

G. ALEFELD

Über konvergente Zerlegungen bei nichtlinearen Abbildungen

Zur Auflösung der nichtlinearen Gleichung $F(x) = w$ in einem Banach-Raum B wird das Iterationsverfahren $M(x^{k+1}) - N(x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \dots$, mit $F(x) = M(x) - N(x)$ betrachtet. Es werden (in den Sätzen 1, 3 und 4) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz angegeben. Zum Beweis wird der in [1] und [5] eingeführte Begriff der regulären Zerlegung einer nichtlinearen Abbildung verwendet. Die bewiesenen Resultate enthalten als Spezialfall entsprechende Resultate für lineare Gleichungssysteme, welche in [4] und [2] bewiesen wurden.

For solving the (nonlinear) equation $F(x) = w$ with a mapping F acting from a Banach space B into B and with a (fixed) element $w \in B$ we consider the iteration method $M(x^{k+1}) - N(x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \dots$, for which $F(x) = M(x) - N(x)$ holds. Under certain conditions about the mappings M and N we give necessary and sufficient conditions for convergence of the iteration method. In proving these results we make use of the concept of a regular splitting of a nonlinear mapping, which was introduced independently in [1] and [5]. The given results contain as a special case corresponding results for linear equations which were proved in [4] and [2].

Рассматривается итерационный метод $M(x^{k+1}) - N(x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \dots$, для решения нелинейного уравнения $F(x) = w$ в Банаховом пространстве B , где $F(x) = M(x) - N(x)$. Даются (в теоремах 1, 3 и 4) необходимые и достаточные условия сходимости. Для доказательства принимается в [1] и [5] введенное понятие разложения нелинейного преобразования. Доказанные результаты содержат в качестве частного случая соответствующие результаты для систем линейных уравнений, которые были доказаны в [4] и [2].

Im folgenden sei B ein reeller BANACH-Raum, der stets als durch einen regulären Kegel K halbgeordnet vorausgesetzt wird (siehe [3]). Darüber hinaus setzen wir voraus, daß B ein RIESZSCHER Raum ist, d. h. zu je zwei Elementen existieren Supremum und Infimum.

Betrachtet wird die Aufgabe, die (im allgemeinen nichtlineare) Gleichung

$$F(x) = w$$

mit einer stetigen Abbildung $F : B \rightarrow B$ und einem (festen) $w \in B$ durch ein Iterationsverfahren aufzulösen. Dazu sei zunächst an den Begriff der Zerlegung einer Abbildung erinnert (siehe [1] und [5]):

Eine Abbildung

$$\hat{F} : B \times B \rightarrow B$$

heißt Zerlegung von $F : B \rightarrow B$, genau dann, wenn gilt

1. $\hat{F}(x, y)$ ist stetig auf $B \times B$,
2. $\hat{F}(x, x) = F(x)$ für alle $x \in B$.

Jeder Zerlegung $\hat{F}(x, y)$ von $F(x)$ kann man ein Iterationsverfahren

$$\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

zur Auflösung der Gleichung $F(x) = w$ zuordnen.

In dieser Note betrachten wir Abbildungen $F : B \rightarrow B$, die als Differenz zweier Abbildungen

$$M : B \rightarrow B \quad \text{und} \quad N : B \rightarrow B$$

mit

$$F(x) = M(x) - N(x)$$

dargestellt sind. Solchen Abbildungen ist in natürlicher Weise die Zerlegung

$$\hat{F}(x, y) = M(x) - N(y)$$

zugeordnet. Das zu dieser Zerlegung gehörige Iterationsverfahren zur Auflösung der Gleichung $F(x) = w$ lautet

$$M(x^{k+1}) - N(x^k) = w, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Wir beweisen in dieser Arbeit den folgenden

Satz 1: Es seien $M : B \rightarrow B$ und $N : B \rightarrow B$ stetige Abbildungen und $F : B \rightarrow B$ eine Abbildung mit $F(x) = M(x) - N(x)$. F und M seien bijektive Abbildungen. Aus $M(y^1) \geq M(y^2)$ folge $N(y^1) \geq N(y^2)$. Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$M(x^{k+1}) - N(x^k) = w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

genau dann für jedes Element $x^0 \in B$ gegen die Lösung x^* von $F(x) = w$, wenn aus $F(y^1) \geq F(y^2)$ stets die Beziehung $N(y^1) \geq N(y^2)$ folgt.

Bemerkung 1: Der Inhalt von Satz 1 ist eine auf (nichtlineare) Gleichungen in halbgeordneten Räumen übertragene Verallgemeinerung des in [2], Satz 1*, für lineare Gleichungen im $\mathbb{R}^n$ — bei Zugrundeliegen der natürlichen (komponentenweisen) Halbordnung — bewiesenen Sachverhaltes:

Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von A mit reellen, nichtsingulären Matrizen A und M . Folgt aus $My \geq 0$ die Ungleichung $Ny \geq 0$, so ist $\rho(M^{-1}N) < 1$ genau dann, wenn aus $Ay \geq 0$ die Ungleichung $Ny \geq 0$ folgt. (ρ bezeichnet den Spektralradius).

Der Beweis von Satz 1 ergibt sich mit Hilfe verschiedener Lemmata, die nachfolgend angegeben werden. Wir zitieren zunächst den im folgenden benötigten Begriff der regulären Zerlegung einer Abbildung.

Definition (siehe [1] und [5]): Eine Zerlegung $\hat{F}(x, y)$ von $F(x)$ heißt regulär, wenn gilt:

(a) $\hat{F}(x^1, y) \leq \hat{F}(x^2, y) \Rightarrow x^1 \leq x^2$ für alle $y \in B$.

Für alle $y, w \in B$ existiert ein $x \in B$ mit $\hat{F}(x, y) = w$. (x ist dann notwendig eindeutig.)

(b) $y^1 \leq y^2 \Rightarrow \hat{F}(x, y^1) \geq \hat{F}(x, y^2)$ für alle $x \in B$.

Bemerkung 2: Wie man sich leicht überzeugt, enthält diese Definition als Spezialfall den von R. S. VARGA in [6], Seite 88, Definition 3.5, eingeführten Begriff der regulären Zerlegung einer Matrix.

In [1], Satz 3 und in dem dazu am Ende von [1] angegebenen Zusatz haben wir die folgenden Aussagen über reguläre Zerlegungen bewiesen, die später benötigt werden.

Satz 2: B sei ein halbgeordneter Banach-Raum. Die Halbordnung besitze die eingangs genannten Eigenschaften. $\hat{F}(x, y)$ sei eine reguläre Zerlegung von F . Dann gilt: F ist injektiv und das Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \dots$, konvergiert genau dann für jeden Anfangsvektor $x^0 \in B$ gegen die eindeutige Lösung x^* von $F(x) = w$, wenn F invers isoton und surjektiv ist.

Der hinreichende Teil von Satz 2 wurde im $\mathbb{R}^n$ bei Verwendung der natürlichen Halbordnung auch in [5], Theorem 6.4 bewiesen.

Satz 2 ist eine auf nichtlineare Gleichungen in halbgeordneten Räumen übertragene Verallgemeinerung der in [5], Seite 89, Theorem 3.13, für reguläre Zerlegungen von Matrizen bewiesenen Aussagen.

Bemerkung 3: Ist speziell in Satz 1 $\hat{F}(x, y) = M(x) - N(y)$ eine reguläre Zerlegung von F , so ist die Voraussetzung

„Aus $M(y^1) \geq M(y^2)$ folge $N(y^1) \geq N(y^2)$ “

stets erfüllt. Denn gilt (a), d. h.

$$M(y^1) \geq M(y^2) \Rightarrow y^1 \geq y^2,$$

so folgt aus (b)

$$N(y^1) \geq N(y^2).$$

Jedoch ist — wie man an einfachen Beispielen sieht — umgekehrt $\hat{F}(x, y)$ in Satz 1 nicht notwendig eine reguläre Zerlegung von F .

Lemma 1: Es seien $F : B \rightarrow B$ und $M : B \rightarrow B$ bijektive Abbildungen. Dann gilt

(α) Aus $M(y^1) \geq M(y^2)$ folgt $N(y^1) \geq N(y^2)$ genau dann, wenn $N(x) = X(M(x))$ mit einer isotonen Abbildung $X : B \rightarrow B$ für $N : B \rightarrow B$ gilt.

(β) Aus $F(y^1) \geq F(y^2)$ folgt $N(y^1) \geq N(y^2)$ genau dann, wenn $N(x) = Y(F(x))$ mit einer isotonen Abbildung $Y : B \rightarrow B$ für $N : B \rightarrow B$ gilt.

Beweis: Wir beweisen (α).

„ $\Rightarrow$ “: Wir wählen $z^1 \geq z^2$ und setzen

$$y^1 = M^{-1}(z^1), \quad y^2 = M^{-1}(z^2).$$

Dann gilt

$$M(y^1) = z^1 \geq z^2 = M(y^2).$$

Nach Voraussetzung folgt dann

$$N(y^1) = N(M^{-1}(z^1)) \geq N(M^{-1}(z^2)) = N(y^2).$$

Wir definieren eine Abbildung $X : B \rightarrow B$ mit $X(y) = N(M^{-1}(y))$. X ist — wie gerade gezeigt — isoton. Mit $x = M^{-1}(y)$ folgt

$$N(x) = X(M(x))$$

mit isotonem X .

„ $\Leftarrow$ “: Sei $N(x) = X(M(x))$ mit einer isotonen Abbildung $X : B \rightarrow B$. Mit $x = M^{-1}(y)$ folgt

$$X(y) = N(M^{-1}(y))$$

mit in y isotonomem X . Ist nun $M(y^1) \geq M(y^2)$, so folgt aus der Isotonie von $X(y)$

$$N(y^1) = N(M^{-1}(M(y^1))) = X(M(y^1)) \geq X(M(y^2)) = N(M^{-1}(M(y^2))) = N(y^2).$$

Die Aussage (β) wird analog bewiesen.

In Lemma 1 wird nicht vorausgesetzt, daß $\hat{F}(x, y) = M(x) - N(y)$ eine Zerlegung von $F(x)$ ist. Setzt man dies voraus, so erhält man

Lemma 2: *Es seien $M : B \rightarrow B$, $N : B \rightarrow B$ und $F : B \rightarrow B$ Abbildungen mit $F(x) = M(x) - N(x)$. F und M seien bijektiv. Es sei $N(x) = X(M(x))$ mit einer isotonen Abbildung $X : B \rightarrow B$. Dann gilt $N(x) = Y(F(x))$ mit einer isotonen Abbildung $Y : B \rightarrow B$ genau dann, wenn $M(x) = Z(F(x))$ mit einer isotonen Abbildung $Z : B \rightarrow B$ für die Abbildung M gilt.*

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Da Y eine isotone Abbildung ist, folgt $Y(y^1) \geq Y(y^2)$ für $y^1 \geq y^2$, d. h. mit $y^1 = F(x^1)$, $y^2 = F(x^2)$ gilt

$$Y(y^1) = N(F^{-1}(y^1)) \geq N(F^{-1}(y^2)) = Y(y^2) \text{ für } y^1 \geq y^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} M(F^{-1}(y^1)) &= (N + F)(F^{-1}(y^1)) = N(F^{-1}(y^1)) + y^1 \\ &\geq N(F^{-1}(y^2)) + y^2 \\ &= (N + F)(F^{-1}(y^2)) = M(F^{-1}(y^2)). \end{aligned}$$

Sei $Z : B \rightarrow B$ definiert durch $Z(y) = M(F^{-1}(y))$. Z ist eine isotone Abbildung. Mit $x = F^{-1}(y)$, $y = F(x)$ folgt

$$M(x) = Z(F(x))$$

mit isotonomem Z .

„ $\Leftarrow$ “: Sei $M(x) = Z(F(x))$ mit einer isotonen Abbildung Z . Damit ergibt sich

$$N(x) = X(M(x)) = X(Z(F(x))) = Y(F(x))$$

mit $Y(y) = X(Z(y))$. Y ist als Produkt von isotonen Abbildungen isoton.

Aufgrund der Korollare 1 und 2 ist der Inhalt von Satz 1 mit dem des folgenden Satzes identisch.

Satz 3: *Es seien $M : B \rightarrow B$ und $N : B \rightarrow B$ stetige Abbildungen und $F : B \rightarrow B$ eine Abbildung mit $F(x) = M(x) - N(x)$. F und M seien bijektiv. Es gelte $N(x) = X(M(x))$ mit einer isotonen Abbildung $X : B \rightarrow B$. Dann konvergiert das Iterationsverfahren*

$$M(x^{k+1}) - N(x^k) = w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

genau dann für jeden Anfangsvektor $x^0 \in B$ gegen die eindeutige Lösung x^ von $F(x) = w$, wenn $M(x) = Z(F(x))$ mit einer isotonen Abbildung $Z : B \rightarrow B$ gilt.*

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “: Wir betrachten die Abbildung

$$V : B \rightarrow B \text{ mit } V(x) = F(M^{-1}(x)) = x - N(M^{-1}(x)).$$

Mit $F(x) = y$, d. h. $x = F^{-1}(y)$, folgt aus der Voraussetzung $M(x) = Z(F(x))$ die Beziehung

$$Z(y) = M(F^{-1}(y))$$

mit isotoner Abbildung Z . Sei nun $y^1 \leq y^2$. Dann ist

$$Z(y^1) = M(F^{-1}(y^1)) \leq M(F^{-1}(y^2)) = Z(y^2).$$

Daraus folgt, daß V invers isoton ist. Denn ist

$$V(x^1) = F(M^{-1}(x^1)) \leq F(M^{-1}(x^2)) = V(x^2),$$

so folgt mit der Isotonie von Z

$$x^1 = Z(V(x^1)) \leq Z(V(x^2)) = x^2.$$

Außerdem ist V als Produkt von surjektiven Abbildungen selbst surjektiv. Wir betrachten jetzt die Zerlegung

$$\tilde{V}(x, y) = x - N(M^{-1}(y))$$

von V . $\tilde{V}$ ist eine reguläre Zerlegung von V . Denn ist

$$\tilde{V}(x^1, y) \leq \tilde{V}(x^2, y), \text{ so folgt } x^1 \leq x^2.$$

Die andere in der Definition einer regulären Zerlegung unter (a) geforderte Bedingung ist trivialerweise erfüllt. Nach Voraussetzung ist $N(x) = X(M(x))$ mit isotonomem X . Mit $y = M(x)$, d. h. $x = M^{-1}(y)$ folgt $X(y) = N(M^{-1}(y))$ mit isotonomem X , d. h. aus $y^1 \leq y^2$ folgt

$$N(M^{-1}(y^1)) = X(y^1) \leq X(y^2) = N(M^{-1}(y^2)).$$

Damit ergibt sich für beliebiges x und $y^1 \leq y^2$

$$\tilde{V}(x, y^1) = x - N(M^{-1}(y^1)) \geq x - N(M^{-1}(y^2)) = \tilde{V}(x, y^2).$$

Damit ist auch (b) in der Definition einer regulären Zerlegung nachgewiesen. Die Anwendung von Satz 2 liefert jetzt die Aussage: Das Iterationsverfahren

$$y^{k+1} = N(M^{-1}(y^k)) + w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

konvergiert für jeden Anfangsvektor $y^0 \in B$ gegen die eindeutige Lösung y^* von $y = N(M^{-1}(y)) + w$. Mit $x^k = M^{-1}(y^k)$, d. h. $y^k = M(x^k)$ erhält man die Aussage: Das Iterationsverfahren

$$M(x^{k+1}) = N(x^k) + w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

konvergiert für jeden Anfangsvektor x^0 gegen die eindeutige Lösung von $F(x) = w$.

„ $\Rightarrow$ “: Konvergiere umgekehrt das Verfahren

$$M(x^{k+1}) = N(x^k) + w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

für jeden Anfangsvektor $x^0 \in B$ gegen die Lösung x^* von $F(x) = w$. Dann folgt mit $x^k = M^{-1}(y^k)$, daß das Verfahren

$$y^{k+1} = N(M^{-1}(y^k)) + w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

für jeden Anfangsvektor y^0 gegen die eindeutige Lösung y^* von

$$V(y) = y - N(M^{-1}(y)) = w$$

konvergiert. Wir zeigen, daß V injektiv ist:

Gilt

$$V(x^1) = x^1 - N(M^{-1}(x^1)) = F(M^{-1}(x^1)) = F(M^{-1}(x^2)) = x^2 - N(M^{-1}(x^2)) = V(x^2),$$

so folgt mit der Injektivität von F und M^{-1} die Gleichheit $x^1 = x^2$. Nach Satz 2 folgt jetzt, daß V invers isoton und surjektiv, somit bijektiv ist. Wegen $V(x) = F(M^{-1}(x))$ gilt dann $V^{-1}(x) = M(F^{-1}(x))$ und V^{-1} ist isoton. Schreiben wir Z statt V^{-1} , so folgt mit $F(y) = x$

$$M(y) = Z(F(y))$$

mit einer isotonen Abbildung Z .

Bemerkung 4: Der Inhalt von Satz 3 ist eine auf (nichtlineare) Gleichungen in halbgeordneten BANACH-Räumen übertragene Verallgemeinerung des in [2], Satz 2*, für lineare Gleichungen im R^n — bei Zugrundeliegen der natürlichen (komponentenweisen) Halbordnung — bewiesenen Sachverhalts:

Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von A mit reellen nichtsingulären Matrizen A und M . Gilt dann $N = XM$ mit einer reellen Matrix $X \geq 0$, so ist $\rho(M^{-1}N) < 1$ genau dann, wenn $M = ZA$ mit einer reellen Matrix $Z \geq 0$ gilt.

Abschließend geben wir eine weitere, Satz 3 ähnliche Aussage an.

Satz 4: Es seien $M : B \rightarrow B$ und $N : B \rightarrow B$ stetige Abbildungen und $F : B \rightarrow B$ eine Abbildung mit $F(x) = M(x) - N(x)$. F und M seien bijektiv. Es gelte $N(x) = M(X(x))$ mit einer isotonen Abbildung $X : B \rightarrow B$. Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$M(x^{k+1}) - N(x^k) = w, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

genau dann für jeden Anfangsvektor $x^0 \in B$ gegen die Lösung x^* von $F(x) = w$, wenn $M(x) = F(Z(x))$ mit einer isotonen Abbildung $Z : B \rightarrow B$ gilt.

Der Beweis von Satz 4 kann ähnlich wie der von Satz 3 geführt werden, indem man anstelle der dort betrachteten Abbildung V die Abbildung

$$U : B \rightarrow B \quad \text{mit} \quad U(x) = M^{-1}(F(x)) = x - M^{-1}(N(x))$$

eingführt.

Bemerkung 5: Der Inhalt von Satz 4 ist eine auf (nichtlineare) Gleichungen in halbgeordneten Räumen übertragene Verallgemeinerung des in [2], Satz 2, für lineare Gleichungen im R^n — bei Zugrundeliegen der natürlichen (komponentenweisen) Halbordnung — bewiesenen Sachverhalts (siehe auch [4]):

Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von A mit reellen nichtsingulären Matrizen A und M . Gilt dann $N = MX$ mit einer reellen Matrix $X \geq 0$, so ist $\rho(M^{-1}N) < 1$ genau dann, wenn $M = AZ$ mit einer reellen Matrix $Z \geq 0$ gilt.

Wir bemerken noch, daß die Voraussetzungen von Satz 3 nicht notwendig erfüllt sind, wenn die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind und umgekehrt. Dies wurde für lineare Gleichungen bereits in [2] durch Angabe von Gegenbeispielen gezeigt.

Literatur

- 1 ALEFELD, G., Über reguläre Zerlegungen bei nichtlinearen Abbildungen, ZAMM 52, 233–238 (1972).
- 2 —, Über konvergente Zerlegungen von Matrizen, Numer. Math. 20, 312–316 (1973).
- 3 KRASNOSELSKII, M., Positive Solutions of Operator Equations, P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands 1964.
- 4 MANGASARIAN, O. L., A convergent splitting of matrices, Numer. Math. 15, 351–353 (1970).
- 5 REINHOLDT, W. C., On Classes of n -dimensional Nonlinear Mappings Generalizing Several Types of Matrices, Techn. Rep. 70–117, Univ. Maryland, Computer Sci. Center, College Park, Maryland und in: Proc. Sympos. Numer. Sol. Part. Diff. Eqs. II, Academic Press, Inc., New York 1971.
- 6 VARGA, R., Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

Eingereicht: 19. 3. 1975, revidierte Fassung 27. 10. 1975

Anschrift: Prof. Dr. G. ALEFELD, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe, 7500 Karlsruhe, Kaiserstraße 12, Bundesrepublik Deutschland