Numer. Math. 26, 409—419 (1976)

Zur Konvergenz des Peaceman-Rachford-Verfahrens

G. Alefeld

Received November 13, 1975

On the Convergence of the Peaceman-Rachford Iterative Method

Summary. In this paper we prove some results concerning the convergence of the Peaceman-Rachford iterative method. The main result covers both the stationary and the instationary case. No use is made of the so called commutativity condition which often was used in the literature in the instationary case. In proving the results of this paper it is made use of the theory of regular splittings which was introduced by R.S. Varga. Finally it is demonstrated how the results can be applied to discrete versions of elliptic boundary value problems.

1.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$A x = b.$$

Die Matrix A sei zerlegt in die Summe

$$A = H + V$$

zweier Matrizen H und V. Zur Auflösung des gegebenen Gleichungssystems betrachten wir das Verfahren

$$\begin{aligned} x_{k+\frac{1}{2}} &= (H + r_k I)^{-1} (r_k I - V)\, x_k + (H + r_k I)^{-1} b, \\ x_{k+1} &= (V + r_k I^{-1} (r_k I - H)\, x_{k+\frac{1}{2}} + (V + r_k I)^{-1} b, \\ &(r_k > 0,\ I \text{ Einheitsmatrix}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

Setzen wir abkürzend

$$\begin{aligned} T_{r_k} &= (V + r_k I)^{-1}\ (r_k I - H)\ (H + r_k I)^{-1}\ (r_k I - V), \\ g_{r_k} &= (V + r_k I)^{-1} \{(r_k I - H)\ (H + r_k I)^{-1} + I\}\, b, \end{aligned}$$

so läßt sich dieses Verfahren in der Form

$$x_{k+1} = T_{r_k} x_k + g_{r_k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

schreiben. Diese Iterationsvorschrift ist in der Literatur als Peaceman-Rachford-Verfahren bekannt. Im Falle $r_k = r$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, spricht man vom *stationären*, andernfalls vom *instationären* Peaceman-Rachford-Verfahren.

Die bekannten Aussagen dafür, daß das *stationäre* Verfahren für jeden Anfangsvektor gegen die Lösung des Systems $A x = b$ konvergiert, beschäftigen sich mit dem Fall, daß H und V hermitisch und nichtnegativ definit sind, und daß mindestens eine der Matrizen H und V positiv definit ist. (S. dazu etwa [11], Theorem 7.1 sowie [14], Abschnitt 17.2, für einige Modifikationen dieser Voraussetzungen.) Unter diesen Voraussetzungen kann auch eine Parameteroptimierung für das stationäre Verfahren durchgeführt werden. Es zeigt sich, daß man z.B. für das sogenannte Modellproblem trotz größeren Aufwands nur diesselbe asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit wie für das optimierte Relaxationsverfahren erreichen kann. S. dazu z.B. [11].

Im *instationären* Fall liegen sehr gute praktische Erfahrungen vor, jedoch ist der Konvergenznachweis und die Parameteroptimierung bisher nur unter noch einschneidenderen Bedingungen erbracht worden. Insbesondere müssen die Matrizen H und V vertauschbar sein. (S. [11], Abschnitt 7.2 und [14], Abschnitt 17.4.) Diese Vertauschbarkeitsbedingung schränkt die Klasse von Problemen, welche durch Diskretisierung von elliptischen Differentialgleichungen entstehen, und für die die Konvergenz des instationären Verfahrens theoretisch gesichert ist, stark ein. Obwohl in der Praxis auch bei nichtvertauschbaren Matrizen H und V das instationäre Verfahren in vielen Fällen überraschend gut konvergiert, sind fast keine Kriterien bekannt, welche zumindest die Konvergenz sichern. (S. jedoch [1, 4, 5, 9, 13].) Andererseits sind Beispiele bekannt, bei denen die Wahl von Parametern $r_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, so möglich ist, daß das instationäre Verfahren divergiert. Siehe dazu etwa [10] oder [14], Abschnitt 17.10.

In dieser Note geben wir unter Voraussetzungen, die insbesondere dann erfüllt sind, wenn H und V nichtsinguläre M-Matrizen sind, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Peaceman-Rachford-Verfahrens an.

Die Vertauschbarkeit von H und V wird dabei auch im instationären Fall nicht benötigt. Es wird abschließend gezeigt, wie sich die bewiesenen Aussagen bei praktischen Problemen anwenden lassen.

2.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbb{C}^{n,n}$ die Menge aller $n x n$-Matrizen $A = [a_{ij}]$ mit komplexen Elementen. Entsprechend ist $\mathbb{R}^{n,n}$ definiert. Es sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ zerlegt in $A = H + V$ und es gelte

$$H = D_H - B_H, \qquad V = D_V - B_V$$

wobei D_H bzw. D_V jeweils den Diagonalanteil und B_H bzw. B_V jeweils den außerhalb der Diagonale stehenden Anteil von H bzw. V bezeichnen. Dann definieren wir die Klasse $\tilde{\Omega}(A)$ von Matrizen aus $\mathbb{C}^{n,n}$ durch

$$\tilde{\Omega}(A) = \{C = [c_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} \mid C = \tilde{H} + \tilde{V}, \tilde{H} = D_{\tilde{H}} - B_{\tilde{H}}, \tilde{V} = D_{\tilde{V}} - B_{\tilde{V}},$$
$$D_{\tilde{H}} = D_H, \ |B_{\tilde{H}}| = |B_H|, \ D_{\tilde{V}} = D_V, \ |B_{\tilde{V}}| = |B_V|\}.$$

Es ist $A \in \tilde{\Omega}(A)$.

Mit $\varrho(A)$ wird der Spektralradius der Matrix A bezeichnet. Schließlich kann jede Matrix $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $b_{ij} \leqq 0$, $i \neq j$, $1 \leqq ij \leqq n$, in der Form

$$B = \varkappa I - C$$

mit $\varkappa = \max_{1 \leq i \leq n} \{b_{ii}\}$ geschrieben werden, wobei die Elemente von C definiert sind durch

$$c_{ii} = \varkappa - b_{ii} \geqq 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

$$c_{ij} = -b_{ij} \geqq 0, \; i \neq j, \quad 1 \leqq i, j \leqq n.$$

Eine solche Matrix B heißt nach Ostrowski [8] *nichtsinguläre M-Matrix*, wenn $\varkappa > \varrho(C)$ gilt. Nach Theorem 3.8 und Theorem 3.10 in [11] sind bei einer nichtsingulären M-Matrix die Diagonalelemente positiv. Wir benötigen den folgenden

Satz 1. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei nichtsingulär und (M_k, N_k) eine Folge von regulären Zerlegungen von A (s. [11], Definition 3.5), wobei die Folge (M_k) beschränkt ist. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $A^{-1} \geqq 0$.

(b) Das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - M_k^{-1}(A\,x_k - b) = M_k^{-1} N_k\, x_k + M_k^{-1} b, \; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

konvergiert für jeden Anfangsvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegen die Lösung von $A\,x = b$. ■

Der angegebene Satz 1 ist ein Spezialfall von Theorem 2.4 und der sich daran anschließenden Bemerkung in [6]. Für konstantes $M_k = M$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, enthält er als Speziallfall das von R.S. Varga in [11], Theorem 3.13, angegebene Resultat über reguläre Zerlegungen.

Außerdem verwenden wir den Inhalt des folgenden

Satz 2. Es sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ nichtsingulär und (M_k, N_k) eine Folge von Zerlegungen $A = M_k - N_k$ mit nichtsingulären Matrizen M_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Es gelte

$$|M_k^{-1}| \leqq \tilde{M}_k^{-1}, \qquad |N_k| \leqq \tilde{N}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $(\tilde{M}_k, \tilde{N}_k)$ eine Folge von Zerlegungen $\tilde{A} = \tilde{M}_k - \tilde{N}_k$ der nichtsingulären Matrix $\tilde{A}$ ist. Falls das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k - \tilde{M}_k^{-1}(\tilde{A}\,x_k - b) = \tilde{M}_k^{-1} \tilde{N}_k x_k + \tilde{M}_k^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

für jeden Anfangsvektor x_0 gegen die Lösung von $\tilde{A}\,x = b$ konvergiert, so konvergiert auch das Verfahren

$$y_{k+1} = y_k - M_k^{-1}(A\,y_k - b) = M_k^{-1} N_k y_k + M_k^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

für jeden Anfangsvektor y_0 gegen die Lösung von $A\,x = b$.

Beweis. Mit Hilfe der Substitution

$$\tilde{x}_k = x_k - \tilde{A}^{-1} b$$

geht die Iterationsvorschrift für die Folge (x_k) über in

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \tilde{M}_k^{-1} A\, \tilde{x}_k = \tilde{M}_k^{-1} \tilde{N}_k \tilde{x}_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Daraus liest man ab, daß man o.B.d.A. $b = 0$ annehmen kann. Das gleiche gilt für die Vorschrift zur Berechnung der Folge (y_k). Wir wählen y_0 beliebig und setzen $x_0 = |y_0|$. Dann gilt

$$|y_1| = |M_0^{-1} N_0\, y_0| \leqq \tilde{M}_0^{-1} \tilde{N}_0 x_0 = x_1.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man

$$|y_k| \leqq x_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots .$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$ folgt die Behauptung $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=0$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. ∎

Im Falle $M_k=M$, $\widetilde{M}_k=\widetilde{M}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, sind die Aussagen von Satz 2 bekannt: Die Konvergenz der Folge (x_k) ist jetzt äquivalent mit $\varrho(\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N})<1$. Wegen $|M^{-1}N| \leqq \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$ gelten nach Theorem 2.8 in [11] die Ungleichungen $\varrho(M^{-1}N) \leqq \varrho(|M^{-1}N|) \leqq \varrho(\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N})<1$, woraus die Konvergenz der Folge (y_k) folgt.

Als nächstes beweisen wir das Hauptresultat dieser Arbeit.

Satz 3. Die Matrix $A=[a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ sei in die Summe $A=H+V$ zweier Matrizen $H=[h_{ij}]$ und $V=[v_{ij}]$ mit reellen Diagonalelementen zerlegt. Es sei

$$H=D_H-B_H, \quad V=D_V-B_V$$

wobei D_H bzw. D_V jeweils den Diagonalanteil und B_H bzw. B_V den außerhalb der Diagonale von H bzw. V stehenden Anteil bezeichnet. Weiter sei

$$\tau=\max_{1\leqq i\leqq n}\{h_{ii}, v_{ii}\}$$

und

$$\tau I+D_H-|B_H|, \quad \tau I+D_V-|B_V|$$

seien nichtsinguläre M-Matrizen. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $D_V+D_H-(|B_V|+|B_H|)$ ist eine nichtsinguläre M-Matrix.

(b) Das Peaceman-Rachford-Verfahren konvergiert für jede Martix aus $\tilde{\Omega}(A)$ und für jede reelle Folge (r_k), für deren Elemente die Ungleichungen

$$\tau \leqq r_k \leqq \sigma < \infty, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

mit einer beliebigen, aber festen Konstanten $\sigma \geqq \tau$ bestehen.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß $\tau>0$ gilt. Nach Definition von τ gilt $\tau-h_{ii}\geqq 0$, $1\leqq i\leqq n$. Da $\tau I+D_H-|B_H|$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist, folgt $\tau+h_{ii}>0$, $1\leqq i\leqq n$. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt die Behauptung $\tau>0$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir nehmen eine beliebige Matrix aus $\tilde{\Omega}(A)$, die wir der Einfachheit wegen wieder mit A bezeichnen, und zeigen zunächst, daß das Peaceman-Rachford-Verfahren durchführbar ist. Dazu zeigen wir, daß die Matrizen $V+r_kI$ und $H+r_kI$ für die angegebenen Werte von r_k nicht singulär sind. Für $r_k\geqq\tau$ ist mit $\tau I+D_V$ auch r_kI+D_V nichtsingulär, so daß gilt

$$V+r_kI=r_kI+D_V-B_V=(r_kI+D_V)\,[I-(r_kI+D_V)^{-1}B_V].$$

Nach Voraussetzung ist $\tau I+D_V-|B_V|$ eine nichtsinguläre M-Matrix. Nach Theorem 3.10 in [11] ist dies genau dann der Fall, wenn $\varrho((\tau I+D_V)^{-1}|B_V|)<1$ ist. Wegen

$$(r_kI+D_V)^{-1}\leqq(\tau I+D_V)^{-1}$$

für $r_k \geqq \tau$ gilt aufgrund des Satzes von Perron und Frobenius (Theorem 2.7 in [11])

$$\varrho((r_k I + D_V)^{-1} | B_V |) \leqq \varrho((\tau I + D_V)^{-1} | B_V |) < 1.$$

Nach Theorem 3.8 in [11] existiert dann die Inverse $[I - (r_k I + D_V)^{-1} | B_V |]^{-1}$. Nach Theorem 2.8 in [11] gilt

$$\varrho((r_k I + D_V)^{-1} B_V) \leqq \varrho((r_k I + D_V)^{-1} | B_V |) \leqq 1,$$

woraus mit Theorem 3.7 in [11] die Existenz der Inversen $[I - (r_k I + D_V)^{-1} B_V]^{-1}$ folgt. Damit existiert auch $(r_k I + D_V - B_V)^{-1} = (r_k I + V)^{-1}$.
Die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(V + r_k I)^{-1}| &= |(r_k I + D_V - B_V)^{-1}| \\ &\leqq (r_k I + D_V - | B_V |)^{-1} \end{aligned}$$

liest man aus der geometrischen Reihe ab. Entsprechend zeigt man die Existenz von $(H + r_k I)^{-1}$ sowie die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(H + r_k I)^{-1}| &= |(r_k I + D_H - B_H)^{-1}| \\ &\leqq (r_k I + D_H - | B_H |)^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz der Peaceman-Rachford-Folge nachgewiesen.

Wegen

$$(r_k I - H)(H + r_k I)^{-1} = (H + r_k I)^{-1} (r_k I - H)$$

läßt sich die Matrix T_{r_k} auch schreiben als

$$T_{r_k} = (V + r_k I)^{-1} (H + r_k I)^{-1} (r_k I - H)(r_k I - V).$$

Für T_{r_k} gilt die Ungleichung

$$| T_{r_k} | \leqq \tilde{T}_{r_k}$$

mit

$$\tilde{T}_{r_k} = (r_k I + D_V - | B_V |)^{-1} (r_k I + D_H - | B_H |)^{-1} (r_k I - D_H + | B_H |)(r_k I - D_V + | B_V |).$$

Wir betrachten nun die Matrix $\tilde{A} = D_V + D_H - (| B_V | + | B_H |)$ und eine Folge $(\tilde{M}_{r_k}, \tilde{N}_{r_k})$ von Zerlegungen von $\tilde{A}$ wobei

$$\tilde{M}_{r_k} = \frac{1}{2 r_k} [r_k I + D_H - | B_H |] [r_k I + D_V - | B_V |],$$

$$\tilde{N}_{r_k} = \frac{1}{2 r_k} [r_k I - D_H + | B_H |] [r_k I - D_V + | B_V |]$$

gesetzt wird. Die beiden Matrizenfaktoren von $\tilde{M}_{r_k}$ sind, wie bereits oben gezeigt wurde, nichtsingulär und ihre Inversen nichtnegativ. Somit gilt $\tilde{M}_{r_k}^{-1} \geqq 0$. Außerdem ist $\tilde{N}_{r_k} \geqq 0$. Somit ist die angegebene Zerlegung regulär für $k = 0, 1, 2, \ldots$. $(\tilde{M}_{r_k})$ ist eine beschränkte Folge. Da nach Voraussetzung $\tilde{A}$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist, gilt $\tilde{A}^{-1} \geqq 0$.

Durch Anwendung von Satz 1 folgt jetzt die Konvergenz des Iterationsverfahrens

$$x_{k+1} = \tilde{M}_{r_k}^{-1} \tilde{N}_{r_k} x_k + \tilde{M}_k^{-1} b = \tilde{T}_{r_k} x_k + \tilde{M}_{r_k}^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

für jeden Anfangsvektor x_0 gegen die Lösung von $\tilde{A}\,x=b$.

Setzen wir weiter

$$M_{r_k}=\frac{1}{2r_k}\,(H+r_kI)\,(V+r_kI)$$

$$N_{r_k}=\frac{1}{2r_k}\,(r_kI-H\,(r_kI-V),$$

so ist $A=M_{r_k}-N_{r_k}$, $\quad T_{r_k}=M_{r_k}^{-1}N_{r_k}$,

$$|M_{r_k}^{-1}|\leqq\tilde{M}_{r_k}^{-1},\qquad |N_{r_k}|\leqq\tilde{N}_{r_k},\qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Durch Anwendung von Satz 2 folgt jetzt die Behauptung.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es ist $\tilde{A}=D_H+D_V-(|B_H|+|B_V|)\in\tilde{\Omega}(A)$.

Wenn für diese Matrix das Peaceman-Rachford-Verfahren für jeden Anfangsvektor und für jede Folge (r_k) mit $\tau\leqq r_k\leqq\sigma<\infty$ konvergiert, dann konvergiert es insbesondere für $\tau\leqq r_k=r\leqq\sigma$, $k=0,1,2,\ldots$, d.h. es ist $\varrho(\tilde{T}_r)<1$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{T}_r&=(rI+D_V-|B_V|)^{-1}(rI+D_H-|B_H|)^{-1}(rI-D_H+|B_H|)\,(rI-D_V+|B_V|)\\&=\tilde{M}_r^{-1}\tilde{N}_r.\end{aligned}$$

Nach Theorem 3.8 in [11] existiert dann die Inverse $(I-\tilde{T}_r)^{-1}$ und es gilt

$$0\leqq(I-\tilde{T}_r)^{-1}=(I-\tilde{M}_r^{-1}\tilde{N}_r)^{-1}=\tilde{A}^{-1}\tilde{M}_r.$$

Wegen $\tilde{M}_r^{-1}\geqq0$ folgt daraus $\tilde{A}^{-1}\geqq0$. Durch Anwendung von Theorem 3.10 in [11] erhält man jetzt das Ergebnis, daß $\tilde{A}$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist. ■

Ein besonders für die Anwendungen wichtiger Spezialfall von Satz 3 ist der Inhalt von

Korollar 1. Es sei $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n,n}$ in die Summe zweier Matrizen $H=[h_{ij}]$ und $V=[v_{ij}]$ zerlegt. Es sei

$$\tau=\max_{1\leqq i\leqq n}\{h_{ii},v_{ii}\}$$

und

$$\tau I+H,\qquad \tau I+V$$

seien nichtsinguläre M-Matrizen. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A ist eine nichtsinguläre M-Matrix.

(b) Das Peaceman-Verfahren konvergiert für jede Matrix aus $\tilde{\Omega}(A)$ und für jede Folge (r_k) für deren Elemente die Ungleichungen

$$\tau\leqq r_k\leqq\sigma<\infty,\qquad k=0,1,2,\ldots,$$

mit einer beliebigen aber festen Konstanten $\sigma\geqq\tau$ bestehen. ■

Zum Beweis dieser Aussagen is nur zu beachten, daß in diesem Falle

$$\begin{aligned}\tau I+D_H-|B_H|&=\tau I+H,\\ \tau I+D_V-|B_V|&=\tau I+V,\\ D_V+D_H-(|B_V|+|B_H|)&=A\end{aligned}$$

gilt.

Falls bereits H und V nichtsinguläre M-Matrizen sind, so sind nach [7], Seite 55, 2.4.11 erst recht $V+rI$ und $H+rI$ für jedes $r \geqq 0$ nichtsinguläre M-Matrizen. Bekanntlich ist jedoch die Summe zweier nichtsingulärer M-Matrizen H und V im allgemeinen keine nichtsinguläre M-Matrix. Die Aussage (b) von Korollar 1 liefert daher wegen $A \in \tilde{\Omega}(A)$ ein Kriterium dafür, daß mit H und V auch die Summe $A=H+V$ wieder eine nichtsinguläre M-Matrix ist. Charakterisierungen von nichtsingulären M-Matrizen durch andere konvergente Iterationsverfahren sind in der Literatur bereits bekannt. S. dazu z.B. Theorem 3.10 in [11].

Wir bemerken außerdem, daß die im Korollar 1 angegebene untere Schranke $\tau = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \{h_{ii}, v_{ii}\}$ für die r_k, $k=0, 1, \ldots$, bereits in [3], Theorem 2.2.3, auftritt, wo für $r \geqq \tau$ unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen die Monotonie und Konvergenz des stationären Peaceman-Rachford-Verfahrens für spezielle Startwerte bewiesen wird.

Außerdem wird in [1] sowie in [11], Theorem 7.8 gezeigt, daß unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen die Peaceman-Rachford-Matrix T_r für $r \geqq \tau$ primitiv ist und es wird eine einfache anschauliche Interpretation dieses Sachverhaltes angegeben.

Nach Satz 3 ist insbesondere die Konvergenz des *stationären* Peaceman-Rachford-Verfahrens gesichert, falls man $r \geqq \tau$ wählt.

Unter den spezielleren Voraussetzungen des folgenden Satzes läßt sich der zulässige Bereich für r noch etwas vergrößern.

Satz 4. In den Voraussetzungen von Satz 3 sei speziell $D_H = D_V = dI$ mit einer reellen Zahl d. Außerdem seien $dI - |B_V|$ und $dI - |B_H|$ nichtsinguläre M-Matrizen. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $2dI - (|B_V| + |B_H|)$ ist eine nichtsinguläre M-Matrix.

(b) Das *stationäre* Peaceman-Rachford-Verfahren konvergiert für jede Matrix aus $\tilde{\Omega}(A)$ und für alle r, für die gilt

$$r > \tfrac{1}{2}\,\varrho(|B_V| + |B_H|).$$

Bevor wir den Satz 4 beweisen, bemerken wir zunächst, daß hier auch Satz 3 anwendbar ist. Da nämlich $dI - |B_V|$ und $dI - |B_H|$ nichtsinguläre M-Matrizen sind, ist $d > 0$ und damit sind wegen $\tau = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \{h_{ii}, v_{ii}\} = d$ nach [7], 2.4.11., auch $\tau I + D_H - |B_H|$ und $\tau I + D_V| - |B_V|$ nichtsinguläre M-Matrizen. Satz 3 liefert daher die Konvergenz des stationären Peaceman-Rachford-Verfahrens für jedes $r \geqq d = \tau$. Da aufgrund der Theoreme 3.8 und 3.10 in [11] die Matrix $2dI - (|B_V| + |B_H|)$ genau dann eine nichtsinguläre M-Matrix ist, wenn der Spektralradius der dazugehörigen Jacobi-Matrix kleiner als eins ist,

$$\frac{1}{2d}\,\varrho(|B_H| + |B_V|) = \frac{1}{2\tau}\,\varrho(|B_V| + |B_V|) < 1,$$

folgt $\frac{1}{2}\,\varrho(|B_V| + |B_H|) < \tau$. Der zulässige Bereich in dem r in Satz 4 liegen kann, wird also gegenüber Satz 3 echt vergrößert.

Beweis zu Satz 4. Für $d = \tau \leqq r$ folgt (b) aus (a) wie in Satz 3. Die Umkehrung „(b) $\Rightarrow$ (a)" folgt ebenfalls wie in Satz 3. Es ist also nur noch zu zeigen, daß (b) aus (a) folgt, falls man

$$\tfrac{1}{2}\,\varrho(|B_V|+|B_H|)<r<\tau=d$$

wählt. Die Matrix des stationären Peaceman-Rachford-Verfahrens läßt sich hier schreiben als

$$T_r=[(d+r)\,I-B_V]^{-1}\;[(d+r)\,I-B_H]^{-1}\;[(r-d)\,I+B_H]\;[(r-d)\,I+B_V]$$

und es gilt $|T_r|\leqq\widetilde{T}_r$ mit

$$\widetilde{T}_r=[(d+r)\;I-|B_V|]^{-1}\;[(d+r)\;I-|B_H|]^{-1}\;[(d-r)\,I+|B_H|]\;[(d-r)\,I+|B_V|]$$

für $r<d$.

Wir betrachten nun die Matrix

$$A_r=2dI-\frac{d}{r}\,(|B_H|+|B_V|)$$

und die reguläre Zerlegung $A_r=M_r-N_r$ mit

$$M_r=\frac{1}{2r}\,[(d+r)\,I-|B_H|]\;[(d+r)\,I-|B_V|],$$

$$N_r=\frac{1}{2r}\,[(d-r)\,I+|B_H|]\,[(d-r)\,I+|B_V|].$$

Für $r>\frac{1}{2}\,\varrho(|B_H|+|B_V|)$ gilt $A_r^{-1}\geqq 0$.

Somit gilt für

$$\tfrac{1}{2}\,\varrho(|B_H|+|B_V|)<r<d$$

nach Theorem 3.13 in [11] die Ungleichung $\varrho(M_r^{-1}N_r)=\varrho(\widetilde{T}_r)<1$. Nach Theorem 2.8 in [11] gilt

$$\varrho(T_r)\leqq\varrho(|T_r|)\leqq\varrho(\widetilde{T}_r).$$

Somit folgt die Behauptung $\varrho(T_r)<1$ für Werte von r aus dem angegebenen Intervall. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Voraussetzungen dieses Satzes erscheinen sehr speziell. Die Beispiele im nächsten Abschnitt zeigen jedoch, daß sie bei gewissen praktischen Problemen erfüllt sind.

Wir bemerken abschließend, daß Satz 4 insbesondere dann richtig ist, wenn $A=2dI-(B_V+B_H)$ sowie $H=dI-B_H$ und $V=dI-B_V$ bereits nichtsinguläre M-Matrizen sind.

3.

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Aussagen aus dem vorangehenden Abschnitt bei konkreten Problemen angewendet werden können.

Wir betrachten wie in [11], Seite 182, die selbstadjungierte Differentialgleichung

$$-(P(x,y)\,u_x)_x-(P(x,y)\,u_y)_y+\sigma(x,y)\,u(x,y)=f(x,y)$$

für $(x,y)\in R$, wobei R ein offenes, beschränktes und zusammenhängendes Gebiet der Ebene ist. Der Rand Γ von R sei hinreichend glatt und es sei

$$\alpha(x,y)\,u+\beta(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma(x,y)\quad\text{für}\quad(x,y)\in\Gamma.$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial u}{\partial n}$ die äußere Normalableitung. Wir setzen voraus, daß P, σ und f in $R \cup \Gamma$ stückweise stetig sind, und daß gilt

$$P(x, y) > 0, \quad \sigma(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \in R \cup \Gamma.$$

Weiter seien α, β und γ stückweise stetig auf Γ und es gelte

$$\alpha(x, y) \geqq 0, \quad \beta(x, y) \geqq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Unter diesen Voraussetzungen führt die in [11], Seite 182 ff. angegebene Diskretisierung auf ein lineares Gleichungssystem

$$A x = b$$

mit einer Matrix

$$A = H_0 + V_0 + \textstyle\sum.$$

Dabei ist A nach Theorem 6.4 in [11] eine Stieltjesmatrix (s. Definition 3.4 in [11]), also nach Korollar 3 in [11], Seite 85, eine nichtsinguläre M-Matrix.

Außerdem sind die Matrizen H_0 und V_0 nach entsprechenden Ähnlichkeitstransformationen mit Permutationsmatrizen direkte Summen von irreduziblen, tridiagonalen (möglich singulären) M-Matrizen. $\sum$ ist eine nichtnegative Diagonalmatrix.

Setzt man nun

$$A = H + V$$

mit

$$H = H_0 + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum, \qquad V = V_0 + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum,$$

so sind $H + \tau I$ und $V + \tau I$ für $\tau = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} \{h_{ii}, v_{ii}\}$ nichtsinguläre M-Matrizen. Damit ist dann Korollar 1 anwendbar. Es liefert die Aussage, daß das Peaceman-Rachford-Verfahren für jede beschränkte Folge (r_k) mit $r_k \geqq \tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, gegen $x = A^{-1} b$ konvergiert.

Der Wert von τ hängt von dem speziellen vorliegenden Problem ab. Beispielsweise erhält man für das sogenannte *Modellproblem*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } R = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$$

und vorgegebenen Werten

$$u(x, y) = \gamma(x, y) \qquad \text{auf dem Rand } \Gamma$$

des Einheitsquadrates R den Wert $\tau = 2$, falls man in x- und y-Richtung äquidistant unterteilt und A wie üblich in $A = H + V$ zerlegt.

In diesem Beispiel liefert Korollar 1 keine neue Aussage. Da nämlich H und V vertauschbar sind, konvergiert das Peaceman-Rachford-Verfahren nach den Ausführungen in [11], Abschnitt 7.2, für jede Folge (r_k) mit positiven Gliedern.

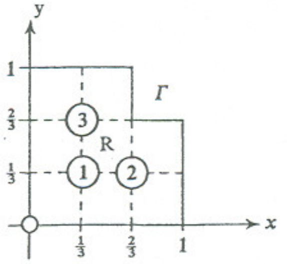
Betrachten wir dagegen die Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

mit vorgegebenen Werten auf dem Rand Γ der nachfolgenden Figur (s. [11], Abschnitt 7.1, Aufgabe 3), so führt die übliche Diskretisierung bei der angegebenen

Numerierung auf ein lineares Gleichungssystem $Ax=b$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$



Die Zerlegung $A=H+V$ der Matrix entsprechend den Anteilen der Diskretisierung in horizontaler und vertikaler Richtung führt auf

$$H=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

H und V sind in diesem Falle jedoch aufgrund bekannter Ergebnisse (s. [11], Abschnitt 7.3) nicht vertauschbar, was sich auch direkt nachprüfen läßt. Korollar 1 liefert hier die Aussage, daß das Peaceman-Rachford-Verfahren für jede beschränkte Folge (r_k) mit $r_k \geqq \tau = 2$, $k=0, 1, 2, \ldots$, konvergiert.

In diesem Beipiel läßt sich auch Satz 4 anwenden. Es ist

$$|B_V|+|B_H|=B_V+B_H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und $\varrho(|B_V|+|B_H|)=\sqrt{2}$. Satz 4 liefert daher die Aussage, daß das *stationäre* Peaceman-Rachford-Verfahren für alle $r > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ konvergiert. In diesem Falle erhält man jedoch keine neue Aussage. Aufgrund bekannter Resultate aus [11] und [14] konvergiert hier das stationäre Verfahren für $r>0$, da ja H und V symmetrisch und positiv definit sind.

Wir bemerken abschließend, daß die Anwendung von Korollar 1 nicht auf die durch Diskretisierung von selbstadjungierten Differentialgleichungen entstehenden Gleichungssysteme beschränkt ist. Es bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, Korollar 1 etwa auf die in [14], Abschnitt 2.8 hergeleiteten, zum Teil allgemeineren diskreten Probleme anzuwenden. Insbesondere dann, wenn A bzw. H und V nicht symmetrisch sind, erhält man auch für das stationäre Verfahren neue Konvergenzaussagen.

Literatur

1. Birkoff, G., Varga, R. S.: Implicit Alternating Direction Methods. Trans. Amer. Math. Soc. **92**, 190—273 (1959)
2. Birkoff, G., Varga, R. S., Young, D. M.: Alternating Direction Implicit Methods. In: Advances in Computers, 3, New York: Academic Press 1962
3. Casper, J.: Applications of Alternating Direction Methods to Mildly Nonlinear Problems. Ph. D. Diss., Univ of Maryland, College Park, Maryland (1969)

4. Guilinger, W. H., Jr.: The Peaceman-Rachford Method for Small Mesh Increments. J. Math. Anal. Appl. **11**, 261—277 (1965)
5. Habetler, G. J.: Concerning the Implicit Alternating Direction Method. Report KAPL-2040, Knolls Atomic Power Laboratory, Schenectady, New York (1959)
6. More, J. M.: Global Convergence of Newton-Gauss-Seidel Methods. SIAM J. Numer. Anal. **8**, 325—336 (1971)
7. Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press 1970
8. Ostrowski, A. M.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. **10**, 69—96 (1937)
9. Pearcy, C.: On Convergence of Alternating Direction Procedures. Numer. Math. **4**, 172—176 (1962)
10. Price, H., Varga, R. S.: Recent Numerical Experiments Comparing Successive Overrelaxation Iterative Methods with Implicit Alternating Direction Methods. Report Nr. 91, Gulf Research and Development Co., Pittsburgh, Pennsylvania (1962)
11. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs ,N. J.: Prentice Hall, (1962)
12. Wachspress, E.: Iterative Solution of Elliptic Systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1966
13. Widlund, O. B.: On the Rate of Convergence of an Alternating Direction Implicit Method in a Noncommutative Case. Math. Comp. **20**, 500—515 (1966)
14. Young, D. M.: Iterative Solution ot Large Linear Systems. New York: Academic Press 1971

Prof. Dr. G. Alefeld
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12
D-75 Karlsruhe