [3] das folgende Verfahren vorgeschlagen: Sei X_k eine Näherung für A^{-1} und

$$X_k A=-L_k+D_k-U_k. \tag{3}$$

Dabei bezeichnet D_k den Diagonalanteil, $-L_k$ den unteren und $-U_k$ den oberen Dreiecksanteil. Dann wird X_{k+1} durch

$$X_{k+1}=G_k^{-1} D_k^{-1} X_k \tag{4}$$

berechnet. Dabei ist

$$G_k=D_k^{-1}(D_k-L_k)D_k^{-1}(D_k-U_k).$$

Die explizite Durchführung erfolgt – wie in [3] angegeben – nach der Vorschrift

$$\left.\begin{aligned}(D_k-L_k)Z_k&=X_k\\(D_k-U_k)X_{k+1}&=D_k Z_k\end{aligned}\right\}\quad k=1,2,\ldots.$$

Für großes n (n=Ordnung der Matrix A) benötigt ein Schritt genauso viele Punktoperationen (=Multiplikationen und Divisionen) wie (1), nämlich $2n^3$.

Setzt man noch

$$F_k=D_k^{-1}L_k D_k^{-1}U_k(I-D_k^{-1}U_k)^{-1}(I-D_k^{-1}L_k)^{-1},$$

so zeigt eine einfache Rechnung (die in [3] durchgeführt wurde), daß

$$I-X_{k+1}A=G_k^{-1}F_k G_k \tag{5}$$

gilt.

Falls X_k eine hinreichend gute Näherung für A^{-1} ist, so zeigt (3), daß D_k in der Nähe der Einheitsmatrix liegt, womit die Durchführbarkeit von (4) für solche Näherungen von A^{-1} gesichert ist. Bevor wir dies präzisieren und Kriterien für die Durchführbarkeit von (4) und für die Konvergenz $\lim X_k = A^{-1}$ beweisen, diskutieren wir zunächst einige Hilfsmittel.

3. Hilfssätze

Satz 1. *Für die $n\times n$ Matrix $A=(a_{ij})=L+D+U$ (D Diagonalanteil, L bzw. U unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonale stehender Anteil) sei D nichtsingulär. Es seien s_i, $i=1(1)n$, von Null verschiedene komplexe Zahlen und $S=\operatorname{diag}(s_i)$ die damit gebildete Diagonalmatrix.*

a) *Die reellen Zahlen p_i seien rekursiv definiert durch*

$$p_i = \frac{1}{|s_i|} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| p_j |s_j| + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |s_j| \right\}, \qquad i = 1(1)n,$$

und es sei

$$p = \max_{1 \le i \le n} p_i < 1.$$

Dann gilt für die mit Hilfe von S definierte Matrixnorm $\|\cdot\| := \|S^{-1} \cdot S\|_\infty$ von $(D + L)^{-1} U$ die Ungleichung

$$\|(D+L)^{-1} U\| = \|S^{-1}(D+L)^{-1} US\|_\infty \le p < 1.$$

b) *Die reellen Zahlen q_i seien rekursiv definiert durch*

$$q_i = \frac{1}{|s_i|} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |s_j| + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| q_j |s_j| \right\}, \qquad i = n(-1)1$$

und es sei

$$q = \max_{1 \le i \le n} q_i < 1.$$

Dann gilt für die mit Hilfe von S definierte Matrixnorm $\|\cdot\| := \|S^{-1} \cdot S\|_\infty$ die Ungleichung

$$\|(D+U)^{-1} L\| = \|S^{-1}(D+U)^{-1} LS\|_\infty \le q < 1. \quad \square$$

Der Beweis kann in Analogie zu Satz 10.3 in [2] geführt werden, wo a) im Spezialfall $S = I$ bewiesen wurde.

Ist $\|(D+L)^{-1} U\| < 1$ für eine Matrix $A = L + D + U$, so folgt daraus wegen $\rho((D+L)^{-1} U) \le \|(D+L)^{-1} U\| < 1$ die Konvergenz des zur Matrix A gehörigen Einzelschrittverfahrens. Wenn alle $p_i < 1$ sind, $i = 1(1)n$, so besagt also Teil a) von Satz 1, daß das Einzelschrittverfahren konvergiert. Diese im Falle $s_i = 1$, $i = 1(1)n$, aus dem Jahre 1951 stammende hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Einzelschrittverfahrens ist als *Sassenfeld-Kriterium* [5] bekannt. Aus der Ungleichung $\rho((D+L)^{-1} U) < 1$ folgt insbesondere, daß die Inverse von $I + (D+L)^{-1} U = (D+L)^{-1} A$ existiert, daß also A nichtsingulär ist. V.V. Gudkov [4] hat 1965 ein Kriterium für die Nichtsingularität einer Matrix angegeben, welches in das Sassenfeld-Kriterium übergeht, wenn man die dort definierte Größe R_i durch $R_i = p_i |a_{ii}|$ ersetzt.

Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Ungleichungen $p < 1$, $q < 1$ an.

Satz 2. *Die Matrix A besitze nichtverschwindende Diagonalelemente und für die Zahlen $s_i \neq 0$, $i = 1(1)n$, gelte*

$$r = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{1}{|s_i|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |s_j| \right\} < 1.$$

Dann gilt für die in Satz 1 definierten Größen

$$p \leqq r < 1, \qquad q \leqq r < 1. \quad \square$$

Der Beweis kann analog zu Satz 10.4 in [2] geführt werden.

4. Konvergenzaussagen

Satz 3. *Es sei $A=(a_{ij})$ nichtsingulär. Mit den gegebenen Zahlen $s_i \neq 0$, $i=1(1)n$, werde die Diagonalmatrix $S=\operatorname{diag}(s_i)$ gebildet. Für eine Näherung X_1 von A^{-1} gelte*

$$\|I-X_1 A\| := \|S^{-1}(I-X_1 A)S\|_\infty < 1.$$

Dann ist das Verfahren (4) beginnend mit X_1 durchführbar und es gilt $\lim X_k = A^{-1}$. Für die Folge der Residuen $I-X_k A$ gilt für die mit Hilfe von S definierte Matrixnorm $\|\cdot\| = \|S^{-1}\cdot S\|_\infty$

$$\|I-X_{k+1}A\| \leqq \|I-D_1^{-1}X_1 A\|^{2^k} \leqq \|I-X_1 A\|^{2^k}, \tag{6}$$

d.h. die Folge X_k konvergiert mindestens quadratisch gegen A^{-1}. Es gelten bei Verwendung der Norm $\|\cdot\| = \|S^{-1}\cdot S\|_\infty$ die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}\|A^{-1}-X_{k+1}\| &\leqq \frac{\|D_k^{-1}L_k\|\,\|D_k^{-1}U_k\|}{1-\|I-D_k^{-1}X_k A\|}\|X_{k+1}\| \leqq \frac{\|I-D_k^{-1}X_k A\|^2}{1-\|I-D_k^{-1}X_k A\|}\|X_{k+1}\| \\ &\leqq \frac{\|I-X_k A\|^2}{1-\|I-X_k A\|}\|X_{k+1}\|\end{aligned} \tag{7}$$

und falls $\|D_k^{-1}\|\,\|D_k - X_k A\| < 1$

$$\begin{aligned}\|A^{-1}-X_{k+1}\| &\leqq \frac{\|D_k^{-1}\|^2\,\|L_k\|\,\|U_k\|}{1-\|D_k^{-1}\|\,\|D_k-X_k A\|}\cdot\|X_{k+1}\| \\ &\leqq \frac{\|D_k^{-1}\|^2\,\|D_k-X_k A\|^2}{1-\|D_k^{-1}\|\,\|D_k-X_k A\|}\|X_{k+1}\|.\end{aligned} \tag{8}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst einige vorbereitende Aussagen.

1. Aus der Ungleichung

$$\|I-X_k A\| := \|S^{-1}(I-X_k A)S\|_\infty < 1$$

für ein $k \geqq 1$ folgt, daß die Diagonalelemente d_{ii}, $i=1(1)n$, von $X_k A$ von Null verschieden sind.

Bezeichnen nämlich $L_k=(l_{ij})$, $D_k=\operatorname{diag}(d_{ii})$, $U_k=(u_{ij})$ die in (3) definierten Matrizen, so ist die Ungleichung $\|S^{-1}(I-X_k A)S\|_\infty < 1$ äquivalent mit

$$|1-d_{ii}| + \frac{1}{|s_i|}\{\sum_{j\neq i}(|l_{ij}|\,|s_j| + |u_{ij}|\,|s_j|)\} < 1, \qquad i=1(1)n.$$

Ist nun $d_{ii}=0$ für ein i, so folgt für dieses i der Widerspruch

$$0 \leqq \frac{1}{|s_i|}\{\sum_{j\neq i}(|l_{ij}|\,|s_j|+|u_{ij}|\,|s_j|)\}<0.$$

(Die Abhängigkeit aller Matrizenelemente von k wird hier –, wie auch bei den nächsten beiden Aussagen – zur Vereinfachung der Schreibweise unterdrückt.)

2. Ist

$$\|I-X_k A\|:=\|S^{-1}(I-X_k A)S\|_\infty<1$$

für ein $k \geqq 1$, so folgt auch

$$\|I-D_k^{-1}X_k A\|:=\|S^{-1}D_k^{-1}(L_k+U_k)S\|_\infty<1.$$

Aus der Ungleichung $\|I-X_k A\|<1$ folgt nämlich für $i=1(1)n$

$$|1-d_{ii}|+\frac{1}{|s_i|}\{\sum_{j\neq i}(|l_{ij}|\,|s_j|+|u_{ij}|\,s_j|)\}<1$$

oder

$$\frac{1}{|s_i|}\{\sum_{j\neq i}(|l_{ij}|\,|s_j|+|u_{ij}|\,|s_j|)\}<1-|1-d_{ii}|\leqq|d_{ii}|,$$

und daraus

$$\frac{1}{|s_i|}\left\{\sum_{j\neq i}\left(\left|\frac{l_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|+\left|\frac{u_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|\right)\right\}<1, \qquad i=1(1)n.$$

Die letzten Ungleichungen sind äquivalent mit $\|I-D_k^{-1}X_k A\|<1$.

3. Aus $\|I-D_k^{-1}X_k A\|<1$ folgt

$$\|I-D_k^{-1}X_k A\|\leqq\|I-X_k A\|.$$

Ist nämlich $\|I-D_k^{-1}X_k A\|<1$, d.h.

$$\frac{1}{|s_i|}\left\{\sum_{j\neq i}\left(\left|\frac{l_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|+\left|\frac{u_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|\right)\right\}<1$$

für $i=1(1)n$, so folgt nach Multiplikation mit $|1-d_{ii}|$ und wegen $1-|d_{ii}|\leqq|1-d_{ii}|$

$$\frac{1}{|s_i|}\left\{\sum_{j\neq i}\left(\left|\frac{l_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|+\left|\frac{u_{ij}}{d_{ii}}\right||s_j|\right\}\leqq|1-d_{ii}|+\frac{1}{|s_i|}\{\sum_{j\neq i}(|l_{ij}|\,|s_j|+|u_{ij}|\,|s_j|)\}$$

oder

$$\|I-D_k^{-1}X_k A\|\leqq\|I-X_k A\|.$$

Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir nun die Aussagen des Satzes. Aus der Voraussetzung $\|I-X_1 A\|<1$ folgt – wie oben unter 1. gezeigt – daß D_1 nicht singulär ist. Damit läßt sich X_2 aus (4) berechnen. Da die Matrizen $D_1^{-1}L_1$ und $(I-D_1^{-1}L_1)^{-1}$ vertauschbar sind findet man nach (5) unter Verwendung der Definitionen von G_1 und F_1

$$\begin{aligned}I-X_2A&=G_1^{-1}F_1G_1\\&=(I-D_1^{-1}U_1)^{-1}(I-D_1^{-1}L_1)D_1^{-1}L_1D_1^{-1}U_1\\&=(I-D_1^{-1}U_1)^{-1}D_1^{-1}L_1(I-D_1^{-1}L_1)D_1^{-1}U_1.\end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung $\|I-X_1A\|<1$ folgt wie unter 2. gezeigt wurde $\|I-D_1^{-1}X_1A\|<1$. Nach Satz 2 und der unter 3. durchgeführten Vorüberlegung folgen daraus die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|(I-D_1^{-1}U_1)^{-1}D_1^{-1}L_1\|&\leqq\|I-D_1^{-1}X_1A\|\leqq\|I-X_1A\|,\\\|(I-D_1^{-1}L_1)^{-1}D_1^{-1}U_1\|&\leqq\|I-D_1^{-1}X_1A\|\leqq\|I-X_1A\|.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\|I-X_2A\|\leqq\|I-D_1^{-1}X_1A\|^2\leqq\|I-X_1A\|^2<1.$$

Damit sind für X_2 die gleichen Voraussetzungen erfüllt wie für X_1 und X_3 kann berechnet werden. Wie für X_2 erhält man

$$\|I-X_3A\|\leqq\|I-D_2^{-1}X_2A\|^2\leqq\|I-X_2A\|^2$$

und unter Berücksichtigung der für $\|I-X_2A\|$ bereits hergeleiteten Abschätzung

$$\|I-X_3A\|\leqq\|I-D_1^{-1}X_1A\|^{2^2}\leqq\|I-X_1A\|^{2^2}<1.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man jetzt allgemein für $k\geqq 1$

$$\|I-X_{k+1}A\|\leqq\|I-D_1^{-1}X_1A\|^{2^k}\leqq\|I-X_1A\|^{2^k}$$

woraus $\lim X_k=A^{-1}$ folgt. Die quadratische Konvergenz der Folge $\{X_k\}$ folgt unter Verwendung der oben für $k=1,2$ gezeigten und allgemein durch vollständige Induktion zu beweisenden Beziehung

$$\|I-X_{k+1}A\|\leqq\|I-X_kA\|^2$$

durch die folgenden Umformungen

$$\|A^{-1}-X_{k+1}\|=\|(I-X_{k+1}A)A^{-1}\|\leqq\|A^{-1}\|\,\|(A^{-1}-X_k)A\|^2\leqq\alpha\|A^{-1}-X_k\|^2$$

mit $\alpha=\|A^{-1}\|\,\|A\|^2$.

Schließlich bleiben noch die Fehlerabschätzungen zu beweisen. Unter Verwendung der Beziehung $D_k^{-1}X_kA=(I-F_k)G_k$ und der Definition von X_{k+1} kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}(A^{-1}-X_{k+1})-(I-D_k^{-1}X_kA)(A^{-1}-X_{k+1})&=D_k^{-1}X_kA(A^{-1}-X_{k+1})\\&=D_k^{-1}X_k-D_k^{-1}X_kAX_{k+1}\\&=D_k^{-1}X_k-(I-F_k)G_k\cdot G_k^{-1}D_k^{-1}X_k\\&=F_kD_k^{-1}X_k\\&=F_kG_kG_k^{-1}D_k^{-1}X_k\\&=D_k^{-1}L_kD_k^{-1}U_kX_{k+1}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|A^{-1}-X_{k+1}\| \leqq \frac{\|D_k^{-1}L_k\|\,\|D_k^{-1}U_k\|}{1-\|I-D_k^{-1}X_kA\|}\|X_{k+1}\|.$$

Da die verwendete Matrixnorm monoton ist (d.h. aus $|A|\leqq|B|$ folgt $\|A\|\leqq\|B\|$) und wegen

$$|D_k^{-1}L_k|\leqq|D_k^{-1}L_k+D_k^{-1}U_k|=|I-D_k^{-1}X_kA|,$$
$$|D_k^{-1}U_k|\leqq|D_k^{-1}L_k+D_k^{-1}U_k|=|I-D_k^{-1}X_kA|$$

folgt auch der zweite Teil von (7). Der dritte Teil von (7) folgt aufgrund der 3. Vorbemerkung.

Ist $\|D_k^{-1}\|\,\|D_k-X_kA\|<1$ so folgt analog

$$\|A^{-1}-X_{k+1}\| \leqq \frac{\|D_k^{-1}\|^2\,\|L_k\|\,\|U_k\|}{1-\|D_k^{-1}\|\,\|D_k-X_kA\|}\|X_{k+1}\|$$

und mit der gleichen Überlegung wie bei (7) der zweite Teil der Abschätzung (8). □

Im Anschluß an diesen Satz wollen wir noch zwei *Bemerkungen* anfügen.

1. Wie in Abschnitt 2 angegeben, konvergiert unter der Voraussetzung $\|I-X_1A\|<1$ auch das Schulzsche Verfahren (1) mit $Y_1:=X_1$ gegen A^{-1} und es gilt für die Residuen die Abschätzung (2)

$$\|I-Y_{k+1}A\|\leqq\|I-Y_1A\|^{2^k}=\|I-X_1A\|^{2^k}, \qquad k\geqq 1.$$

Ein Vergleich mit (6) zeigt, daß man bezüglich der Matrixnorm $\|\cdot\|:=\|S^{-1}\cdot S\|_\infty$ für die Residuen $I-X_{k+1}A$ der Evans-Iterierten eine Abschätzung hat, die nach oben durch die entsprechende Schranke der Residuen des Schulz-Verfahrens abgeschätzt werden kann. Da für eine hinreichend gute Näherung X_1 für A^{-1} die Matrix $I-X_1A$ dem starken Zeilensummenkriterium genügt, gilt $\|S^{-1}(I-X_1A)S\|_\infty<1$ für $S=I$. Daraus folgt, daß asymptotisch in der ∞-Norm die Residuen des Evans-Verfahrens mindestens genausogut wie die des Schulz-Verfahrens abgeschätzt werden können. In diesem Sinne konvergiert also das Evans-Verfahren asymptotisch mindestens genausogut wie das Schulz-Verfahren.

2. Die Voraussetzung $\|S^{-1}(I-X_1A)S\|_\infty<1$ kann erfüllt werden, falls $\rho(|I-X_1A|)<1$ erfüllt ist. Dies sieht man folgendermaßen ein: Wir setzen $R:=I-X_1A$ und betrachten zunächst den Fall, daß R irreduzibel ist. Dann besitzt $|R|$ aufgrund des Satzes von Perron und Frobenius (s. [7], Theorem 2.1) einen zum Spektralradius ρ gehörigen positiven Eigenvektor $x=(x_i)$. Aus der Eigenvektorgleichung $|R|\,x=\rho\,x$ folgt

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{|r_{ij}|\,x_j}{x_i}=\rho, \qquad i=1(1)n,$$

oder wegen $\rho<1$, mit $S=\operatorname{diag}(x_i)$,

$$\|S^{-1}(I-X_1A)S\|_\infty=\rho<1.$$

Ist R nicht irreduzibel, so kann man R so in $\tilde{R}$ abändern, daß

$$|\tilde{R}| \geqq |R| \geqq 0, \qquad |\tilde{R}| \text{ irreduzibel und } \rho \leqq \rho(|\tilde{R}|) = \tilde{\rho} < 1$$

gelten. Die Anwendung der obigen Überlegung für R angewandt auf $\tilde{R}$ ergibt

$$\|\tilde{S}^{-1}|\tilde{R}|\tilde{S}\|_\infty \leqq \tilde{\rho} < 1.$$

Berücksichtigt man noch, daß wegen $\tilde{S} \geqq 0$, $\tilde{S}^{-1} \geqq 0$

$$\tilde{S}^{-1}|R|\tilde{S} \leqq \tilde{S}^{-1}|\tilde{R}|\tilde{S}$$

gilt, so folgt

$$\|\tilde{S}^{-1}|R|\tilde{S}\|_\infty \leqq \|\tilde{S}^{-1}\tilde{R}\tilde{S}\|_\infty < 1,$$

woraus wegen

$$\|\tilde{S}^{-1}R\tilde{S}\|_\infty = \|\tilde{S}^{-1}|R|\tilde{S}\|_\infty$$

schließlich die Behauptung folgt.

Aufgrund von Lemma 2.3 in [7] gilt $\rho(I - X_1 A) \leqq \rho(|I - X_1 A|)$. Daher ist die in Satz 3 angegebene hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Evans-Verfahren stärker als die in Abschnitt 2 erwähnte notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Schulz-Verfahrens.

5. Monotonie

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß unter speziellen Voraussetzungen das Evans-Verfahren monoton gegen A^{-1} konvergiert. Wir verwenden dabei die elementweise Halbordnung in der Menge der reellen $n \times n$-Matrizen.

Satz 4. *$A = (a_{ij})$ sei eine M-Matrix (d.h. es ist A reell und $A^{-1} \geqq 0$ und $a_{ij} \leqq 0$, $i \neq j$). Ist dann $X_1 \geqq 0$ so gewählt, daß $I - X_1 A \geqq 0$ gilt und enthält X_1 nicht in einer ganzen Zeile nur Nullen, so ist das Evans-Verfahren durchführbar und es gilt $0 \leqq X_1 \leqq X_2 \leqq \ldots \leqq X_k \leqq X_{k+1} \leqq \ldots \leqq X^* \leqq A^{-1}$.*

Gilt darüber hinaus $\rho(I - X_1 A) < 1$, so gilt

$$\lim X_k = A^{-1}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unter der Voraussetzung $I - X_k A \geqq 0$ für ein $k \geqq 1$ folgt, daß für $D_k = \operatorname{diag}(d_{ii})$ gilt $0 < d_{ii} \leqq 1$. Dies ist folgendermaßen einzusehen: Wegen

$$I - X_k A = I - D_k + L_k + U_k \geqq 0$$

folgt

$$L_k \geqq 0, \qquad U_k \geqq 0, \qquad I \geqq D_k.$$

Daher gilt

$$X_k A = -L_k + D_k - U_k \leqq D_k$$

und wegen $A^{-1} \geqq 0$ and $X_k \leqq D_k A^{-1}$. Sei $A^{-1} = (b_{ij})$ und $X_k = (x_{ij})$. Für eine feste Zeile i, $1 \leqq i \leqq n$, gilt dann $x_{ij} \leqq d_{ii} b_{ij}$, $1 \leqq j \leqq n$. Da die $b_{ij} \geqq 0$ sind und n.V. $x_{ij} \geqq 0$ ist, folgt zunächst $d_{ii} \geqq 0$. Ist $d_{ii} = 0$, so folgt $x_{ij} = 0$ für $1 \leqq j \leqq n$, was im

Widerspruch zur Voraussetzung steht, daß nicht eine ganze Zeile von X_k verschwindet.

Wir betrachten nun das Verfahren von Evans (4),

$$X_{k+1} = G_k^{-1} D_k^{-1} X_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

mit

$$X_k A = D_k - L_k - U_k,$$
$$G_k = D_k^{-1}(D_k - L_k) D_k^{-1}(D_k - U_k),$$

und zeigen zunächst, daß unter den Voraussetzungen

$$I \geqq D_k \geqq 0, \quad L_k \geqq 0, \quad U_k \geqq 0, \quad X_k \geqq 0, \tag{9}$$

welche für $k = 1$ nach Voraussetzung gelten, die Ungleichung

$$X_{k+1} \geqq X_k$$

besteht. Es ist

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= G_k^{-1} D_k^{-1} X_k \\ &= (D_k - U_k)^{-1} D_k (D_k - L_k)^{-1} X_k \\ &= (I + D_k^{-1} U_k + \ldots + (D_k^{-1} U_k)^{n-1})(I + D_k^{-1} L_k + \ldots + (D_k^{-1} L_k)^{n-1}) D_k^{-1} X_k \\ &= D_k^{-1} X_k + \text{nichtnegative Terme} \\ &\geqq D_k^{-1} X_k \geqq X_k. \end{aligned}$$

Wir zeigen als nächstes $X_{k+1} \leqq A^{-1}$. Dazu genügt es wegen $A^{-1} \geqq 0$ nur zu bemerken, daß mit $(I - D_k^{-1} U_k)^{-1} \geqq 0$, $(I - D_k^{-1} L_k)^{-1} \geqq 0$ auch

$$I - X_{k+1} A = G_k^{-1} F_k G_k = (I - D_k^{-1} U_k)^{-1} (I - D_k^{-1} L_k)^{-1} D_k^{-1} L_k D_k^{-1} U_k \geqq 0$$

gilt. Da $X_{k+1} \geqq X_k$ ist, hat – falls dies für X_k der Fall war – auch X_{k+1} nicht in einer ganzen Zeil nur Nullen. Damit ist die Existenz und Monotonie der Folge $\{X_k\}$ sowie ihre Beschränktheit nach oben durch A^{-1} und damit die Konvergenz gegen einen Grenzwert $X^* \leqq A^{-1}$ nachgewiesen.

Die Konvergenz gegen A^{-1} unter der zusätzlichen Voraussetzung $\rho(I - X_1 A) < 1$ folgt wegen $I - X_1 A \geqq 0$ aus Satz 3 mit der im Anschluß an Satz 3 gemachten Bemerkung 2. □

Bei einer M-Matrix $A = (a_{ij})$ sind die Diagonalelemente notwendig positiv. Definieren wir

$$X_1 := \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right),$$

so gilt:

$X_1 \geqq 0$, $I - X_1 A \geqq 0$, X_1 *enthält nicht in einer ganzen Zeile nur Nullen und es ist* $\rho(I - X_1 A) < 1$.

Siehe etwa [7], Theorem 3.10. Daher sind mit dieser Wahl von X_1 alle Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt und die Evans-Iterierten konvergieren monoton wachsend gegen A^{-1}.

Wir bemerken noch, daß wir im Beweis des vorangehenden Satzes von der Voraussetzung, daß A eine M-Matrix ist, nur die Eigenschaft $A^{-1} \geqq 0$ verwendet haben. Es ist jedoch offensichtlich nichttrivial, allein unter dieser Voraussetzung ein X_1 zu finden, für welches die anderen Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

6. Numerische Beispiele

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.02 & -0.12 & -0.14 \\ -0.02 & 1 & -0.04 & -0.06 \\ -0.12 & -0.04 & 1 & -0.08 \\ -0.14 & -0.06 & -0.08 & 1 \end{bmatrix}$$

aus [3]. A ist streng diagonaldominant und es ist $a_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$. Daraus folgt $A^{-1} \geqq 0$, d.h. A ist eine M-Matrix. Mit $X_1 = I$ gilt

$$I - X_1 A \geqq 0, \qquad \rho(I - X_1 A) < 1,$$

so daß nach Satz 4 die Iterierten des Verfahrens (4) monoton wachsend gegen A^{-1} konvergieren. Das gleiche gilt nach [1] auch für die Iterierten des Schulz-Verfahrens (1). In den beiden folgenden Tabellen 1a bzw. 1b sind für die Iterierten Y_i bzw. X_i nach (1) bzw. (4) jeweils das Element in der 1. Zeile und 4. Spalte angegeben. Die nächste Spalte enthält jeweils den Fehler dieses Elementes und die letzte Spalte die ∞-Norm des Fehlers der Iterierten nach (1) bzw. (4). Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß (4) erheblich schneller als (1) konvergiert (die letzte Spalte könnte fast die Vermutung nahelagen, daß das Verfahren (4) kubisch konvergiert). Die Monotonie der angegebenen Folgen $x_{14}^{(i)}$ bzw. $y_{14}^{(i)}$ wird auch durch die numerischen Werte für die anderen Elemente der Iterierten bestätigt. Aus Platzgründen verzichten wir auf die explizite Auflistung dieser Elemente. Die Beispiele wurden auf der Rechenanlage CDC 6500 am Rechenzentrum der TU Berlin gerechnet (Mantissenlänge 48 Bit). Ich danke Herrn Erdmann für die Programmierung.

Tabelle 1a

i	$y_{14}^{(i)}$	Fehler von $y_{14}^{(i)}$	$\|A^{-1} - Y_i\|_\infty$
0	0	0.158811	0.37
1	0.140000	$0.188170_{10^{-1}}$	$0.93_{10^{-1}}$
2	0.157368	$0.144270_{10^{-2}}$	$0.56_{10^{-2}}$
3	0.158805	$0.605290_{10^{-5}}$	$0.21_{10^{-4}}$
4	0.158811	$0.863425_{10^{-10}}$	$0.29_{10^{-9}}$
5	0.158811	$0.888178_{10^{-15}}$	$0.18_{10^{-13}}$

Tabelle 1b

i	$x_{14}^{(i)}$	Fehler von $x_{14}^{(i)}$	$\|A^{-1}-X_i\|_\infty$
0	0	0.158811	0.37
1	0.150864	$0.794670_{10^{-2}}$	$0.74_{10^{-1}}$
2	0.158807	$0.376750_{10^{-5}}$	$0.69_{10^{-3}}$
3	0.158811	$0.266454_{10^{-14}}$	$0.49_{10^{-9}}$
4	0.158811	$0.888178_{10^{-15}}$	$0.17_{10^{-13}}$

Literatur

1. Albrecht, J.: Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schulz zur Matrixinversion. ZAMM, **41**, 262–263 (1961)
2. Brosowski, B., Kreß, R.: Einführung in die Numerische Mathematik. Hochschultaschenbücher, Bd. 202, Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut 1975
3. Evans, D.J.: An Implicit Matrix Inversion Process. SIGNUM Newsletter Volume 15, Number 3, 1980
   Evans, D.J.: An implicit iterative process for matrix inversion. Int. J. Comput. Math. **9**, 335–341 (1981)
4. Gudkov, V.V.: Über ein Kriterium der Nichtsingularität von Matrizen. (Russisch) Latvijas Mat. Ežegodnik, 385–390 (1965) (siehe auch Math. Review **33**, 1323)
5. Sassenfeld, H.M.: ZAMM, **31**, 92–94 (1951)
6. Schulz, G.: Iterative Berechnung der reziproken Matrix. ZAMM **13**, 57–59 (1933)
7. Varga, R.S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall Inc. 1962

Received July 15, 1981