Computing, Suppl. 1, 15—19 (1977)

Über die Durchführbarkeit des Gaußschen Algorithmus bei Gleichungen mit Intervallen als Koeffizienten

G. Alefeld, Karlsruhe

Zusammenfassung

Ist für eine Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ und einen Intervallvektor $\mathfrak{b}$ der Gaußsche Algorithmus durchführbar, so liefert er einen Intervallvektor $\mathfrak{x}$ mit der Eigenschaft $\{\underset{\cdot}{\mathfrak{x}} \mid \underset{\cdot}{\mathfrak{A}}\, \underset{\cdot}{\mathfrak{x}} = \underset{\cdot}{\mathfrak{b}},\ \underset{\cdot}{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A},\ \underset{\cdot}{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{x}$. In dieser Arbeit wird eine Klasse von Intervallmatrizen angegeben, für die der Gaußsche Algorithmus stets (ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung) durchführbar ist. Die angegebenen Aussagen sind Verallgemeinerungen von Resultaten aus [1].

1.

Gegeben sei eine Intervallmatrix $\mathfrak{A} = (A_{ij})$ und ein Intervallvektor $\mathfrak{b} = (B_i)$. Bei der Anwendung der Formeln des Gaußschen Algorithmus (siehe etwa [1], Seite 218 ff.) wird in einem ersten Schritt aus der Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ und dem Intervallvektor $\mathfrak{b}$ unter der Voraussetzung $0 \notin A_{11}$ eine neue Intervallmatrix $\mathfrak{A}' = (A'_{ij})$ und ein Intervallvektor $\mathfrak{b}' = (B'_i)$ berechnet nach der Vorschrift

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad A'_{1j} = A_{1j},\ 1 \leqq j \leqq n,\ B'_1 = B_1\\
&\text{(b)}\quad A'_{ij} = A_{ij} - A_{1j}\,\frac{A_{i1}}{A_{11}},\ 2 \leqq i, j \leqq n\\
&\text{(c)}\quad B'_i = B_i - B_1\,\frac{A_{i1}}{A_{11}}, \qquad 2 \leqq i \leqq n\\
&\text{(d)}\quad A'_{i1} = 0, \qquad\qquad 2 \leqq i \leqq n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Durch $(n-1)$ malige Anwendung dieser Formeln auf Intervallmatrizen mit immer kleiner werdender Ordnung erhält man schließlich eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{A}_{ij})$ und einen Intervallvektor $\tilde{\mathfrak{b}} = (\tilde{B}_i)$, aus denen mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned}
X_n &= \tilde{B}_n / \tilde{A}_{nn},\\
X_i &= \left(\tilde{B}_i - \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{A}_{ij} X_j\right) \Big/ \tilde{A}_{ii},\ 1 \leqq i \leqq n-1,
\end{aligned} \tag{2}$$

ein Intervallvektor $\mathfrak{x} = (X_i)$ berechnet wird, für welchen gilt

$$\{\underset{\cdot}{\mathfrak{x}} \mid \underset{\cdot}{\mathfrak{A}}\, \underset{\cdot}{\mathfrak{x}} = \underset{\cdot}{\mathfrak{b}},\ \underset{\cdot}{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A},\ \underset{\cdot}{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{x}.$$

Falls $\mathfrak{B}$ eine M-Matrix ist, so ist der Gaußsche Algorithmus mit der Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ durchführbar und zwar ohne Zeilen- und Spaltenvertauschungen.

Beweis: Da $\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung eine M-Matrix ist, gibt es einen reellen Vektor $\mathfrak{u}=(u_i)$ mit positiven Komponenten, so daß $\mathfrak{B}\,\mathfrak{u}>\mathfrak{o}$, d. h.

$$(|a_{ii}|-|r_{ii}|)\,u_i>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|A_{ij}|\,u_j,\quad 1\leqq i\leqq n$$

gilt. Außerdem ist wegen $|a_{11}|-r_{11}>0$ die Bedingung $0\notin A_{11}$ erfüllt und die Formeln (1) sind anwendbar.

Wir zeigen nun, daß für die durch die Formeln (1) (b) festgelegte $(n-1)\times(n-1)$ Intervallmatrix $\tilde{\mathfrak{A}}'=(\tilde{A}'_{ij})$ mit $\tilde{A}'_{ij}=A'_{ij}=\langle a'_{ij}, r'_{ij}\rangle$, $2\leqq i,j\leqq n$, die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, womit die Behauptung dieses Satzes durch vollständige Induktion bewiesen ist.

Für $i\geqq 2$ gilt unter Verwendung von (1)

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A'_{ij}|\,u_j=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}\left|A_{ij}-A_{1j}\frac{A_{i1}}{A_{11}}\right|u_j$$

$$\leqq\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A_{ij}|\,u_j+|A_{i1}|\left|\frac{1}{A_{11}}\right|\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A_{1j}|\,u_j.$$

Wegen

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A_{1j}|\,u_j<(|a_{11}|-r_{11})\,u_1-|A_{1i}|\,u_i,$$

was nach Voraussetzung gilt, kann dies weiter abgeschätzt werden durch

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A'_{ij}|\,u_j\leqq$$

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|A_{ij}|\,u_j+|A_{i1}|\,\frac{1}{|a_{11}|-r_{11}}\,\{(|a_{11}|-r_{11})\,u_1-|A_{1i}|\,u_i\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\,u_j-\frac{|A_{i1}|\,|A_{1i}|}{|a_{11}|-r_{11}}\,u_i$$

$$<u_i\left(|a_{ii}|-r_{ii}-\frac{|A_{i1}|\,|A_{1i}|}{|a_{11}|-r_{11}}\right)$$

$$\leqq(|a'_{ii}|-r'_{ii})\,u_i.$$

Das letzte $\leqq$-Zeichen gilt dabei aufgrund von Lemma 1 in [1], Seite 224.

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Bemerkungen

1. Kann man im Beweis des Satzes $\mathfrak{u}=(u_i)$ mit $u_i=1$, $1 \leqq i \leqq n$, wählen, so ist die Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ streng diagonaldominant im Sinne von Definition 2 in [1], Seite 225, und das hier bewiesene Resultat ist mit Satz 3 in [1], Seite 226, identisch.

2. Sind die Elemente der Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ reelle Intervalle und ist jede Punktmatrix $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}$ selbst eine M-Matrix, so sind die Voraussetzungen des obigen Satzes trivialerweise stets erfüllt. Die Durchführbarkeit des Gaußschen Algorithmus wurde für diesen Sonderfall in etwas anderem Zusammenhange bereits in [2] nachgewiesen.

3. Gegeben sei ein Intervallgleichungssystem in iterationsfähiger Gestalt,

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{C}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{c},$$

mit einer Intervallmatrix $\mathfrak{C}=(C_{ij})$, $C_{ij}=\langle c_{ij}, r_{ij}\rangle$, $1 \leqq i,j \leqq n$ und einem Intervallvektor $\mathfrak{c}$.

Das Verfahren

$$\mathfrak{x}^{k+1}=\mathfrak{C}\,\mathfrak{x}^k+\mathfrak{c}, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

konvergiert bekanntlich genau dann für jeden Intervallvektor $\mathfrak{x}^0$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$ der Gleichung $\mathfrak{x}=\mathfrak{C}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{c}$, wenn der Spektralradius ρ der reellen Matrix $|\mathfrak{C}|=(|C_{ij}|)$ kleiner als 1 ist. (Siehe etwa [1], Satz 1, Seite 178.) Wir wollen zeigen, daß in diesem Falle auch *stets* die Voraussetzungen des obigen Satzes für die Matrix $\mathfrak{A}=\mathfrak{E}-\mathfrak{C}=(A_{ij})$ erfüllt sind ($\mathfrak{E}$ Einheitsmatrix).

Es gilt

$$A_{ij}=\begin{cases} \langle 1-c_{ii}, r_{ii}\rangle & i=j \\ -C_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus $\rho(|\mathfrak{C}|)<1$ folgt notwendig $|C_{ii}|=|c_{ii}|+r_{ii}<1$, $1 \leqq i \leqq n$.

Die in obigem Satz definierte, zu $\mathfrak{A}=\mathfrak{E}-\mathfrak{C}$ gehörige Matrix $\mathfrak{B}=(b_{ij})$ besitzt die Elemente

$$b_{ij}=\begin{cases} |1-c_{ii}|-r_{ii}, & i=j, \\ -|C_{ij}| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten nun die reelle Matrix $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{E}-|\mathfrak{C}|$. Wegen $\rho(|\mathfrak{C}|)<1$ existiert nach Theorem 3.8 in [8] die Inverse von $\mathfrak{B}_1$ und es gilt $\mathfrak{B}_1^{-1} \geqq \mathfrak{O}$.

Wir betrachten weiter die Zerlegung $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{M}_1-\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{B}_1$ mit

$$\mathfrak{M}_1=\operatorname{diag}(1-|C_{ii}|),$$
$$\mathfrak{N}_1=-(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{M}_1)=\mathfrak{M}_1-\mathfrak{B}_1.$$

Es ist $\mathfrak{M}_1^{-1} \geqq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{N}_1 \geqq \mathfrak{O}$. Daher folgt $\rho(\mathfrak{M}_1^{-1}\mathfrak{N}_1)<1$ nach Theorem 3.13 in [8].

Wir betrachten schließlich die Zerlegung $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{B}$ mit

$$\mathfrak{M} = \operatorname{diag}\left(|1 - c_{ii}| - r_{ii}\right),$$

$$\mathfrak{N} = -(\mathfrak{B} - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M} - \mathfrak{B}.$$

Es gilt

$$|1 - c_{ii}| - r_{ii} \geqq 1 - |c_{ii}| - r_{ii} = 1 - |C_{ii}| > 0, \; 1 \leqq i \leqq n,$$

und daher

$$\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{M}_1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{M}_1^{-1} \geqq \mathfrak{M}^{-1}.$$

Wegen $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1$ folgt somit $\mathfrak{M}^{-1}\,\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{M}_1^{-1}\,\mathfrak{N}_1$.

Aufgrund des Satzes von Perron-Frobenius ([8], Theorem 2.7) folgt jetzt $\rho\,(\mathfrak{M}^{-1}\,\mathfrak{N}) \leqq \rho\,(\mathfrak{M}_1^{-1}\,\mathfrak{N}_1)$, also $\rho\,(\mathfrak{M}^{-1}\,\mathfrak{N}) < 1$. Theorem 3.10 in [8] liefert nun die Behauptung, daß $\mathfrak{B}$ eine M-Matrix ist.

Literatur

[1] Alefeld, G., Herzberger, J.: Einführung in die Intervallrechnung. Mannheim: Bibliographisches Institut 1974.

[2] Barth, W., Nuding, E.: Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen. Computing *12*, 117—125 (1974).

[3] Fan, K.: Topological proof for certain theorems on matrices with nonnegative elements. Monatsh. Math. *62*, 219—237 (1958).

[4] Hansen, E. R.: Interval arithmetic in matrix computations, Part I. SIAM J. Numer. Anal. *2*, 308—320 (1965).

[5] Hansen, E. R., Smith, R.: Interval arithmetic in matrix computations, Part II. SIAM J. Numer. Anal. *4*, 1—9 (1967).

[6] Hebgen, M.: Eine scaling-invariante Pivotsuche für Intervallmatrizen. Computing *12*, 99—106 (1974).

[7] Ostrowski, A. M.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. *10*, 69—96 (1937).

[8] Varga, R. S.: Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1962.

[9] Wilkinson, J. H.: Error analysis of direct methods of matrix inversion. J. A.C.M. *8*, 281—330 (1961).

Prof. Dr. G. Alefeld
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin

Printed in Austria

Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien