Beiträge zur Numerischen Mathematik
8 (1980), 15–30

Monotone Regula-Falsi-ähnliche Verfahren bei nichtkonvexen Operatorgleichungen

Götz Alefeld

1. Einleitung

Bei der numerischen Auflösung von nichtlinearen Gleichungen ist die sogenannte *Globalisierung* heute ein wesentlicher Bestandteil der neueren Entwicklungen. Nach J. W. Schmidt [15] versteht man unter Globalisierung das Bestreben, ursprünglich nur lokal konvergente Verfahren so zu erweitern, daß alle oder möglichst viele Vektoren konvergente Folgen liefern, sofern sie als Startvektoren genommen werden.

Neben Abstiegsverfahren und Einbettungsverfahren können verschiedene Verfahren mit Monotonieeigenschaft in gewissem Sinne als globalisierte Verfahren angesehen werden, da es bei ihnen gewöhnlich nicht erforderlich ist, daß die Startvektoren hinreichend nahe an einer Lösung liegen. In der Vergangenheit wurde beispielsweise wiederholt das Problem betrachtet, in halbgeordneten Räumen Aussagen über die Monotonie von Folgen zu gewinnen, welche mit dem Newton-Verfahren oder mit den entsprechenden Übertragungen der Regula falsi berechnet werden. Siehe dazu insbesondere Baluev [4], Collatz [5], Hofmann [7], Ortega-Rheinboldt [11], Schmidt [14, 16] und Voss [20]. Zur Erzielung solcher Aussagen muß unter anderem gewöhnlich vorausgesetzt werden, daß die zu lösende Operatorgleichung konvex ist, oder es werden Voraussetzungen gemacht, aus denen die Konvexität folgt.

In [1] wurde für Gleichungssysteme im R^n gezeigt, daß durch intervallmäßige Auswertung der Fréchet-Ableitung das Newton-Verfahren so modifiert werden kann, daß man auch ohne Konvexität quadratisch konvergente monotone Folgen erhält. Diese Verfahren wurden kürzlich von Mönch [10] weiter modifiziert und bezüglich ihres Wirkungsgrades untersucht. Weitgehend ohne Konvexität kommt auch J. W. Schmidt in [16] aus.

In der hier vorliegenden Arbeit geben wir nun zur Berechnung einer Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ durch fortwährende monotone Einschließung ein quadratisch konvergentes Verfahren an, bei welchem in jedem Schritt ausschließlich Steigungen erster Ordnung, d. h. also nur Funktionswerte berechnet werden müssen. Sonst werden zur Durchführung des Iterationsverfahrens nur *feste* Schranken für die Steigungen zweiter Ordnung verwendet. Die gewöhnlich notwendige Konvexitätsvoraussetzung für den Operatior F kann dann wieder entfallen.

In Abschnitt 2 werden zunächst die benötigten Hilfsmittel bereitgestellt. Anschließend werden einige Sätze über das betrachtete Verfahren bewiesen. In Abschnitt 4 befinden sich numerische Beispiele. Die in dieser Arbeit durchgeführten Überlegungen ermöglichen eine Verallgemeinerung der von Voss [20] angegebenen Verfahren.

2. Hilfsmittel

Wir setzen im folgenden voraus, daß B ein reeller Banachraum ist, der durch einen regulären Kegel K halbgeordnet ist. K ist dabei eine abgeschlossene Teilmenge von B mit den Eigenschaften: $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$; $x, -x \in K \Rightarrow x = 0$; $\lambda \geqq 0$, $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K$. Durch „$x \leqq y \Leftrightarrow y - x \in K$“ wird dann eine mit der linearen Struktur von B verträgliche Halbordnung in B erklärt. K heißt regulär, wenn jede monoton wachsende (oder fallende) und in der Halbordnung beschränkte Folge konvergent ist. Ein regulärer Kegel ist normal, d. h., die Norm ist in dem Sinne monoton, daß aus $0 \leqq x \leqq y$ folgt $\|x\| \leqq \alpha \|y\|$ mit einer von x und y unabhängigen Konstanten α. Mit $[y, z]$ bezeichnen wir die Menge $\{x \mid y \leqq x \leqq z\} \subset B$. Ein Operator F von B nach B heißt isoton, wenn aus $x \leqq y$ folgt $Fx \leqq Fy$. In der Menge der stetigen linearen Operatoren von B nach B führen wir eine Halbordnung ein durch „$A_1 \leqq A_2 \Leftrightarrow (A_2 - A_1)\, x \geqq 0$ für alle $x \geqq 0$“. Ein linearer Operator G von B nach B heißt positiv, falls $G \geqq 0$ gilt. In der Menge der stetigen bilinearen Operatoren von $B \times B$ nach B führen wir eine Halbordnung ein durch „$M \leqq N \Leftrightarrow (N - M)\,(x, y) \geqq 0$ für alle $x, y \geqq 0$“. Ein bilinearer Operator H heißt positiv, wenn $H \geqq 0$ gilt. Ein Operator F von B nach B heißt invers isoton, wenn aus $Fx \leqq Fy$ folgt $x \leqq y$. Ein invers isotoner Operator ist injektiv.

Die hier aufgezählten Begriffe und Eigenschaften halbgeordneter linearer Räume findet man im wesentlichen bei KRASNOSELSKI [8]. Ein stetiger linearer Operator $\delta F(u, v)$ von B nach B heißt Steigung erster Ordnung des Operators F von $D \subset B$ nach B, wenn

$$F(u) - F(v) = \delta F(u, v)\,(u - v), \qquad u, v \in D, \tag{1}$$

gilt. Siehe SCHMIDT [13].

Wir fordern darüber hinaus das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) - \delta F(u, w) &= \delta^2 F(u, v, w)\,(v - w), \\ \delta F(u, w) - \delta F(v, w) &= \delta^2 F(u, v, w)^*\,(u - v). \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei seien die Steigungen zweiter Ordnung $\delta^2 F(u, v, w)$ und $\delta^2 F(u, v, w)^*$ bei festem u, v und w stetige bilineare Operatoren von $B \times B$ nach B.

Ein Operator F von $D \subset B$ nach B heißt konvex, wenn mit der Steigung $\delta F(u, v)$ für jedes $x \geqq 0$ auch $\delta F(u, v)\, x$ bezüglich u und v isoton ist. F heißt konkav, wenn $-F$ konvex ist. Siehe HOFMANN [7].

Wir benötigen die folgende bekannte Aussage von KANTOROWITSCH [9].

Lemma. *B sei durch einen regulären Kegel K halbgeordnet. H sei ein stetiger isotoner Operator von $[y, z] \subset B$ nach B. Es gelte $y \leqq H(y)$, $z \geqq H(z)$. Dann besitzt H einen Fixpunkt $x \in [y, z]$.* □

3. Verfahren und Sätze

Zur Auflösung der Gleichung $F(x) = 0$ betrachten wir die folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} &F(x_k) + \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\}\,(x_{k+1} - x_k) = 0\,, \\ &F(y_k) + \{\delta F(x_k, y_k) + R^*(y_k - x_k)\}\,(y_{k+1} - y_k) = 0\,, \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \ldots 2, \qquad \text{(V)}$$

Dabei seien R und R^* stetige bilineare Operatoren von $B \times B$ nach B.

Wir beweisen über das Verfahren (V) zunächst die folgenden Aussagen.

Satz 1. *Der Banachraum B besitze die im zweiten Abschnitt genannten Eigenschaften. F sei eine stetige Abbildung von $D = [x_0, y_0] \subset B$ nach B, die in D Steigungen besitzt, welche den Forderungen* (1) *und* (2) *genügen. Es gelte $F(x_0) \leqq 0$ und $F(y_0) \geqq 0$. Weiter seien zwei positive stetige bilineare Operatoren R und R^* von $B \times B$ nach B bekannt mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} &-R \leqq \delta^2 F(u, v, w)\,, \\ &\delta^2 F(u, v, w)^* \leqq R^* \end{aligned} \qquad (3)$$

für $u, v, w \in D$. Schließlich gebe es zwei stetige lineare Operatoren G_1 und G_2, die beide stetige positive Inverse G_1^{-1} und G_2^{-1} besitzen, und es gelte

$$\begin{aligned} &\delta F(u, v) + R(v - u) \leqq G_1\,, \\ &\delta F(u, v) + R^*(v - u) \leqq G_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

für $x_0 \leqq u \leqq v \leqq y_0$.

Dann gelten die folgenden Aussagen für das Verfahren (V):

1. (V) *ist durchführbar, d. h., die beiden Gleichungen besitzen für jedes $k \geqq 0$ Lösungen x_{k+1} und y_{k+1}.*

2. *Es existieren die Grenzwerte $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ und $\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$. x^* und y^* sind Nullstellen von F.*

3. *Es besteht die monotone Einschließung*

$$x_0 \leqq \cdots \leqq x_k \leqq x_{k+1} \leqq \cdots \leqq x^* \leqq z^* \leqq y^* \leqq \cdots \leqq y_{k+1} \leqq y_k \leqq \cdots \leqq y_0$$

für alle Lösungen z^* von $F(x) = 0$ im Intervall $[x_0, y_0]$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß F in $[x_0, y_0]$ eine Nullstelle z^* besitzt. Dazu betrachten wir den Operator T mit

$$T(z) = z - G_1^{-1} F(z)$$

auf dem Intervall $[x_0, y_0]$. T ist stetig. Es gilt

$$\begin{aligned} &T(x_0) = x_0 - G_1^{-1} F(x_0) \geqq x_0\,, \\ &T(y_0) = y_0 - G_1^{-1} F(y_0) \leqq y_0\,, \end{aligned}$$

sowie wegen (4) für $v \geqq u$

$$\begin{aligned} T(v) - T(u) &= G_1^{-1}\{F(u) - F(v) - G_1(u-v)\} \\ &= G_1^{-1}\{\delta F(u, v) - G_1\}\,(u-v) \geqq G_1^{-1}R(v-u)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

d. h., T ist isoton. Auf Grund des Lemmas aus Abschnitt 2 gibt es daher mindestens einen Fixpunkt z^* von T, d. h. mindestens eine Lösung z^* von $F(x) = 0$ im Intervall $[x_0, y_0]$.

Durch vollständige Induktion zeigen wir jetzt das Bestehen der Ungleichungen

$$\begin{aligned} &x_0 \leqq \cdots \leqq x_{k-1} \leqq x_k \leqq z^* \leqq y_k \leqq y_{k-1} \leqq \cdots \leqq y_0, \\ &F(x_k) \leqq 0 \leqq F(y_k) \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und jede Lösung z^* von $F(x) = 0$ im Intervall $[x_0, y_0]$. Für $k = 0$ gelten diese Ungleichungen nach Voraussetzung. Wir betrachten nun den Operator

$$H_1(z) = z - G_1^{-1}\big\{F(x_k) + \big(\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\big)\,(z - x_k)\big\}$$

auf dem Intervall $[x_k, z^*]$. H_1 ist stetig. Wegen

$$H_1(v) - H_1(u) = G_1^{-1}\{G_1 - \delta F(x_k, y_k) - R(y_k - x_k)\}\,(v-u) \geqq 0$$

für $v \geqq u$ ist H_1 isoton. Außerdem ist $H_1(x_k) = x_k - G_1^{-1}F(x_k) \geqq x_k$. Schließlich ergibt sich wegen (3)

$$-\delta^2 F(x_k, z^*, y_k)\,(y_k - z^*) \leqq R(y_k - z^*) \leqq R(y_k - x_k),$$

also $\delta^2 F(x_k, z^*, y_k)\,(z^* - y_k) - R(y_k - x_k) \leqq 0$ und damit

$$\begin{aligned} H_1(z^*) &= z^* - G_1^{-1}\big\{F(x_k) - F(z^*) - \big(\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\big)\,(x_k - z^*)\big\} \\ &= z^* - G_1^{-1}\{\delta F(x_k, z^*) - \delta F(x_k, y_k) - R(y_k - x_k)\}\,(x_k - z^*) \\ &= z^* - G_1^{-1}\{\delta^2 F(x_k, z^*, y_k)\,(z^* - y_k) - R(y_k - x_k)\}\,(x_k - z^*) \\ &\leqq z^*. \end{aligned}$$

Auf Grund des Lemmas aus Abschnitt 1 besitzt daher H_1 einen Fixpunkt $x_{k+1} = H_1(x_{k+1})$ im Intervall $[x_k, z^*]$, d. h., es gilt

$$F(x_k) + \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\}\,(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Wir zeigen, daß $F(x_{k+1}) \leqq 0$ gilt. Wegen (3) gilt zunächst

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \delta^2 F(x_k, y_k, x_{k+1})\,(y_k - x_{k+1}) + R(y_k - x_{k+1}) \\ &\leqq \delta^2 F(x_k, y_k, x_{k+1})\,(y_k - x_{k+1}) + R(y_k - x_k). \end{aligned}$$

Damit folgt durch Einsetzen der Iterationsvorschrift in

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) - \delta F(x_k, x_{k+1})\,(x_k - x_{k+1})$$

die Ungleichung

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= \{\delta F(x_k, y_k) - \delta F(x_k, x_{k+1}) + R(y_k - x_k)\} (x_k - x_{k+1}) \\ &= \{\delta^2 F(x_k, y_k, x_{k+1}) (y_k - x_{k+1}) + R(y_k - x_k)\} (x_k - x_{k+1}) \leqq 0 . \end{aligned}$$

Die Aussagen für die Folge $\{y_k\}$ werden weitgehend analog bewiesen. Dazu betrachtet man den Operator

$$H_2(z) = z - G_2^{-1}\Big\{F(y_k) + \big(\delta F(x_k, y_k) + R^*(y_k - x_k)\big) (z - y_k)\Big\}$$

auf dem Intervall $[z^*, y_k]$ und zeigt die Existenz eines Fixpunktes y_{k+1} im Intervall $[z^*, y_k]$. $F(y_{k+1}) \geqq 0$ folgt ähnlich wie $F(x_{k+1}) \leqq 0$.

Durch Grenzübergang $k \to \infty$ folgt auf Grund der Voraussetzungen über die Halbordnung

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \leqq z^* \leqq y^* = \lim_{k\to\infty} y_k$$

für jede Lösung z^* von $F(x) = 0$ im Intervall $[x_0, y_0]$. Es gilt nach (4)

$$0 \leqq -F(x_k) = \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\} (x_{k+1} - x_k) \leqq G_1(x_{k+1} - x_k)$$

und

$$0 \leqq F(y_k) = \{\delta F(x_k, y_k) + R^*(y_k - x_k)\} (y_k - y_{k+1}) \leqq G_2(y_k - y_{k+1}) .$$

Aus der Konvergenz der beiden Folgen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ folgt mit der Stetigkeit von F und den Voraussetzungen über die Halbordnung für $k \to \infty$ die Gleichheit $F(x^*) = F(y^*) = 0$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes nachgewiesen. □

Der nächste Satz gibt eine Bedingung dafür an, daß $x^* = y^*$ gilt.

Satz 2. *Neben den Voraussetzungen von Satz 1 sei mit einer linearen Abbildung S, die invers isoton ist, die Ungleichung*

$$S \leqq \delta F(u, v) \tag{5}$$

für $x_0 \leqq u \leqq v \leqq y_0$ erfüllt. Dann ist $x^* = y^*$ die einzige Nullstelle von F in $[x_0, y_0]$.

Beweis. Wegen $x^* \leqq y^*$ gilt

$$0 = F(x^*) - F(y^*) = \delta F(x^*, y^*) (x^* - y^*) \leqq S(x^* - y^*),$$

somit $y^* \leqq x^*$, also $x^* = y^*$. □

Die folgenden Aussagen zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen die Konvergenz des Verfahrens (V) asymptotisch quadratisch erfolgt.

Satz 3. *Es seien die Voraussetzungen der Sätze 1 und 2 erfüllt. Darüber hinaus sei S^{-1} stetig. Neben den Ungleichungen (3) mögen die Abschätzungen*

$$\left.\begin{aligned} &\delta^2 F(u, v, w) \leqq R_1 , \\ &-R_1^* \leqq \delta^2 F(u, v, w)^* \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

mit stetigen bilinearen Operatoren R_1 und R_1^* für $u, v, w \in [x_0, y_0]$ bestehen. Dann konvergieren die beiden Folgen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ quadratisch gegen $x^* = y^*$.

Beweis. Mit (5) folgt aus dem ersten Teil von (V) mit (3)

$$
\begin{aligned}
S(x^* - x_{k+1}) &\leqq \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\}\,(x^* - x_{k+1}) \\
&= F(x_k) - F(x^*) + \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\}\,(x^* - x_k) \\
&= \delta F(x_k, x^*)\,(x_k - x^*) + \{\delta F(x_k, y_k) + R(y_k - x_k)\}\,(x^* - x_k) \\
&= \{\delta F(x_k, y_k) - \delta F(x_k, x^*) + R(y_k - x_k)\}\,(x^* - x_k) \\
&= \{\delta F(x_k, y_k, x^*)\,(y_k - x^*) + R(y_k - x_k)\}\,(x^* - x_k) \\
&\leqq \{R_1(y_k - x^*) + R(y_k - x^*) + R(x^* - x_k)\}\,(x^* - x_k).
\end{aligned}
$$

Setzt man nun

$$r_k := \max\{\|x^* - x_k\|, \|x^* - y_k\|\},$$

so folgt mit der Monotonie der Norm

$$
\begin{aligned}
\|x^* - x_{k+1}\| &\leqq \alpha\,\|S^{-1}\| \cdot \{\|R_1\| \cdot \|y_k - x^*\| + \|R\| \cdot \|y_k - x^*\| + \|R\| \cdot \|x^* - x_k\|\} \\
&\qquad \times \|x^* - x_k\| \\
&\leqq \alpha\,\|S^{-1}\|\,\{\|R_1\| + 2\,\|R\|\}\,r_k^2.
\end{aligned}
$$

Vollständig analog folgt $\|y_{k+1} - x^*\| \leqq \alpha\,\|S^{-1}\|\,\{\|R_1{}^*\| + 2\,\|R^*\|\}\,r_k^2$, insgesamt also

$$r_{k+1} \leqq \gamma r_k^2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit

$$\gamma = \alpha\,\|S^{-1}\| \cdot \max\{\|R_1\| + 2\,\|R\|, \|R_1{}^*\| + 2\,\|R^*\|\}. \quad \square$$

Auf Grund der geforderten Regularität des Kegels K wird in Satz 1 z. B. der Banachraum $C[0, 1]$ der stetigen Funktionen mit der natürlichen Halbordnung ausgeschlossen. Verzichtet man auf die Forderung der Regularität des Kegels, so erhält man den folgenden Satz. Die Existenz einer Lösung kann man dabei allerdings mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln nicht beweisen. Sie muß auf anderem Wege nachgewiesen werden.

Satz 1*. *Der Banachraum B sei durch einen Kegel K halbgeordnet. F sei eine Abbildung von $D = [x_0, y_0] \subset B$ nach B, die in D Steigungen besitzt, welche den Forderungen* (1) *und* (2) *genügen. Es gelte $F(x_0) \leqq 0$ und $F(y_0) \geqq 0$. Weiter seien zwei positive stetige bilineare Operatoren R und R^* von $B \times B$ nach B bekannt mit den Eigenschaften* (3). *$\delta F(u, v) + R(v - u)$, $\delta F(u, v) + R^*(v - u)$ sowie $\delta F(u, v)$ seien für $x_0 \leqq u \leqq v \leqq y_0$ invers isoton. Außerdem seien $\delta F(u, v) + R(v - u)$ und $\delta F(u, v) + R^*(v - u)$ surjektiv. Dann gilt für die nach* (V) *berechneten Iterierten*

$$x_0 \leqq x_1 \leqq \cdots \leqq x_k \leqq x_{k+1} \leqq y_{k+1} \leqq y_k \leqq \cdots \leqq y_1 \leqq y_0. \quad \square$$

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir nur, daß die Ungleichungen $x_k \leqq x_{k+1}$ und $y_{k+1} \leqq y_k$ durch vollständige Induktion unmittelbar aus den Voraussetzungen folgen unter Verwendung von $F(x_k) \leqq 0 \leqq F(y_k)$, was man ebenfalls durch vollständige Induktion zeigt. Die Ungleichung $x_{k+1} \leqq y_{k+1}$ sieht man folgendermaßen ein: Subtraktion der beiden Gleichungen in (V) ergibt unter Verwendung der Definition der Steigung

$$\begin{aligned}&\delta F(x_k, y_k)\,(y_{k+1} - x_{k+1})\\ &= R(y_k - x_k)\,(x_{k+1} - x_k) - R^*(y_k - x_k)\,(y_{k+1} - y_k) \geqq 0\end{aligned}$$

und daraus wegen der inversen Isotonie von $\delta F(x_k, y_k)$ die Behauptung $y_{k+1} \geqq x_{k+1}$.

Falls unter den Voraussetzungen von Satz 1* die Existenz einer Lösung $z^* \in D = [x_0, y_0]$ bekannt ist, so schließen die Folgen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ diese ein. Denn aus

$$0 \leqq F(z^*) - F(x_k) = \delta F(z^*, x_k)\,(z^* - x_k)$$

folgt $x_k \leqq z^*$ und ähnlich $z^* \leqq y_k$. (Siehe dazu auch [1].)

Ein analoges Resultat wie in Satz 3 läßt sich unter den Voraussetzungen von Satz 1* beweisen.

Satz 3*. *Neben den in Satz 1* genannten Voraussetzungen sei B durch einen normalen Kegel K halbgeordnet, und es existiere ein linearer Operator S, der eine stetige positive Inverse besitzt. Es gelte $S \leqq \delta F(u, v)$ für $x_0 \leqq u \leqq v \leqq y_0$. Darüber hinaus möge (6) gelten. Falls die Folgen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ gegen eine gemeinsame Lösung x^* konvergieren, so erfolgt die Konvergenz quadratisch.* □

Der Beweis verläuft ähnlich wie in Satz 3.

4. Beispiele

1. Es sei B der Banachraum der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen, versehen mit der Maximumnorm und halbgeordnet durch den Kegel der auf $[0, 1]$ nichtnegativen Funktionen. Dieser Kegel ist normal. Es sei $x_0(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}t$, $y_0(t) = \frac{1}{4}$. Auf $D = [x_0, y_0]$ wird die nichtlineare Volterasche Integralgleichung

$$(Fx)\,(t) \equiv \frac{t}{8}\,x^2(t) + x(t) - \frac{t^2}{32} + \frac{7}{128} - \frac{1}{4} - \int_0^t (t - s)\,x^2(s)\,ds = 0,$$
$$0 \leqq s \leqq t \leqq 1,$$

betrachtet. Dann ist $F(x_0) \leqq 0 \leqq F(y_0)$. Setzt man

$$\big(\delta F(u, v)\,q\big)\,(t) = \left(\frac{t}{8}\,\big(u(t) + v(t)\big) + 1\right)q(t) - \int_0^t (t - s)\,\big(u(s) + v(s)\big)\,q(s)\,ds,$$

so gilt (1) für $\delta F(u, v)$. $\delta F(u, v)$ ist ein linearer stetiger Operator.

Wir zeigen als nächstes, daß F in D weder konvex noch konkav ist (siehe Abschnitt 2). Dazu genügt es, zwei Elemente v und w mit $v \geqq w$, $v, w \in D$, ein Element $u \in D$ sowie ein $q \geqq 0$ anzugeben, so daß weder $\delta F(u, v)\,q \geqq \delta F(u, w)\,q$ noch $\delta F(u, v)\,q \leqq \delta F(u, w)\,q$ gilt.

Wir setzen $v(t) = \frac{1}{4}$, $w(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\,t$, $q(t) = 1$. Dann gilt für beliebiges u

$$[\delta F(u, v) - \delta F(u, w)]\, q = \frac{t}{8}\,(v - w)\, q(t) - \int_0^t (t - s)\,(v - w)\, q(s)\, ds$$

$$= \frac{t^2}{16}\left(\frac{1}{8} - \frac{t}{6}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6\,144}, & t = \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{384}, & t = 1. \end{cases}$$

Setzt man

$$\delta^2 F(u, v, w)\,(p, q)\,(t) = \delta^2 F(u, v, w)^*\,(p, q)\,(t) = \frac{t}{8}\,p(t)\,q(t) - \int_0^t (t - s)\;p(s)\;q(s)\,ds,$$

so gilt (2). $\delta^2 F(u, v, w)$ ist ein stetiger bilinearer Operator. Setzt man

$$R(p, q)\,(t) = \int_0^t (t - s)\;p(s)\;q(s)\,ds,$$

$$R^*(p, q)\,(t) = \frac{t}{8}\;p(t)\,q(t),$$

so sind die Ungleichungen (3) erfüllt. Die bilinearen Operatoren R und R^* sind stetig.

Um Satz 1* anwenden zu können, müssen wir die inverse Isotonie von $\delta F(u, v)$, $\delta F(u, v) + R(v - u)$ und $\delta F(u, v) + R^*(v - u)$ sowie die Invertierbarkeit der letzten beiden Operatoren zeigen.

Wir zeigen zunächst die inverse Isotonie von $\delta F(u, v)$. Es sei

$$(\delta F(u, v)\; q)\;(t) = \left[\frac{t}{8}\,\big(u(t) + v(t)\big) + 1\right] q(t) - \int_0^t (t - s)\,\big(u(s) + v(s)\big)\; q(s)\; ds$$
$$=: h(t) \geqq 0$$

für $u, v \in D$. Dann folgt

$$q(t) = \int_0^t \frac{t - s}{\frac{t}{8}\,\big(u(t) + v(t)\big) + 1}\,\big(u(s) + v(s)\big)\; q(s)\; ds + \frac{h(t)}{\frac{t}{8}\,\big(u(t) + v(t)\big) + 1}.$$

Da der Kern und das konstante Glied dieser Integralgleichung nichtnegativ sind, folgt mit dem Startwert $q_0 = 0$ mit Hilfe des Picard-Iterationsverfahrens $q \geqq 0$. (Tatsächlich folgt die inverse Isotonie von $\delta F(u, v)$ zumindest für alle $u, v \geqq 0$. Dies wird unten verwendet.)

Analog folgt für

$$\left(\left\{\delta F(u, v) + R(v - u)\right\} q\right)(t) = \left(\frac{t}{8}\left(u(t) + v(t)\right) + 1\right) q(t) - 2\int_0^t (t - s)\, u(s)\, q(s)\, ds$$

und

$$\left(\left\{\delta F(u, v) + R^*(v - u)\right\} q\right)(t) = \left(\frac{t}{4} v(t) + 1\right) q(t) - \int_0^t (t - s)\left(u(s) + v(s)\right) q(s)\, ds$$

die inverse Isotonie und die Bijektivität. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 1* nachgewiesen. Die Durchführung des ersten Iterationsschrittes ergibt mit einem Reihenansatz im Intervall [0, 1] gleichmäßig konvergente alternierende Reihen $y_1(t)$ und $x_1(t)$ mit

$$y_1(t) \leqq \bar{y}_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} t + \frac{17}{256} t^2 - \frac{115}{12288} t^3 + \frac{241}{196608} t^4 - \frac{10559}{15728640} t^5 + \frac{92669}{754974720} t^6,$$

$$x_1(t) \geqq \bar{x}_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} t + \frac{17}{256} t^2 - \frac{121}{12288} t^3 + \frac{277}{65536} t^4 - \frac{1051}{1048576} t^5.$$

Es gilt $\|\bar{y}_1 - \bar{x}_1\| < 0.0004$ gegenüber $\|y_0 - x_0\| = 0.0625$. Um die Einschließung einer Lösung z^* der Gleichung $F(x) = 0$ durch x_1 und y_1 und damit durch x_0 und y_0 nachzuweisen, verwenden wir den Satz von Kantorowitsch in der in [12], Theorem 22.4, angegebenen Form.

Mit dem Startwert $y_0(t) = \frac{1}{4}$ für das Newton-Verfahren ergibt sich, daß in der Kugel

$$B' = \left\{x \mid \left\| x - \frac{1}{4} \right\| \leqq 0.027\right\}$$

eine Lösung z^* liegt. Setzt man $B'' = \left\{x \mid \left\| x - \frac{1}{4} \right\| \leqq \frac{1}{16}\right\}$, so gilt

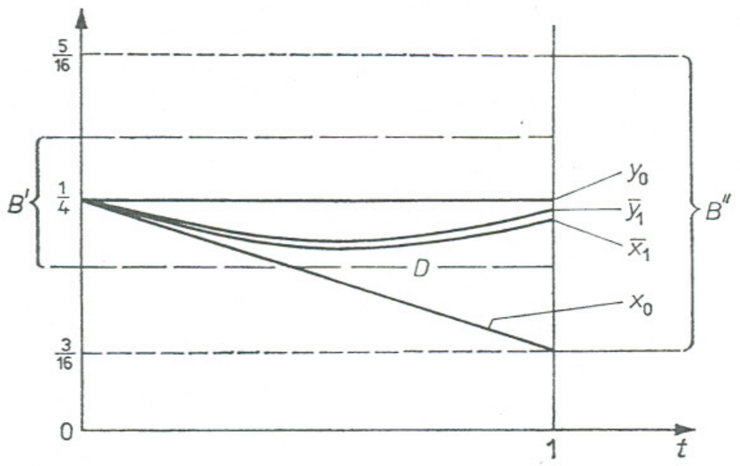
$$B' \subset B'', \qquad x_1, y_1, x_0, y_0 \in B''.$$

Außerdem ist $x \geqq 0$ für $x \in B''$. Da $\delta F(u, v)$ für $u, v \in B''$ invers isoton ist, folgt aus

$$0 \leqq F(z^*) - F(x_1) = \delta F(z^*, x_1)\,(z^* - x_1)$$

die Ungleichung $\bar{x}_1 \leqq x_1 \leqq z^*$ und entsprechend $z^* \leqq y_1 \leqq \bar{y}_1$.

In der Abbildung sind die Ergebnisse graphisch dargestellt.



2. Unter den gleichen Voraussetzungen wie im vorangehenden Beispiel betrachten wir die Fredholmsche Integralgleichung

$$(Fx)\,(t) = \frac{t}{2}\,x^2(t) + x(t) - \frac{1}{3} - \frac{t}{24} + \frac{251}{2304}\,t^2 - \frac{1}{288}\,t^3$$

$$- \frac{1}{4}\int\limits_0^t t(1-s)\,x^2(s)\,ds = 0\,.$$

Für $y_0(t) = \dfrac{1}{3}$, $x_0(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12}\,t$ gilt

$$F(x_0) \leqq 0 \leqq F(y_0)\,.$$

Setzt man

$$\big(\delta F(u, v)\,q\big)\,(t) = \left(\frac{t}{2}\,\big(u(t) + v(t)\big) + 1\right) q(t) - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 t(1-s)\,\big(u(s) + v(s)\big)\,q(s)\,ds\,,$$

so gilt (1) für den linearen stetigen Operator $\delta F(u, v)$. F ist in $D = [x_0, y_0]$ weder konvex noch konkav. Dazu zeigt man, daß für beliebiges $u \in D$ und $v = y_0$, $w = x_0$, $q = 1$ weder $\{\delta F(u, v) - \delta F(u, w)\}\,q \geqq 0$ noch $\leqq 0$ gilt.

Für die zweiten Steigungen nach (2) erhält man die stetigen bilinearen Operatoren

$$\delta^2 F(u, v, w)\,(p, q)\,(t) = \delta^2 F(u, v, w)^*\,(p, q)\,(t)$$

$$= \frac{t}{2}\,p(t)\,q(t) - \frac{1}{4}\int\limits_0^t t(1-s)\,p(s)\,q(s)\,ds\,.$$

Mit

$$R(p, q)(t) = \frac{1}{4} \int_0^1 t(1-s)\, p(s)\, q(s)\, ds,$$

$$R^*(p, q)(t) = \frac{t}{2}\, p(t)\, q(t)$$

ist (3) erfüllt.

Um Satz 1* anwenden zu können, muß die inverse Isotonie von $\delta F(u,v) + R(v-u)$, $\delta F(u, v) + R^*(v-u)$ und $\delta F(u, v)$ sowie die Surjektivität der ersten beiden Operatoren nachgewiesen werden. Dies bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten und soll hier nicht vorgeführt werden.

Die Durchführung des Iterationsverfahrens (V) führt hier auf lineare Fredholmsche Integralgleichungen mit Produktkern, deren Lösung man explizit angeben kann. Man erhält

$$y_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1 + \frac{t}{3}} \left\{ \frac{t^2}{288} \left(t - \frac{251}{8} \right) - 0.001176439\, t \right\},$$

$$x_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{t}{12} + \frac{t}{1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{24}} \left\{ 0.082089811 - \frac{187}{2304}\, t \right\}.$$

Es ist $\|y_1 - x_1\| < 0.005$ gegenüber $\|y_0 - x_0\| = \frac{1}{12} < 0.0834$. Mit Hilfe des Satzes von Kantorowitsch zeigt man wieder die Existenz einer Lösung z^* von $F(x) = 0$, die von y_1 und x_1 eingeschlossen wird. Es bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die Schranken y_1 und x_1 für z^* mit Verfahren (V) weiter zu verbessern.

3. Es sei B der n-dimensionale reelle Vektorraum mit der natürlichen Halbordnung. Der diese Halbordnung definierende Kegel ist regulär. Weiter sei $F: D \subset B \to B$ eine Abbildung mit $F(x) = (f_i(x))$. Nach J. W. Schmidt [13] führen wir eine Steigung $\delta F(u, v) = (\delta F(u, v)_{ik})$ ein durch

$$\delta F(u, v)_{i,k} = \delta f_i(v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n), \qquad i, k = 1(1)n,$$

mit

$$\delta f_i(v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{u_k - v_k} \{ f_i(v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k, \ldots, u_n) - f_i(v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) \}, & u_k \neq v_k, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_k} f_i(v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k, \ldots, u_n), & u_k = v_k, \end{cases}$$
$$i, k = 1(1)n$$

(dabei setzen wir voraus, daß die benötigten Ableitungen existieren). Für die so definierte Steigung gilt (2), wenn man $\delta^2F(u, v, w)$ und $\delta^2F(u, v, w)^*$ mit Hilfe der zweiten partiellen Differenzenquotienten definiert als

$$\delta^2F(u, v, w)_{jik} = \delta^2F(u, v, w)^*_{jki}$$
$$= \begin{cases} 0, & i < k, \\ \delta^2 f_j(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i v_i w_i, u_{i+1}, \ldots, u_n), & i = k, \\ \delta^2 f_j(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{i-1}, u_i v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n), & i > k. \end{cases}$$

(3) ist erfüllbar, falls die Elemente von $\delta^2F(u, v, w)$ (und damit auch die von $\delta^2F(u, v, w)^*$) im Intervall $[x_0, y_0]$ beschränkt sind. Dies ist z. B. der Fall, falls die zweiten partiellen Ableitungen der Komponenten von F auf dem Intervall $[x_0, y_0]$ existieren und beschränkt sind. Es gelte dort

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k} f_j \right| \leqq f_{jik}, \qquad j, i, k = 1(1)n.$$

Dann ist

$$|\delta^2 f_j(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i v_i w_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)| \leqq \frac{1}{2} f_{jii},$$

$$|\delta^2 f_j(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k w_k, v_{k+1}, \ldots, v_{i-1}, u_i v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)| \leqq f_{jik},$$
$$j, i, k = 1(1)n.$$

Somit ist mit $R = (r_{jik})$, $R^* = (r_{jki})$ und

$$r_{jik} = \begin{cases} 0, & i < k, \\ \dfrac{1}{2} f_{jii}, & i = k, \\ f_{jik}, & i > k \end{cases}$$

die Voraussetzung (3) erfüllt. Die zur Angabe von R und R^* benötigten Schranken für die Werte der zweiten partiellen Ableitungen kann man etwa durch intervallarithmetische Auswertung der zweiten partiellen Ableitungen der f_j, $j = 1(1)n$, auf dem Intervall $[x_0, y_0]$ gewinnen. Siehe dazu etwa [2], S. 28ff.

Der Nachweis von (4) und (5) muß im Einzelfall am konkreten System erbracht werden. Wir betrachten wie in [17] ein nichtlineares Gleichungssystem, welches durch Diskretisierung der Randwertaufgabe

$$x'' = g(t, x), \quad x(0) = a, \quad x(1) = b$$

durch ein Differenzenverfahren

$$x_0 = a, \qquad x_{m+1} = b$$
$$-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} + h^2\{\alpha g(t_{i-1}, x_{i-1}) + \beta g(t_i, x_i) + \gamma g(t_{i+1}, x_{i+1})\} = 0,$$
$$i = 1(1)m,$$

mit $(m+1)\,h = 1$, $t_i = ih$, $i = 1(1)\,m$, entsteht. Für $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ erhält man das gewöhnliche Differenzenverfahren, für $\alpha = \gamma = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{10}{12}$ das Mehrstellenverfahren (siehe [21]). Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g(t_1, x_1) \\ \vdots \\ g(t_m, x_m) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} a - \alpha h^2 g(0, a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b - \gamma h^2 g(1, b) \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

läßt sich dieses System in der Form

$$F(x) \equiv Ax + h^2 Bg(x) - c = 0$$

schreiben. Setzen wir $\delta g_i(u, v) = \dfrac{g(t_i, u_i) - g(t_i, v_i)}{u_i - v_i}$, $i = 1(1)\,m$, und führen wir die $m \times m$-Diagonalmatrix $\delta g(u, v) = \operatorname{diag}\big(g_i(u, v)\big)$ ein, so gilt

$$\delta F(u, v) = A + h^2 B\delta g(u, v).$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß $\dfrac{\partial}{\partial x} g(t, x) \geqq 0$ für $t \in [0, 1]$ gilt. Dann ist $\delta g(u, v) \geqq 0$, also

$$S := A \leqq \delta F(u, v) = A + h^2 B\delta g(u, v).$$

Da $A^{-1} \geqq 0$ ist, ist (5) erfüllt. Weiter ist

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) - \delta F(u, w) &= h^2 B\{\delta g(u, v) - \delta g(u, w)\} \\ &= h^2 B\delta^2 g(u, v, w)\,(v - w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta F(u, w) - \delta F(v, w) &= h^2 B\{\delta g(u, w) - \delta g(v, w)\} \\ &= h^2 B\delta^2 g(u, v, w)\,(u - v). \end{aligned}$$

Somit gilt $\delta^2 F(u, v, w) = \delta^2 F(u, v, w)^* = h^2 B\delta^2 g(u, v, w)$. Dabei ist $\delta^2 g(u, v, w)$ ein bilinearer Operator, dessen Elemente $\delta^2 g(u, v, w)_{jik}$ festgelegt sind durch

$$\delta^2 g(u, v, w)_{jik} = \begin{cases} \dfrac{\delta g_i(u, v) - \delta g_i(u, w)}{v_i - w_i}, & j = i = k, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die bilinearen Operatoren R und $R^* = R$, welche (3) genügen sollen, sind daher bekannt, falls die zweiten Differenzenquotienten bezüglich x_i von $g(t_i, x_i)$ abgeschätzt werden können. Diese Größen seien etwa dem Betrag nach alle durch $\varkappa$ beschränkt. Dann können wir sehen

$$Rx = R^*x = \varkappa h^2 B \begin{pmatrix} x^{\mathsf{T}} E_1 \\ \vdots \\ x^{\mathsf{T}} E_m \end{pmatrix} = \varkappa h^2 B \ \mathrm{diag}\,(x_i).$$

Dabei hat $E_j = (e_{jik})$ die Elemente

$$e_{jik} = \begin{cases} 1, & j = i = k, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) + R(v - u) &= \delta F(u, v) + R^*(v - u) \\ &= A + h^2 B \delta g(u, v) + \varkappa h^2 B \ \mathrm{diag}\,(v_i - u_i) \\ &= A + h^2 B \{\delta g(u, v) + \varkappa \ \mathrm{diag}\,(v_i - u_i)\} \\ &\leqq A + h^2 BD \quad \text{mit} \quad 0 \leqq D \leqq \sup_{x_0 \leqq u \leqq v \leqq y_0} \{\delta g(u, v) + \varkappa \ \mathrm{diag}\,(v_i - u_i)\}. \end{aligned}$$

Da A eine M-Matrix ist, ist beim Mehrstellenverfahren für genügend kleines h auch $G_1^{-1} := G_2^{-1} := (A + h^2 BD)^{-1} \geqq 0$ (siehe etwa [11, S. 54, Satz 2.4.10]). Beim gewöhnlichen Differenzenverfahren ist $B = I$. Damit ist nach [11, S. 55, Satz 2.4.11] unabhängig von h die Bedingung $G_1^{-1} = G_2^{-1} \geqq 0$ immer erfüllt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Randwertaufgabe

$$y'' = \sin y + y, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 1.$$

Die beiden folgenden Tabellen enthalten jeweils für $m = 5, 25, 51$ die Iterierten der Näherung für $y\left(\frac{1}{2}\right)$ nach (V), und zwar in der ersten Tabelle nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren und in der zweiten Tabelle nach dem Mehrstellenverfahren. Die Anfangsvektoren x_0 und y_0 wurden dabei nach 13.4.6(c) in [11, S. 460] bestimmt. Die Beispiele wurden auf der Rechenanlage UNIVAC 1108 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe in doppelter Genauigkeit (18 Dezimalstellen) gerechnet. Für das Rechnen der Beispiele danke ich den Herren WOLFGANG FÄNGER und KURT SPECK.

$y\left(\frac{1}{2}\right)$ *Gewöhnliches Differenzenverfahren*

k	$m = 5$	
0	-0.5	0.5
1	0.360 645 283 538	0.402 923 765 672
2	0.398 885 884 747	0.398 942 240 829
3	0.398 934 465 910	0.398 934 466 000

k	$m = 25$	
0	-0.5	0.5
1	0.355 399 899 875	0.402 973 993 568
2	0.398 620 471 733	0.398 697 839 309
3	0.398 688 025 395	0.398 688 025 577

k	$m = 51$	
0	-0.5	0.5
1	0.354 789 021 192	0.403 007 614 407
2	0.398 607 339 318	0.398 687 800 234
3	0.398 677 672 328	0.398 677 672 527

$y\left(\frac{1}{2}\right)$ *Mehrstellenverfahren*

k	$m = 5$	
0	$-0.497\,868\,667\,841$	0.497 868 667 841
1	0.361 126 440 271	0.402 480 615 387
2	0.398 631 359 739	0.398 683 324 424
3	0.398 676 314 342	0.398 676 314 416

k	$m = 25$	
0	$-0.499\,886\,497\,103$	0.499 886 497 103
1	0.355 428 602 839	0.402 949 294 801
2	0.398 606 945 394	0.398 683 988 327
3	0.398 674 228 163	0.398 674 228 343

k	$m = 51$	
0	$-0.499\,971\,624\,275$	0.499 971 624 275
1	0.354 796 291 218	0.403 001 410 127
2	0.398 603 959 884	0.398 684 336 537
3	0.398 674 222 506	0.398 674 222 705