

## ÜBER DIE KONVERGENZORDNUNG INTERVALLARITHMETISCHER ITERATIONSVERFAHREN

von

G. ALEFELD und J. HERZBERGER

(Karlsruhe)

1. In dieser Arbeit verwenden wir folgende Bezeichnungen. Mit  $X, Y, Z, \dots$  bezeichnen wir reelle, abgeschlossene Intervalle  $X = [x_1, x_2], \dots$  und fassen diese zur Menge  $I(R)$  zusammen. Bekanntlich sind durch die Festlegung

$$(1) \quad X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad * \in \{+, -, \times, /\},$$

(0  $\notin Y$  bei /) in  $I(R)$  vier Intervalloperationen erklärt (vergleiche [5]). Durch die Identifizierung  $x' = [x, x]$  gilt  $R \subset I(R)$ . Wichtigste Eigenschaft der Intervalloperationen (1) ist die Teilmengeneigenschaft

$$(2) \quad X \subseteq \tilde{X}, Y \subseteq \tilde{Y} \Rightarrow X * Y \subseteq \tilde{X} * \tilde{Y}.$$

Wir verwenden noch folgende Funktionen auf  $I(R)$ :

$$(3) \quad d(X) = x_2 - x_1 \geq 0, \quad (\text{Durchmesser})$$

$$(4) \quad |X| = \max \{|x_1|, |x_2|\} \geq 0, \quad (\text{Betrag})$$

$$(5) \quad q(X, Y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq 0, \quad (\text{Abstand})$$

für welche eine Reihe von Rechenregeln gelten (vergleiche [3], [5]). Entsprechend betrachten wir reelle Intervallvektoren  $x, \eta, \zeta, \dots$  mit  $x = (X_1, X_2, \dots, X_n), \dots$ , und fassen diese zu  $V_n(I(R))$  zusammen, sowie reelle  $n \times m$ -Intervallmatrizen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \dots$  mit  $\mathfrak{X} = (X_{ij}), \dots$ , welche

in  $M_{n,m}(I(R))$  zusammengefaßt seien. Reelle Vektoren bzw. Matrizen schreiben wir als  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \dots$  bzw.  $\underline{\tilde{x}}, \underline{\tilde{y}}, \underline{\tilde{z}}, \dots$  und können diese wie oben identifizieren. Verknüpfungen zwischen Intervallvektoren bzw. Intervallvektoren und -matrizen werden wie üblich formal definiert.

Durchmesser, Betrag, Abstand und Inklusion werden elementweise definiert. Es gilt für derartige Verknüpfungen ebenfalls die Teilmengeneigenschaft. Weitere Rechenregeln findet man etwa in [3].

Wir betrachten nun Iterationsvorschriften  $J$ , durch deren Anwendung Folgen von reellen Intervallvektoren  $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  entstehen. Folgen, die durch Anwenden von  $J$  entstehen und die gegen das Grenzelement  $\underline{x}$  konvergieren, fassen wir zur Menge  $C(J, \underline{x})$  zusammen und diese sei nicht leer. Da viele Realisierungen von Iterationsvorschriften zur Berechnung von Einschließungen für Lösungen bestimmter Probleme benutzt werden, wollen wir die Voraussetzung

$$(6) \quad \underline{x} \subseteq \underline{x}^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

treffen. Für die Abweichung eines Folgeelementes  $\underline{x}^{(k)}$  vom Grenzwert  $\underline{x}$  können wir nun entweder

$$(7) \quad \underline{a}^{(k)} = q(\underline{x}^{(k)}, \underline{x}) = (q(X_i^{(k)}, X_i)) \geq \underline{0}$$

oder

$$(8) \quad \underline{b}^{(k)} = d(\underline{x}^{(k)}) - d(\underline{x}) = (d(X_i^{(k)})) - (d(X_i)) \geq \underline{0}$$

als Maß heranziehen. Beides sind nichtnegative reelle Vektoren und es gilt

$$(9) \quad \underline{a}^{(k)} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{b}^{(k)} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{x}^{(k)} = \underline{x}$$

Beide sind bezüglich der (komponentenweisen) Inklusion monotone Abbildungen, d.h. es gilt

$$(10) \quad \underline{x}^{(m)} \subseteq \underline{x}^{(k)} \Rightarrow \underline{a}^{(m)} \leq \underline{a}^{(k)}, \quad \underline{b}^{(m)} \leq \underline{b}^{(k)},$$

Eine im Sinne der Inklusion kleinere Einschließung für  $\underline{x}$  erzeugt also beidemale auch eine kleinere Größe für die Abweichung von  $\underline{x}$ .

Wir geben in der Intervallmenge  $I(R)$  dazu noch ein anschauliches Beispiel. Sei dazu speziell  $X = [x, x]$  der Grenzwert der Folge  $\{X_{-}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ , dann erhalten wir einmal

$$\underline{a}^{(k)} = \max \{ |x_1^{(k)} - x|, |x_2^{(k)} - x| \}$$

als maximale Abweichung eines Elementes  $\tilde{x} \in X^{(k)}$  vom Grenzwert  $x$  und ein andermal

$$b^{(k)} = d(X^{(k)})$$

als den Abstand der beiden  $x$  einschliessenden Schranken voneinander.

Jetzt betrachten wir zu jeder Folge  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  aus  $C(J, x)$ , welche zusätzlich noch (6) erfüllt, die zugehörigen Nullfolgen  $\{a^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  sowie  $\{b^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ . Hierauf wenden wir nun die bekannten Definitionen für eine Konvergenzordnung wie in [6] an.

Dazu definieren wir den zu einer solchen Folge gehörenden  $R$ -Faktor mit Hilfe einer Vektornorm  $\|\cdot\|$  durch

$$R_p\{c^{(k)}\} = \begin{cases} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|c^{(k)}\|^{\frac{1}{k}}, & p = 1, \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \|c^{(k)}\|^{p^{-k}}, & p > 1, \end{cases}$$

wobei für  $\{c^{(k)}\}$  entweder die Folge  $\{a^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  oder  $\{b^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  steht. Diese Definition ist unabhängig von der verwendeten Vektornorm  $\|\cdot\|$ , wie aufgrund der Normäquivalenz in [6] bewiesen wird. Darüberhinaus ist diese Definition unter den getroffenen Voraussetzungen auch unabhängig, davon, ob  $\{a^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  oder  $\{b^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  verwendet wird. Das zeigt das folgende

**Lemma 1:** *Es sei  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  eine durch  $J$  erzeugte Folge mit dem Grenzwert  $x$ , für die (6) erfüllt ist. Dann gilt für die daraus gebildeten Folgen  $\{a^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  und  $\{b^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ :*

$$R_p\{a^{(k)}\} = R_p\{b^{(k)}\}, \quad p \geq 1.$$

**Beweis:** Für Intervalle  $X \subseteq Y$  gilt bekanntlich

$$\frac{1}{2} (d(Y) - d(X)) \leq q(X, Y) \leq d(Y) - d(X)$$

woraus dann unmittelbar

$$\frac{1}{2} \bar{b}^{(k)} \leq \bar{a}^{(k)} \leq \bar{b}^{(k)}$$

folgt. Somit folgt für eine monotone Vektornorm  $\|\cdot\|$

$$\frac{1}{2} \|\bar{b}^{(k)}\| \leq \|\bar{a}^{(k)}\| \leq \|\bar{b}^{(k)}\|$$

und da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{p^{-k}} = 1$ ,  $p > 1$ , gilt, schließen wir weiter

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\dot{b}^{(k)}\|^{p^{-k}} &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\dot{a}^{(k)}\|^{p^{-k}} \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{p^{-k}} \|\dot{b}^{(k)}\|^{p^{-k}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\dot{b}^{(k)}\|^{p^{-k}}. \end{aligned}$$

Analoges folgt für  $p = 1$ .

Unter der Voraussetzung (6) an die Iterationsfolgen  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  sind also unsere weiteren Betrachtungen unabhängig davon ob wir zu  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  die Folge  $\{a^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  oder  $\{b^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  betrachten. Daß dies ohne die Voraussetzung (6) nicht immer der Fall ist, zeigt folgendes kleine Beispiel. Wir betrachten dazu die Folge  $\left\{[0, 1] + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}_{k=0}^{\infty}$  mit dem Grenzwert  $[0, 1]$ . Offenbar ist  $a^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$  und damit für  $p = 1$

$$R_1\{a^{(k)}\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

wogegen  $b^{(k)} \equiv 0$  und damit  $R_1\{b^{(k)}\} = 0$  wird.

Wir betrachten also nur noch solche Folgen aus  $C(J, x)$ , für welche (6) gilt und fassen diese zur Teilmenge  $\tilde{C}(J, x)$  zusammen. Der  $R$ -Faktor von  $J$  ist dann definiert als

$$R_p(J, x) = \sup \{R_p\{a^{(k)}\} \mid \{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \in \tilde{C}(J, x)\}, \quad p \geq 1.$$

Dieser  $R$ -Faktor ist nach dem vorhin gezeigten unabhängig von der verwendeten Norm  $\|\cdot\|$  und hätte gleichwertig auch mit Hilfe  $\{\dot{b}^{(k)}\}$  definiert werden können. Schließlich erhalten wir die  $R$ -Ordnung der Iterationsvorschrift  $J$  mit dem Grenzwert  $x$  als

$$O_R(J, x) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } R_p(J, x) = 0 \text{ für } p \geq 1 \\ \inf \{p \mid p \in [1, \infty), R_p(J, x) = +\infty\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die hier wiedergegebenen Definitionen finden sich für den Fall von Vektorfolgen im reellen Vektorraum  $V_n(R)$  bei Ortega und Rheinboldt in [6]. Wir wollen nun noch eine für die praktische Abschätzung der  $R$ -Ordnung nützliche Aussage wiedergeben (vergleiche [6], S. 297).

**Satz 1:** Sei  $J$  eine Iterationsvorschrift mit dem Grenzwert  $x$  und sei  $\tilde{C}(J, x)$  die Menge aller damit erzeugten Folgen mit den oben angegebenen Eigenschaften.

Existiert dann ein  $p \geq 1$  und eine Konstante  $\gamma_2$ , so daß für alle Folgen  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  aus  $\tilde{C}(J, x)$  für eine Norm  $\|\cdot\|$

$$\|a^{(k+1)}\| \leq \gamma_2 \|a^{(k)}\|^p, \quad k \geq k(\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}),$$

oder

$$\|b^{(k+1)}\| \leq \gamma_2 \|b^{(k)}\|^p, \quad k \geq k(\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}),$$

gilt, dann erfüllt die  $R$ -Ordnung von  $J$  die Ungleichung

$$O_R(J, x) \leq p.$$

Gibt es andererseits eine Konstante  $\gamma_1 > 0$  und eine Folge  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  aus  $\tilde{C}(J, x)$  mit

$$\|a^{(k+1)}\| \geq \gamma_1 \|a^{(k)}\|^p > 0, \quad k \geq k_0,$$

oder

$$\|b^{(k+1)}\| \geq \gamma_1 \|b^{(k)}\|^p > 0, \quad k \geq k_0,$$

dann folgt für die  $R$ -Ordnung von  $J$

$$O_R(J, x) \geq p.$$

Sind beide Forderungen mit Konstanten  $\gamma_2$  und  $\gamma_1$  erfüllt, so gilt schliesslich

$$O_R(J, x) = p.$$

Der Beweis dieses Lemmas kann mit Hilfe der vorher bewiesenen Aussagen analog wie in [6] durchgeführt werden.

Es sei vermerkt, dass sich die gleichen Überlegungen auch für Iterationsvorschriften durchführen lassen, deren Anwendung auf Folgen von Intervallmatrizen  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  führt.

**2.** Wir wollen nun die angegebenen Ergebnisse auf ein Iterationsverfahren anwenden, welches in [1] eingeführt wurde. Dazu sei  $x^{(0)}$  ein vor-

gegebener Intervallvektor, der eine Nullstelle  $x^*$  des reellen (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$(11) \quad \underline{f}(x) = \underline{a}$$

enthält. Bezeichnet nun

$$(12) \quad \underline{F}^{(k)} = \underline{f}'(x^{(k)})$$

die intervallmäßige Auswertung der Ableitung von  $f$  für  $x^{(k)}$  dann braucht man für die Durchführung der Iterationsvorschrift eine Intervallmatrix  $\mathfrak{B}^{(0)}$  mit der Eigenschaft

$$\{\underline{F}^{-1} \mid \underline{F} \in \underline{F}^{(0)}\} \subseteq \mathfrak{B}^{(0)}.$$

Damit betrachten wir das folgende Iterationsverfahren

$$(V) \quad \begin{cases} x^{(k+1)} = \{m(x^{(k)}) - \mathfrak{B}^{(k)} \underline{f}(m(x^{(k)}))\} \cap x^{(k)} \\ \mathfrak{B}^{(k+1)} = \{m(\mathfrak{B}^{(k)}) + \mathfrak{B}^{(k)}(\mathfrak{G} - \underline{F}^{(k+1)} m(\mathfrak{B}^{(k)}))\} \cap \mathfrak{B}^{(k)} \end{cases}$$

$k \geq 0$ . ( $\mathfrak{G}$  bezeichnet die Einheitsmatrix).

Dabei bezeichnet  $m(x)$  den Mittelpunkt des Intervallvektors  $x$ . Entsprechend ist  $m(\mathfrak{X})$  definiert. Durch dieses Verfahren wird eine Folge von Intervallvektoren und Intervallmatrizen berechnet mit

$$x^{(0)} \supseteq x^{(1)} \supseteq \dots \text{ und } \mathfrak{B}^{(0)} \supseteq \mathfrak{B}^{(1)} \supseteq \dots$$

für welche die folgenden Aussagen gelten.

**Satz 2:** Es sei  $x^{(0)}$  ein Intervallvektor und  $x^* \in x^{(0)}$  Nullstelle des Gleichungssystems (11). Die Fréchet-Ableitung von  $f$  genüge in  $x^{(0)}$  einer Lipschitz-Bedingung. Ausserdem genüge die intervallarithmetische Auswertung  $\underline{f}'(x)$  der Fréchet-Ableitung für  $x \subseteq x^{(0)}$  einer Bedingung

$$(13) \quad \|d(\underline{f}'(x))\| \leq c \|d(x)\|$$

für eine Norm  $\|\cdot\|$ . Für die nach (V) berechneten Folgen von Intervallvektoren  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  und Intervallmatrizen  $\{\mathfrak{B}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  gilt dann

a) Jeder Vektor  $x^{(k)}$ ,  $k \geq 0$ , enthält  $x^*$ .

b) Ist jede Matrix  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}^{(0)}$  nichtsingulär dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{B}^{(k)} = \underline{f}'(x^*)^{-1}.$$

c) Es sei  $\mathfrak{H}^{(k)}$  die Intervallmatrix, deren erste Spalte gleich dem Intervallvektor  $\mathfrak{x}^{(k)}$  ist und deren übrige Spalten durch die Spalten der Matrix  $\mathfrak{B}^{(k)}$  gebildet werden:  $\mathfrak{H}^{(k)} = (\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{B}^{(k)})$ . Dann gilt

$$O_R((V), (\mathfrak{x}^*, \mathfrak{f}'(\mathfrak{x}^*)^{-1})) \geq 2.$$

Beweis: Die Aussagen a) und b) wurden bereits in [1] bewiesen. Zum Beweis von c) setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{f}'(\mathfrak{x}^*).$$

Dann folgt aus (V)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}^{(k+1)} - \mathfrak{x}^* &\subseteq -\mathfrak{B}^{(k)} [\mathfrak{f}(m(\mathfrak{x}^{(k)})) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x}^*) - \mathfrak{f}'(\mathfrak{x}^*)(m(\mathfrak{x}^{(k)}) - \mathfrak{x}^*)] \\ &\quad - \mathfrak{B}^{(k)} (\mathfrak{J} \cdot (m(\mathfrak{x}^{(k)}) - \mathfrak{x}^*)) + m(\mathfrak{x}^{(k)}) - \mathfrak{x}^* \\ &\subseteq -\mathfrak{B}^{(k)} [\mathfrak{f}(m(\mathfrak{x}^{(k)})) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x}^*) - \mathfrak{f}'(\mathfrak{x}^*)(m(\mathfrak{x}^{(k)}) - \mathfrak{x}^*)] \\ &\quad + (\mathfrak{J}^{-1} - \mathfrak{B}^{(k)}) (\mathfrak{J} \cdot (m(\mathfrak{x}^{(k)}) - \mathfrak{x}^*)). \end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen

$$q(\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{x}^*) = |\mathfrak{x}^{(k)} - \mathfrak{x}^*|$$

$$q(\mathfrak{B}^{(k)}, \mathfrak{J}^{-1}) = |\mathfrak{B}^{(k)} - \mathfrak{J}^{-1}|$$

unter Verwendung einer monotonen Norm und aufgrund des Normäquivalenzsatzes

$$\begin{aligned} \|q(\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{x}^*)\| &\leq \| |\mathfrak{B}^{(k)}| \| \cdot c_1 \cdot \|q(\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{x}^*)\|^2 + c_2 \|q(\mathfrak{B}^{(k)}, \mathfrak{J}^{-1})\| \cdot \\ &\quad \cdot \| |\mathfrak{J}| \| \cdot \|q(\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{x}^*)\| \end{aligned}$$

Ähnlich erhält man

$$\begin{aligned} \|q(\mathfrak{B}^{(k+1)}, \mathfrak{J}^{-1})\| &\leq c \cdot 3 \| |\mathfrak{J}| \| \cdot \|q(\mathfrak{B}^{(k)}, \mathfrak{J}^{-1})\|^2 + \\ &\quad + \| |\mathfrak{B}^{(k)}| \| c_4 \|q(\mathfrak{x}^{(k+1)}, \mathfrak{x}^*)\|. \end{aligned}$$

Für die  $n \times (n+1)$ -Matrix  $\mathfrak{U} = (\mathfrak{b}, \mathfrak{B})$  führen wir eine Norm ein durch

$$\| |\mathfrak{U}| \| = \max \{ \| |\mathfrak{b}| \|, \| |\mathfrak{B}| \| \}.$$

Mit  $r^{(k)} = \| (q(\mathfrak{x}^{(k)}, \mathfrak{x}^*), q(\mathfrak{B}^{(k)}, \mathfrak{J}^{-1})) \|$  gilt dann mit  $\| |\mathfrak{B}^{(k)}| \| < s$  wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{J}^{-1} \text{ und mit } \| |\mathfrak{J}| \|' = p$$

$$\|q(\mathfrak{x}^{(k+1)}, \mathfrak{x}^*)\| \leq (sc_1 + pc_2)(r^{(k)})^2$$

$$\|q(\mathfrak{B}^{(k+1)}, \mathfrak{J}^{-1})\| \leq (c_3 p + s^2 c_4 (sc_1 + pc_2))(r^{(k)})^2.$$

Setzen wir daher noch

$$\gamma = \max \{sc_1 + pc_2, c_3p + s^2c_4(sc_1 + pc_2)\},$$

so folgt

$$r^{(k+1)} \leq \gamma(r^{(k)})^2, \quad k \geq 0,$$

und damit nach Satz 2 die Behauptung c).

*Bemerkung:* Die Bedingung (13) ist für die intervallmäßige Auswertung von rationalen Funktionen stets erfüllt (siehe [5]), kann aber auch für allgemeinere Funktionen nachgewiesen werden.

Wir bemerken abschliessend, dass Satz 2 eine Verschärfung der in [1] angegebenen Aussagen darstellt, wo nur die überlineare Konvergenz des Verfahrens (V) bewiesen wurde. In [4] wurde eine Modifikation von (V) angegeben, bei der die Folge der Durchmesser durch eine quadratisch konvergente Folge majorisiert wird. Dazu ist in jedem Schritt zusätzlich ein lineares Punktgleichungssystem zu lösen. Satz 2 zeigt, daß dieser zusätzliche Aufwand auf die Konvergenzordnung keinen Einfluß hat.

#### LITERATUR

- [1] Alefeld, G., Herzberger, J. *Nullstelleneinschliessung mit dem Newton-Verfahren ohne Invertierung von Intervallmatrizen*. Numer. Math. **19**, 56–64 (1972)
- [2] Apostolatos, N., Kulisch, U., *Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen*. Elektron. Rechenanlagen **10**, 75–85 (1968).
- [3] Kulisch, U., *Grundzüge der Intervallrechnung*. Überblicke Mathematik 2, Bibliographisches Institut, Mannheim (1969)
- [4] Madsen, K., *On the solution of nonlinear equations in interval arithmetics*. BIT **13**, 428–433 (1973)
- [5] Moore, R. E., *Interval Analysis*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall Inc. (1966)
- [6] Ortega, M., Rheinboldt, W. C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York–London (1970)

Eingegangen am 11. I. 1974.

*Institut für Angewandte Mathematik  
Universität Karlsruhe*