

Zur Konvergenz des symmetrischen Relaxationsverfahrens

G. Alefeld und R. S. Varga*

Received May 9, 1975

On the Convergence of the Symmetric SOR Method

Summary. For the iterative solution of the matrix equation $Ax=b$ by means of the (point) symmetric SOR method (called the SSOR method), the basic convergence analysis of this iterative process has been developed in the literature only for the case when A is Hermitian and positive definite. With the help of the theory of regular splittings, a more general convergence analysis of this iterative method is obtained, under the weaker assumption that A is a nonsingular H -matrix.

1.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax=b$$

mit einer nichtsingulären (komplexen) Matrix A und einem (komplexen) Vektor b . Die Matrix A sei zerlegt in

$$A=D-L-U.$$

Dabei bezeichnet D eine Diagonalmatrix, L eine strenge untere und U eine strenge obere Dreiecksmatrix. Zur Auflösung des linearen Systems $Ax=b$ betrachten wir das folgende Verfahren

$$\begin{cases} x_{k+\frac{1}{2}} = (D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega U\}x_k + \omega(D-\omega L)^{-1}b \\ x_{k+1} = (D-\omega U)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega L\}x_{k+\frac{1}{2}} + \omega(D-\omega U)^{-1}b \end{cases} \\ (\omega > 0), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Setzen wir abkürzend

$$\begin{aligned} S_\omega = S_\omega(A) &= (D-\omega U)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega L\}(D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega U\}, \\ c &= \omega(2-\omega)(D-\omega U)^{-1}D(D-\omega L)^{-1}b, \end{aligned}$$

so läßt sich dieses Verfahren in der üblichen Form

$$x_{k+1} = S_\omega x_k + c, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

schreiben. Dieses Verfahren ist in der Literatur als symmetrisches SOR-Verfahren (SSOR-Verfahren), für $\omega=1$ als symmetrisches Gauss-Seidel (oder symmetrisches Einzelschrittverfahren), bekannt (s. etwa [3] und [4]). Es ist neuer-

* Research supported in part by the Energy Research and Development Administration (ERDA) under Grant E(11-1)-2075, and by the U.S. Air Force under Grant AFOSR 74-2729.

dings häufiger als Ausgangsverfahren für die Durchführung eines semi-iterativen Verfahrens betrachtet worden (s. etwa [4]–[6]). Das SSOR-Verfahren konvergiert genau dann für jeden Anfangsvektor gegen die Lösung des gegebenen Systems, wenn der Spektralradius von S_ω kleiner als eins ist. Die bekannten Aussagen dafür, daß dies der Fall ist, beschäftigen sich mit dem Fall, daß A hermitisch und positiv definit ist (s. etwa Young [4], Kap. 15, und die dort angegebene Literatur).

Unter Verwendung des von R. S. Varga in [3], Seite 87 eingeführten Begriffs der regulären Zerlegung einer Matrix beweisen wir in dieser Note einen allgemeinen Satz über die Konvergenz des SSOR-Verfahrens, mit dem sich dann mehrere einfache Kriterien angeben lassen. Die verwendete Beweisidee wurde bereits von U. Kulisch in [1] beim Beweis entsprechender Aussagen für das (gewöhnliche) SOR-Verfahren verwendet.

2.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbb{C}^{n,n}$ die Menge aller $n \times n$ -Matrizen $A = [a_{ij}]$ mit komplexen Elementen. Entsprechend ist $\mathbb{R}^{n,n}$ definiert. $\mathbb{C}_\pi^{n,n}$ bezeichnet die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit komplexen Elementen, bei denen alle Diagonalelemente von Null verschieden sind.

Für eine beliebige Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist die Vergleichsmatrix $\mathfrak{M}(A) = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= |a_{ii}|, & 1 \leq i \leq n; \\ \alpha_{ij} &= -|a_{ij}|, & i \neq j, 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Weiter ist für eine beliebige Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ die Menge der Äquimodularmatrizen definiert als

$$\Omega(A) = \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n} : |b_{ij}| = |a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

A und $\mathfrak{M}(A)$ sind Elemente von $\Omega(A)$.

Für eine beliebige Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_\pi^{n,n}$, $n \geq 2$, wird mit $D = \text{diag}[a_{11}, \dots, a_{nn}]$ und der Einheitsmatrix I die Jacobimatrix $J(A)$ durch $A = D(I - J(A))$ definiert.

Mit $\rho(A)$ wird der Spektralradius der Matrix A bezeichnet.

Schließlich kann jede Matrix $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $b_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, in der Form

$$B = \tau I - C$$

mit $\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \{b_{ii}\}$ und einer nichtnegativen Matrix $C = [c_{ij}]$ geschrieben werden, wobei die Elemente von C definiert sind durch

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \tau - b_{ii} \geq 0, & 1 \leq i \leq n, \\ c_{ij} &= -b_{ij} \geq 0, & i \neq j, 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Eine solche Matrix B heißt nach Ostrowski [2] *nichtsinguläre M-Matrix*, wenn $\tau > \rho(C)$ gilt. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt nach Ostrowski [2] *nichtsinguläre H-Matrix*, wenn $\mathfrak{M}(A)$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz. Es sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_n^{n,n}$, $n \geq 2$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- a) A ist eine nichtsinguläre H -Matrix;
- b) Für alle $B \in \Omega(A)$ und alle ω aus dem Intervall $0 < \omega < 2/[1 + \rho(|J(A)|)]$ ist das SSOR-Verfahren konvergent.

Beweis. a) \Rightarrow b). Aufgrund der Theoreme 3.8 und 3.10 in [3] ist $\mathfrak{M}(A)$ genau dann eine nichtsinguläre M -Matrix, wenn

$$\rho(J(\mathfrak{M}(A))) = \rho(|J(B)|) < 1$$

für alle $B \in \Omega(A)$ gilt. Sei nun $B \in \Omega(A)$ und

$$B = D(B) - L(B) - U(B)$$

die Zerlegung in eine Diagonalmatrix und strenge untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Die Abhängigkeit der Zerlegung von B wird im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise unterdrückt. Wir setzen weiter zur Abkürzung

$$\hat{L} = D^{-1}L, \quad \hat{U} = D^{-1}U.$$

Damit läßt sich S_ω in der Form

$$S_\omega = (I - \omega \hat{U})^{-1} \{ (1 - \omega) I + \omega \hat{L} \} (I - \omega \hat{L})^{-1} \{ (1 - \omega) I + \omega \hat{U} \}$$

schreiben.

Wegen

$$\{ (1 - \omega) I + \omega \hat{L} \} (I - \omega \hat{L})^{-1} = (I - \omega \hat{L})^{-1} \{ (1 - \omega) I + \omega \hat{L} \}$$

gilt weiter

$$S_\omega = (I - \omega \hat{U})^{-1} (I - \omega \hat{L})^{-1} \{ (1 - \omega) I + \omega \hat{L} \} \{ (1 - \omega) I + \omega \hat{U} \}.$$

Außerdem gilt wegen

$$|(I - \omega \hat{U})^{-1}| \leq (I - \omega |\hat{U}|)^{-1}$$

und

$$|(I - \omega \hat{L})^{-1}| \leq (I - \omega |\hat{L}|)^{-1}$$

die Ungleichung

$$|S_\omega| \leq \tilde{S}_\omega$$

mit

$$\tilde{S}_\omega = (I - \omega |\hat{U}|)^{-1} (I - \omega |\hat{L}|)^{-1} \{ |1 - \omega| I + \omega |\hat{L}| \} \{ |1 - \omega| I + \omega |\hat{U}| \}.$$

Wir betrachten nun die Matrix

$$\tilde{A}_\omega = \frac{1 - |1 - \omega|}{\omega} I - |J(B)|$$

und die Zerlegung

$$\tilde{A}_\omega = \tilde{M}_\omega - \tilde{N}_\omega$$

mit

$$\tilde{M}_\omega = \frac{1}{\omega(1+|1-\omega|)} (I - \omega |\hat{L}|) (I - \omega |\hat{U}|),$$

$$\tilde{N}_\omega = \frac{1}{\omega(1+|1-\omega|)} (|1-\omega| I + \omega |\hat{L}|) (|1-\omega| I + \omega |\hat{U}|).$$

Es gilt $\tilde{S}_\omega = \tilde{M}_\omega^{-1} \tilde{N}_\omega$. Offensichtlich ist $\tilde{M}^{-1} \geq \mathfrak{D}$ und $\tilde{N}_\omega \geq \mathfrak{D}$, so daß $\tilde{M}_\omega - \tilde{N}_\omega$ eine reguläre Zerlegung von \tilde{A}_ω ist (s. [3], S. 88, Definition 3.5). Wegen

$$\tilde{A}_\omega = \frac{1-|1-\omega|}{\omega} I - |J(B)| = \frac{1-|1-\omega|}{\omega} \left(I - \frac{\omega}{1-|1-\omega|} |J(B)| \right)$$

ist nach [3], Seite 83, Theorem 3.8,

$$\tilde{A}_\omega^{-1} \geq \mathfrak{D} \quad \text{für} \quad \frac{\omega}{1-|1-\omega|} \varrho(|J(B)|) < 1, \quad \text{d.h. für} \quad 0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(|J(B)|)}.$$

Somit gilt für diese Werte von ω nach [3], Seite 89, Theorem 3.13 die Ungleichung $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$. Nach [3], Seite 47, Theorem 2.8 gilt

$$\varrho(S_\omega) \leq \varrho(|S_\omega|) \leq \varrho(\tilde{S}_\omega).$$

Somit folgt die Behauptung $\varrho(S_\omega) < 1$ für Werte von ω aus dem angegebenen Intervall.

b) \Rightarrow a): \tilde{S}_ω sei wie im ersten Teil des Beweises definiert. Es ist $\mathfrak{M}(A) \in \Omega(A)$ und wegen $\tilde{S}_\omega = S_\omega(\mathfrak{M}(A))$ für $0 < \omega < 1$ gilt nach Voraussetzung $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$ für alle hinreichend kleinen $\omega > 0$.

Für $0 < \omega \leq 1$ gilt für die oben betrachtete Matrix \tilde{A}_ω die Beziehung $\tilde{A}_\omega = I - |J(A)|$. Wegen $\tilde{S}_\omega = \tilde{M}_\omega^{-1} \tilde{N}_\omega \geq \mathfrak{D}$ und $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$ für alle hinreichend kleinen $\omega > 0$ existiert nach Theorem 3.8 in [3] die Inverse $(I - \tilde{S}_\omega)^{-1}$, und es gilt

$$\emptyset \leq (I - \tilde{S}_\omega)^{-1} = (I - \tilde{M}_\omega^{-1} \tilde{N}_\omega)^{-1} = \tilde{A}_\omega^{-1} \tilde{M}_\omega.$$

Wegen $M_\omega^{-1} \geq \emptyset$ folgt daraus

$$\tilde{A}_\omega^{-1} = (I - |J(B)|)^{-1} = (I - J(\mathfrak{M}(A)))^{-1} \geq \mathfrak{D}.$$

Wegen $J(\mathfrak{M}(A)) \geq \mathfrak{D}$ folgt durch nochmalige Anwendung von Theorem 3.8 in [3] die Ungleichung $\varrho(J(\mathfrak{M}(A))) < 1$, d.h. $\mathfrak{M}(A)$ ist eine nichtsinguläre M -Matrix, oder was das gleiche ist, A ist eine H -Matrix.

Aus dem bewiesenen Satz lassen sich jetzt einige einfache Aussagen über das SSOR-Verfahren herleiten. Ohne Vollständigkeit anzustreben, geben wir zwei solche Aussagen an.

Korollar 1. A sei eine streng diagonaldominante oder irreduzibel diagonaldominante komplexe Matrix (s. [3], S. 23). Dann konvergiert das SSOR-Verfahren für alle $B \in \Omega(A)$ und alle $0 < \omega < 2/[1 + \varrho(|J(B)|)]$. Insbesondere konvergiert das symmetrische Einzelschrittverfahren.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem obigen Satz unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in diesem Falle für alle $B \in \Omega(A)$ gilt $\varrho(J(\mathfrak{M}(A))) = \varrho(|J(B)|) < 1$, daß also $\mathfrak{M}(A)$ eine nichtsinguläre M -Matrix ist (s. etwa [3], S. 74).

Korollar 2. A sei eine M -Matrix. Dann konvergiert das SSOR-Verfahren für alle $B \in \Omega(A)$ und alle $0 < \omega < 2/[1 + \rho(J(A))]$. Insbesondere konvergiert das symmetrische Einzelschrittverfahren.

Für eine M -Matrix A gilt $\mathfrak{M}(A) = A$. Damit folgt die Behauptung aus dem obigen Satz.

Literatur

1. Kulisch, U.: Über reguläre Zerlegungen von Matrizen und einige Anwendungen. Numer. Math. **11**, 444–449 (1968)
2. Ostrowski, A. M.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. **10**, 69–96 (1937)
3. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Series in Automatic Computation (1962)
4. Young, D. M.: Iterative Solution of Large Linear Systems. Academic Press 1971
5. Young, D. M.: Second Degree Iterative Methods for the Solution of Large Linear Systems. Journal of Approx. Theory **5**, 137–148 (1972)
6. Young, D. M.: Convergence Properties of the Symmetric and Unsymmetric Successive Overrelaxation Methods and Related Methods. Mathematics of Computation **24**, 793–807 (1970)

G. Alefeld
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland

R. S. Varga
Department of Mathematics
Kent State University
Kent, Ohio 44242
U. S. A.