Computing 21, 267—272 (1979)

Computing


# Zur Konvergenz des Iterationsverfahrens bei linearen Gleichungssystemen

**G. Alefeld,** Berlin

Eingegangen am 16. Januar 1978

**Zusammenfassung — Abstract**

**Zur Konvergenz des Iterationsverfahrens bei linearen Gleichungssystemen.** $A$, $M$ und $N$ seien reelle Matrizen und $A=M-N$. Es seien $M$ und $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ für ein $k\geqq 1$ nichtsingulär. Aus $M'y\geqq 0$ folge $[N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$. Dann folgt aus $[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$ die Ungleichung $[N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$ genau dann, wenn $\rho(M^{-1}N)<1$ ist. (Der Strich bedeutet Übergang zur transponierten Matrix.) Die gleichen Aussagen bestehen, falls $A$, $M$ und $N$ durch $A'$, $M'$ und $N'$ ersetzt werden. Diese Resultate sind Verallgemeinerungen von Ergebnissen, welche in [1] und [2] bewiesen wurden.

**On the Convergence of the Iteration Method for Systems of Simultaneous Linear Equations.** Let $A$, $M$, $N$ be real matrices, let $A=M-N$ and let $M$ and $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ for some integer $k\geqq 1$ be nonsingular. Let $M'y\geqq 0$ imply $[N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$ (where the prime denotes the transpose). Then $[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$ implies $[N(M^{-1}N)^{k-1}]'y\geqq 0$ if and only if the spectral radius $\rho(M^{-1}N)$ of $M^{-1}N$ is less than one. The same conclusions are true if $A$, $M$ and $N$ are replaced by $A'$, $M'$ and $N'$ respectively.

Betrachtet wird die Aufgabe, das lineare Gleichungssystem

$$A\,x=b$$

mit einer reellen quadratischen Matrix $A$ aufzulösen. Dazu wird die Matrix $A$ mit einer nichtsingulären Matrix $M$ zerlegt in $A=M-N$ und gemäß

$$x^{k+1}=M^{-1}N\,x^k+M^{-1}b,\ k=0,1,2,\ldots,x^0 \text{ beliebig,}$$

iteriert. Das Iterationsverfahren konvergiert genau dann für jeden Anfangsvektor, wenn $\rho(M^{-1}N)<1$ ist. ($\rho$ bezeichnet den Spektralradius.)

Es bezeichne $X'$ die aus der $n\times n$-Matrix $X$ gebildete transponierte Matrix. In der Menge der reellen Matrizen bzw. Vektoren wird die natürliche Halbordnung zugrunde gelegt. Wir beweisen in dieser Note den folgenden

**Satz 1:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Gilt*

$$M'y\geqq 0\Rightarrow[N(M^{-1}N)^{k-1})]'y\geqq 0,$$

0010-485X/79/0021/0267/$ 01.00

*so folgt*

$$([M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0) \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N)<1. \quad \blacksquare$$

Der Spezialfall $k=1$ dieses Satzes wurde in [1] und [2] bewiesen.

Als eine weitere Aussage erhalten wir

**Satz 1*:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. Es sei $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ nichtsingulär. Gilt*

$$M\,y\geqq 0 \Rightarrow N(M^{-1}N)^{k-1}\,y\geqq 0,$$

*so folgt*

$$([M-N(M^{-1}N)^{k-1}]\,y\geqq 0 \Rightarrow N(M^{-1}N)^{k-1}\,y\geqq 0) \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N)<1. \quad \blacksquare$$

Der *Beweis* von Satz 1* ergibt sich aus Satz 1, indem man dort $A$ durch $A'$, $M$ durch $M'$ und $N$ durch $N'$ ersetzt.

Wir führen den Beweis von Satz 1 auf mehrere Lemmata zurück, die nachfolgend angegeben werden.

**Lemma 1:** *Es seien $A$, $M$ und $N$ reelle quadratische Matrizen und $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Dann gilt*

$$(M'\,y\geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0) \Leftrightarrow (N(M^{-1}N)^{k-1}=M\,X,\ X\geqq 0)$$

*und*

$$([M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0) \Leftrightarrow$$
$$(N(M^{-1}N)^{k-1}=[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Y,\ Y\geqq 0).$$

*Beweis*: Wir beweisen die erste Äquivalenzrelation.

„$\Rightarrow$“: Wir wählen $z\geqq 0$. Dann gilt mit $y=(M')^{-1}z$ nach Voraussetzung

$$M'(M')^{-1}z=z\geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'(M')^{-1}z\geqq 0$$

d. h.

$$X'=[N(M^{-1}N)^{k-1}]'(M')^{-1}\geqq 0$$

oder

$$N(M^{-1}N)^{k-1}=M\,X \quad \text{mit} \quad X\geqq 0.$$

„$\Leftarrow$“: Gilt $N(M^{-1}N)^{k-1}=M\,X$ mit $X\geqq 0$, dann gilt

$$X'=[N(M^{-1}N)^{k-1}]'(M')^{-1}\geqq 0$$

und aus $M'\,y\geqq 0$ folgt

$$[N(M^{-1}N)^{k-1}]'(M')^{-1}M'\,y=[N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0.$$

Entsprechend beweist man die zweite Äquivalenzrelation. $\blacksquare$

In Lemma 1 wird nicht verwendet, daß die Differenz $M-N$ eine Zerlegung von $A$ ist. Setzen wir dies voraus, so erhalten wir das folgende

**Lemma 2:** *Es sei $A=M-N$ mit reellen quadratischen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Es gelte $N(M^{-1}N)^{k-1}=M\,X$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X\geqq 0$. Dann gilt*

$$\left(N(M^{-1}N)^{k-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Y \text{ mit } Y \geqq 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z \text{ mit } Z \geqq 0\right).$$

*Beweis*: „⇒“: Sei $N(M^{-1}N)^{k-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Y$ mit $Y \geqq 0$. Dann gilt

$$Y = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\,N(M^{-1}N)^{k-1} \geqq 0 \geqq -I, \text{ ($I$ Einheitsmatrix)}$$

oder

$$0 \leqq I + [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\,N(M^{-1}N)^{k-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\,M = Z,$$

also

$$M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z \text{ mit } Z \geqq 0.$$

„⇐“: Sei $M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z$ mit $Z \geqq 0$.

Dann folgt mit $N(M^{-1}N)^{k-1} = M\,X$ die Beziehung

$$N(M^{-1}N)^{k-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z\,X,$$

also

$$N(M^{-1}N)^{k-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Y$$

mit

$$Y = Z\,X \geqq 0 \text{ wegen } Z \geqq 0,\ X \geqq 0. \quad \blacksquare$$

Aufgrund von Lemma 1 und Lemma 2 sind die Aussagen von Satz 1 mit den folgenden Aussagen identisch:

**Satz 2:** *Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen quadratischen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k \geqq 1$ auch $M - N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Es gelte $N(M^{-1}N)^{k-1} = M\,X$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X \geqq 0$. Dann gilt*

$$\left(M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Z \geqq 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

*Beweis*: „⇒“: Es gelte

$$M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z \text{ mit } Z \geqq 0,$$

also

$$0 \leqq Z = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\,M = [I - (M^{-1}N)^k]^{-1}.$$

Wegen $N(M^{-1}N)^{k-1} = M\,X$ mit $X \geqq 0$ ist $(M^{-1}N)^k \geqq 0$, so daß nach Satz 2.4.5 in [3] $\rho\left((M^{-1}N)^k\right) < 1$, also auch $\rho(M^{-1}N) < 1$ folgt.

„⇐“: Ist umgekehrt $\rho(M^{-1}N) < 1$, so gilt auch $\rho\left((M^{-1}N)^k\right) < 1$ und wegen $(M^{-1}N)^k \geqq 0$ existiert aufgrund der gleichen Quelle $[I - (M^{-1}N)^k]^{-1}$ und es ist

$$0 \leqq [I - (M^{-1}N)^k]^{-1} = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\,M,$$

also gilt

$$M = [M - N(M^{-1}N)^{k-1}]\,Z \text{ mit } Z \geqq 0. \quad \blacksquare$$

Wir wollen an einem einfachen Beispiel demonstrieren, daß die Voraussetzungen von Satz 2 für ein $k > 1$ erfüllt sein können, wenn dies für $k = 1$ nicht der Fall ist.

Dazu betrachten wir die Matrix

$$A=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 5 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und zerlegen $A$ in $A=M-N$ mit

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

$A$ und $M$ sind nichtsingulär und es gilt $N=MX$ mit der Matrix

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

$X$ genügt nicht den Voraussetzungen von Satz 2, so daß dieser Satz für $k=1$ nicht anwendbar ist.

Wir zeigen, daß die Voraussetzungen für $k=4$ erfüllt sind: Es ist

$$M-N(M^{-1}N)^3=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

nichtsingulär und es gilt $N(M^{-1}N)^3=M\tilde{X}$ mit der nichtnegativen Matrix

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt $M=[M-N(M^{-1}N)^3]\,Z$ mit der nichtnegativen Matrix

$$Z=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

so daß mit Satz 4 $\rho(M^{-1}N)<1$ gefolgert werden kann[1].

Eine entsprechende Umformulierung von Satz 1* wie die von Satz 1 durch Satz 2 ist

**Satz 2*:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen quadratischen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-(NM^{-1})^{k-1}N$ seien nichtsingulär. Es gelte $(NM^{-1})^{k-1}N=XM$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X\geqq 0$. Dann gilt*

$$\left(M=Z\,[M-(NM^{-1})^{k-1}N] \text{ mit einer quadratischen Matrix } Z\geqq 0\right)$$
$$\Leftrightarrow \rho(M^{-1}N)<1. \quad \blacksquare$$

Der *Beweis* von Satz 2* ergibt sich aus Satz 2, indem man dort $A$ durch $A'$, $M$ durch $M'$ und $N$ durch $N'$ ersetzt.

Als Anwendung von Satz 1 (und damit von Satz 2) beweisen wir das folgende

**Korollar 1:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k\geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Es sei $M^{-1}\geqq 0$ und $N(M^{-1}N)^{k-1}\geqq 0$. Gilt dann $[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}\geqq 0$ so folgt $\rho(M^{-1}N)<1$.*

*Beweis*: Nach Voraussetzung gilt $(M')^{-1}\geqq 0$. Gilt daher $M'y\geqq 0$ so folgt $y\geqq 0$. Damit gilt wegen $N(M^{-1}N)^{k-1}\geqq 0$

$$M'y\geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'\,y\geqq 0.$$

---

[1] Für die Kontrolle dieses Beispiels danke ich Herrn Dipl.-Math. H. Schwandt.

Weiter gilt nach Voraussetzung $[[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]']^{-1} \geqq 0$. Gilt daher $[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'y \geqq 0$, so folgt $y \geqq 0$. Damit gilt wegen $N(M^{-1}N)^{k-1} \geqq 0$

$$[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]'y \geqq 0 \Rightarrow [N(M^{-1}N)^{k-1}]'y \geqq 0.$$

Nach Satz 1 folgt jetzt unmittelbar $\rho(M^{-1}N)<1$. ∎

Für $k=1$ ist der Inhalt von Korollar 1 mit dem von R. S. Varga in [4], Seite 89 angegebenen Theorem 3.13 über reguläre Zerlegungen von Matrizen identisch.

Durch Anwendung von Satz 1* (und damit von Satz 2*) erhält man entsprechend

**Korollar 2:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k \geqq 1$ auch $M-(NM^{-1})^{k-1}N$ seien nichtsingulär. Es sei $M^{-1} \geqq 0$ und $(NM^{-1})^{k-1}N \geqq 0$. Gilt dann $[M-(NM^{-1})^{k-1}N]^{-1} \geqq 0$, so folgt $\rho(M^{-1}N)<1$.* ∎

Der Beweis ergibt sich ähnlich wie in Korollar 1 durch Anwendung von Satz 1*.

Als eine Anwendung von Korollar 1 beweisen wir das folgende

**Korollar 3:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k \geqq 1$ auch $M-N(M^{-1}N)^{k-1}$ seien nichtsingulär. Es sei $M^{-1} \geqq 0$ und $(M^{-1}N)^k \geqq 0$. Gilt dann $[M-N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1} \geqq 0$, so folgt $\rho(M^{-1}N)<1$.*

*Beweis*: Wir betrachten die Matrix

$$\tilde{A}=I-(M^{-1}N)^k$$

und setzen $\tilde{M}=I$, $\tilde{N}=(M^{-1}N)^k$, $\tilde{k}=1$.

Es gilt $\tilde{M}^{-1} \geqq 0$, $\tilde{N}(\tilde{M}^{-1}\tilde{N})^{k-1}=\tilde{N} \geqq 0$ und

$$0 \leqq [M-N(M^{-1}N)^{k-1}]^{-1}M^{-1}=[I-(M^{-1}N)^k]^{-1}=[\tilde{M}-\tilde{N}(\tilde{M}^{-1}\tilde{N})^{k-1}]^{-1}.$$

Nach Korollar 1 folgt jetzt $\rho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N})=\rho((M^{-1}N)^k)<1$, also $\rho(M^{-1}N)<1$. ∎

Für $k=1$ findet man Korollar 3 unter der zusätzlichen Voraussetzung $NM^{-1} \geqq 0$ (siehe Korollar 4) in [3], Seite 56, Theorem 2.4.17.

Ähnlich erhält man aus Korollar 2

**Korollar 4:** *Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von $A$ mit reellen Matrizen $M$ und $N$. $M$ sowie für ein $k \geqq 1$ auch $M-(NM^{-1})^{k-1}N$ seien nichtsingulär. Es sei $M^{-1} \geqq 0$ und $(NM^{-1})^k \geqq 0$. Gilt dann $[M-(NM^{-1})^{k-1}N]^{-1} \geqq 0$, so folgt $\rho(M^{-1}N)<1$.*

Der Beweis ergibt sich ähnlich wie in Korollar 3. ∎

**Literatur**

[1] Alefeld, G.: Über konvergente Zerlegungen von Matrizen. Numer. Math. *20*, 312—356 (1973).
[2] Mangasarian, O. L.: A convergent splitting of matrices. Numer. Math. *15*, 351—353 (1970).
[3] Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York-London: Academic Press 1970.
[4] Varga, R.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1962.

Prof. Dr. G. Alefeld
Fachbereich 3/Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12

Printed in Austria
Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien