

G. ALEFELD / J. HERZBERGER

Über Simultanverfahren zur Bestimmung reeller Polynomwurzeln

In dieser Arbeit werden zwei Verfahren — ein Gesamtschritt- und ein Einzelschrittverfahren — zur simultanen Bestimmung von reellen Polynomwurzeln angegeben. Besitzt das Polynom reelle einfache Wurzeln, so sind beide Verfahren stets konvergent, falls die Nullstellen in disjunkte Intervalle eingeschlossen sind. Das Gesamtschrittverfahren konvergiert mindestens quadratisch. Bezeichnet $\sigma_n > 1$ die einzige positive Nullstelle des Polynoms $p(\mu) = \mu^n - \mu - 1$, so konvergiert das Einzelschrittverfahren mindestens von der Ordnung $1 + \sigma_n > 2$.

In this paper we are representing two methods — a single-step-method and a total-step-method — for computing all roots of a polynomial simultaneously. If all roots are simple and real and if one knows disjunct intervals, in which the roots are contained, both methods are always convergent. The convergence behaviour of the total-step-method is at least quadratic. Let $\sigma_n > 1$ be the unique positive zero of $p(\mu) = \mu^n - \mu - 1$. Then the convergence order of the single-step-method is at least $1 + \sigma_n > 2$.

В этой работе представлены два метода — метод простой итерации и обношаго вои циклический процесс — для совместного определения действительных корней многочлена. Имеет многочлен действительные простые корни, то, в случае, если нулевые точки заключены в раздельных интервалах, оба метода обладают всегда сходимостью. Метод простой итерации обладает по крайней мере квадратичной сходимостью. Означает $\sigma_n > 1$ единственный положительный корень многочлена $p(\mu) = \mu^n - \mu - 1$, то порядок сходимости обношагового циклического процесса равен по крайней мере $1 + \sigma_n > 2$.

1. Einleitung

Die meisten Verfahren zur Berechnung von Polynomwurzeln sind so aufgebaut, daß sie jeweils nur eine Wurzel oder ein Wurzelpaar bestimmen. Die bekanntesten Verfahren, welche gleichzeitig alle Wurzeln bestimmen, sind der QD-Algorithmus und das GRAEFFE-Verfahren. KERNER hat 1966 ein Verfahren zur simultanen Bestimmung aller Nullstellen eines Polynoms angegeben [15]. Das KERNERSche Vorgehen ist mit dem NEWTON-Verfahren — angewandt auf die VIETASchen Wurzelsätze — identisch und konvergiert daher (bei nur einfachen Nullstellen) quadratisch. Einen weiteren Beitrag zur simultanen Bestimmung aller Nullstellen hat kürzlich HENRICI geliefert [6], [7]. Unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen hinreichend gut in Kreisgebiete eingeschlossen sind und genügend weit voneinander entfernt liegen, gibt er mindestens kubisch konvergente Verfahren an, bei denen die Nullstellen fortwährend in Kreisgebiete eingeschlossen werden, deren Radien gegen Null konvergieren. Die Algorithmen von HENRICI verwenden eine Arithmetik für Kreisgebiete.

In dieser Arbeit behandeln wir das speziellere Problem, die sämtlich als reell und einfach vorausgesetzten Nullstellen eines reellen Polynoms zu bestimmen. In diesem Falle kann man sich auf reelle Rechnung beschränken. Da die von HENRICI angegebene Kreisarithmetik bei Spezialisierung auf reelle Intervalle in die bekannte Intervallrechnung übergeht, kann man seine Algorithmen anwenden. Diese behalten jedoch auch in diesem Spezialfall ihren lokalen Konvergenzcharakter, wie einfache Beispiele zeigen.

Wir geben in dieser Arbeit zwei Algorithmen zur Lösung der genannten Aufgabe an, die allein unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen in disjunkte Intervalle eingeschlossen sind, stets konvergent sind. Die Nullstellen werden dabei von monoton konvergenten Schranken eingeschlossen. Diese Algorithmen konvergieren mindestens quadratisch, benötigen jedoch nicht die Ableitung. Das Verfahren (GV) aus Abschnitt 3 kann als intervallmäßige Durchführung des KERNERSchen Verfahrens aufgefaßt werden.

Die angegebenen Algorithmen können sehr einfach zur Berechnung sämtlicher Eigenwerte von Triagonalmatrizen verwendet werden, sobald diese — etwa mit Hilfe von STURMSchen Ketten — in disjunkte Intervalle eingeschlossen sind. Dies wird an einem abschließenden Beispiel erläutert.

Im folgenden wird von der reellen Intervallarithmetik Gebrauch gemacht. Die Verknüpfungen zweier reeller abgeschlossener Intervalle $X = [x_1, x_2]$ und $Y = [y_1, y_2]$ sind definiert durch

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad * \in \{+, -, \cdot, :\}.$$

Die expliziten Regeln findet man etwa in [12] oder [14]. Eine reelle Zahl x kann als spezielles Intervall der Form $[x, x]$ aufgefaßt werden. Im folgenden verwenden wir daher die gleichen Symbole für die Verknüpfung von reellen Zahlen und/oder Intervallen. Sämtliche Verknüpfungen genügen insbesondere der Teilmengeneigenschaft:

$$X_i \subset Y_i, \quad i = 1, 2 \Rightarrow X_1 * X_2 \subset Y_1 * Y_2.$$

Wegen weiterer Einzelheiten siehe etwa [12] und [14].

2. Problemstellung

Vorgelegt sei das reelle Polynom

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1)$$

und es sei ohne Einschränkung $a_n = 1$. Ferner besitze $p_n(x)$ die n reellen Nullstellen

$$\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_n,$$

wobei mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählt sind. Für die Nullstellen sei bekannt, daß sie zwischen den Schranken

$$x_{i,1}^{(0)} \leq \zeta_i \leq x_{i,2}^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

liegen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß diese Schranken den Bedingungen

$$x_{i,2}^{(0)} < x_{i+1,1}^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

genügen, d. h. daß die Einschließungsintervalle für die Nullstellen disjunkt sind.

Das Polynom (1) läßt sich darstellen als

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i)$$

oder

$$p_n(x) = (x - \zeta_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - \zeta_i),$$

woraus dann

$$\zeta_j = x - \frac{p_n(x)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - \zeta_i)}$$

folgt.

Ist ζ_i einfache Nullstelle von $p_n(x)$ und ist $x_j^{(0)}$ aus dem Intervall

$$X_j^{(0)} = [x_{j,1}^{(0)}, x_{j,2}^{(0)}]$$

gewählt, dann ist

$$0 \in \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_j^{(0)} - X_i^{(0)}) =: P_j^{(0)}$$

und wegen der bekannten Einschließungseigenschaft der Intervallverknüpfungen gilt

$$\zeta_j \in X_j^{(1)} = \left\{ x_j^{(0)} - \frac{p_n(x_j^{(0)})}{P_j^{(0)}} \right\} \cap X_j^{(0)}. \quad (2)$$

Somit liefert der rechts stehende Ausdruck neue Schranken mit

$$x_{j,1}^{(0)} \leq x_{j,1}^{(1)} \leq \zeta_j \leq x_{j,2}^{(1)} \leq x_{j,2}^{(0)}$$

für die Nullstelle ζ_j .

3. Verfahren

Die oben hergeleiteten Beziehungen (2) geben Anlaß zu den folgenden Iterationsverfahren zur simultanen Verbesserung der Eingrenzung der Nullstellen von $p_n(x)$:

A) Gesamtschrittverfahren

$$x_j^{(k)} \in X_j^{(k)},$$

$$P_j^{(k)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_j^{(k)} - X_i^{(k)}),$$

$$X_j^{(k+1)} = \left\{ x_j^{(k)} - \frac{p_n(x_j^{(k)})}{P_j^{(k)}} \right\} \cap X_j^{(k)},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

(GV)

B) Einzelschrittverfahren

$$x_j^{(k)} \in X_j^{(k)},$$

$$Q_j^{(k)} = \prod_{i=1}^{j-1} (x_j^{(k)} - X_i^{(k+1)}) \prod_{i=j+1}^n (x_j^{(k)} - X_i^{(k)}),$$

$$X_j^{(k+1)} = \left\{ x_j^{(k)} - \frac{p_n(x_j^{(k)})}{Q_j^{(k)}} \right\} \cap X_j^{(k)},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(EV)

Sind die Nullstellen ζ_j einfach, dann sind die beiden Verfahren (GV) und (EV) unbeschränkt durchführbar und liefern für jede Nullstelle monoton konvergente Folgen von Schranken

$$x_{j,1}^{(k)} \leq \zeta_j \leq x_{j,2}^{(k)}$$

mit

$$x_{j,1}^{(0)} \leq x_{j,1}^{(1)} \leq x_{j,1}^{(2)} \leq \dots \leq x_{j,1}^* \leq \zeta_j \leq x_{j,2}^* \leq \dots \leq x_{j,2}^{(2)} \leq x_{j,2}^{(1)} \leq x_{j,2}^{(0)} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n.$$

Die nächsten Aussagen zeigen nun, daß die oben getroffenen Voraussetzungen allein schon ausreichen, um in jedem Falle die Beziehung

$$x_{j,1}^* = \zeta_j = x_{j,2}^*, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

d. h. die Konvergenz der Schranken gegen die Nullstellen, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{j,1}^{(k)} = \zeta_j = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{j,2}^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

zu sichern. Dabei nehmen wir bei beiden Verfahren an, daß $x_j^{(k)}$ eine stetige Funktion der Schranken $x_{j,1}^{(k)}$ und $x_{j,2}^{(k)}$ ist. Eine naheliegende Wahl ist etwa

$$x_j^{(k)} = (x_{j,1}^{(k)} + x_{j,2}^{(k)})/2. \quad (3)$$

Satz 1: Für das Polynom (1) seien für die n einfachen, reellen Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_n Einschließungsintervalle $X_j^{(0)} \ni \zeta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, mit

$$X_j^{(0)} \cap X_i^{(0)} = \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j < i,$$

bekannt. Dann sind die Iterierten $\{X_j^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $j = 1, 2, \dots, n$, nach Verfahren (GV) bzw. (EV) konvergent gegen die Nullstellen von (1).

Beweis: Wir nehmen an, daß für ein j für die Grenzwerte

$$x_{j,1}^* < x_{j,2}^* \quad (4)$$

beim Verfahren (GV) gilt. Auf Grund der Stetigkeit der Iterationsvorschrift gilt dann mit $P_j^* = \prod_{i=1, i \neq j}^n (x_j^* - x_i^*)$

$$X_j^* = [x_{j,1}^*, x_{j,2}^*] = \left\{ x_j^* - \frac{p_n(x_j^*)}{P_j^*} \right\} \cap X_j^*. \quad (5)$$

Im Falle $x_j^* = \zeta_j$ kann also die Ungleichung (4) nicht erfüllt sein, d. h., es ist $x_j^* \neq \zeta_j$. Damit gilt aber auf Grund der getroffenen Voraussetzungen auch $p_n(x_j^*) \neq 0$ und somit

$$0 \in \frac{p_n(x_j^*)}{P_j^*}.$$

Andererseits ist wegen $x_j^* \in X_j^*$ und der Beziehung (5) auch

$$x_j^* \in x_j^* - \frac{p_n(x_j^*)}{P_j^*}$$

und somit

$$0 \in \frac{p_n(x_j^*)}{P_j^*}.$$

Widerspruch!

Der Beweis für das Verfahren (EV) erfolgt vollständig analog.

4. Konvergenzordnungen

Für die Verfahren (GV) und (EV) wollen wir nun die Konvergenzordnung untersuchen. Als Maß, mit dem die Schranken gegen die Lösung konvergieren, dient uns die Konvergenzordnung der Nullfolge $\{d^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ mit

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} d(X_j^{(k)}) = \max_{1 \leq j \leq n} (x_{j,2}^{(k)} - x_{j,1}^{(k)}).$$

Als Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens I mit dem Grenzwert x^* verstehen wir dabei (siehe [16, Seite 290]) die Größe

$$O_R(I, x^*) = \begin{cases} \infty & \text{falls } R_p(I, x^*) = 0 \forall p \in [1, \infty) \\ \inf \{ p \in [1, \infty) \mid R_p(I, x^*) = 1 \} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$R_p(I, x^*) = \sup \{ R_p\{x^{(k)}\} \mid \{x^{(k)}\} \in C(I, x^*) \}, \quad 1 \leq p < \infty$$

und

$$R_p\{x^k\} = \begin{cases} \limsup_{k \rightarrow \infty} |x^{(k)} - x^*|^{1/k}, & p = 1 \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} |x^{(k)} - x^*|^{1/p^k}, & p > 1 \end{cases}$$

($C(I, x^*)$ bezeichnet die Menge aller Folgen, die man mit I berechnen kann und die gegen x^* konvergieren).

Zunächst geben wir einige Rechenregeln für die Durchmesserbildung

$$d(Y) = d(\{y_1, y_2\}) = y_2 - y_1$$

bei reellen Intervallen Y, Z, \dots an. Deren Gültigkeit ist einfach nachzurechnen und man findet diese Regeln etwa in [14].

- (a) $d(Y \pm Z) = d(Y) + d(Z)$,
 (b) $d(aY) = |a| d(Y)$ für $a \in R$,
 (c) $d\left(\frac{1}{Z}\right) \leq \gamma d(Z)$ für $0 \in Y$ und $Z \subset Y$.

Mit der Betragsfunktion

$$(d) \quad |Y| := \max\{|y_1|, |y_2|\}$$

gilt außerdem

$$(e) \quad d(YZ) \leq |Y| d(Z) + |Z| d(Y).$$

Mit Hilfe dieser Regeln sieht man leicht, daß die beiden Verfahren (GV) und (EV) mindestens überlinear konvergieren. Wir führen den Nachweis für das Verfahren (GV) durch.

Durch Anwendung der Durchmesserbildung d und der hierfür geltenden Rechenregeln (a) bis (e) auf die Iterationsvorschrift (GV) folgt für $X_j^{(k+1)}$:

$$d(X_j^{(k+1)}) \leq d\left(\left\{x_j^{(k)} - \frac{p_n(x_j^{(k)})}{P_j^{(k)}}\right\}\right) = d(x_j^{(k)}) + d\left(\frac{p_n(x_j^{(k)})}{P_j^{(k)}}\right) = |p_n(x_j^{(k)})| d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right).$$

Wegen

$$|p_n(x_j^{(k)})| = |p_n(x_j^{(k)}) - p_n(\zeta_j)| = |(x_j^{(k)} - \zeta_j) p'_n(\xi_j)| \leq d(X_j^{(k)}) |p'_n(\xi_j)|$$

gilt schließlich

$$d(X_j^{(k+1)}) \leq d(X_j^{(k)}) |p'_n(\xi_j)| d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right).$$

Da $X_i^{(k)} \rightarrow \zeta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, gilt, folgt

$$\frac{p'_n(\xi_j)}{P_j^{(k)}} \rightarrow \frac{p'_n(\zeta_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\zeta_j - \zeta_i)}$$

und damit

$$|p'_n(\xi_j)| d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right) \rightarrow 0.$$

Also gilt

$$d^{(k+1)} = \max_{1 \leq j \leq n} d(X_j^{(k+1)}) \leq d^{(k)} c^{(k)} \quad (6)$$

mit

$$c^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} |p'_n(\xi_j)| d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Damit ist die überlineare Konvergenz des Verfahrens (GV) nachgewiesen.

Nun untersuchen wir die Konstanten $c^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, etwas eingehender. Dabei wenden wir auf den Ausdruck $d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right)$ die Regeln (a)–(e) an und erhalten damit im einzelnen:

Wegen

$$\frac{1}{P_j^{(k)}} \leq \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (X_j^{(0)} - X_i^{(0)})}$$

folgt nach (c)

$$d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right) \leq \gamma d(P_j^{(k)})$$

und durch fortgesetztes Anwenden von (e) erhält man

$$d\left(\frac{1}{P_j^{(k)}}\right) \leq \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \varepsilon_{i,j} d(X_i^{(k)}) \leq \tilde{\gamma} d^{(k)}$$

mit geeigneten Konstanten $\varepsilon_{i,j}$, die nur von $X_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, abhängen. Hierdurch können wir (7) verschärfen zu

$$c^{(k)} = \max_{1 \leq j \leq n} |p'_n(\xi_j)| d \left(\frac{1}{P_j^{(k)}} \right) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |p'_n(\xi_j)| \right) \tilde{\gamma} d^{(k)} \leq c d^{(k)}$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten c .

Somit gilt insgesamt

$$d^{(k+1)} \leq c(d^{(k)})^2$$

und somit nach Satz 9.3.3 in [16]

$$O_R((GV, 0)) \geq 2.$$

Damit haben wir den Beweis für den folgenden

Satz 2: *Unter den in Satz 1 genannten Voraussetzungen konvergiert die nach (GV) erzeugte Iterationsfolge mindestens quadratisch gegen die Nullstellen von (1).*

Für das Einzelschrittverfahren können wir die folgende Aussage beweisen:

Satz 3: *Für die Konvergenzordnung des Einzelschrittverfahrens gilt:*

$$O_R((EV), 0) \geq 1 + \sigma_n.$$

Dabei ist $\sigma_n > 1$ die einzige positive Nullstelle des Polynoms

$$p(\mu) = \mu^n - \mu - 1.$$

Beweis: Wir setzen $d_i^{(k)} = d(X_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Analog wie beim Gesamtschrittverfahren läßt sich dann

$$d_i^{(k+1)} \leq d_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{ij} d_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{ij} d_j^{(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

mit von k unabhängigen Konstanten ε_{ij} zeigen. Mit $c = (n-1) \max_{\substack{i,j=1(1)n \\ i \neq j}} \{\varepsilon_{ij}\}$ läßt sich dies schreiben als

$$d_i^{(k+1)} \leq c d_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} d_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n d_j^{(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n.$$

Mit $\gamma = (n-1)c$, $d_i^{(k)} = \frac{1}{\gamma} \eta_i^{(k)}$, $i = 1(1)n$, $\varkappa = \frac{c}{\gamma}$ geht dies über in

$$\eta_i^{(k+1)} \leq \varkappa \eta_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n \eta_j^{(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} d_i^{(k)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, können wir

$$\eta_i^{(0)} \leq \eta < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

annehmen. Damit erhalten wir

$$\eta_i^{(k+1)} \leq \eta m_i^{(k+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$$

Die Vektoren $m^{(k)} = (m_i^{(k)})$ berechnen sich dabei nach der Vorschrift

$$m^{(k+1)} = A m^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m_i^{(0)} = 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

wobei die Matrix A folgendermaßen definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach k .

Die Matrix A ist nichtnegativ und ihr gerichteter Graph (siehe [23, Seite 20]) ist streng zusammenhängend, d. h., A ist irreduzibel. Auf Grund des Satzes von PERRON und FROBENIUS (siehe [23, Seite 30]) besitzt A daher einen positiven Eigenwert λ_1 , der gleich dem Spektralradius von A ist. Anwendung von Satz 2.9 in [23, Seite 49], zeigt, daß A primitiv ist. Daher gilt für die übrigen Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ von A

$$\varrho(A) = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (10)$$

Es bezeichne $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ die k -te Potenz der Matrix A . Da A primitiv ist, gilt für ein $k_0 > 0$

$$A^k > 0 \quad \text{für alle } k \geq k_0 \quad (11)$$

(siehe [23, Seite 41]).

Für eine Matrix A mit der Eigenschaft (10) gilt aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ij}^{(k+1)}}{a_{ij}^{(k)}} = \lambda_1.$$

Den Beweis findet man etwa in [24, Seite 179]. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt

$$\frac{a_{ij}^{(k+1)}}{a_{ij}^{(k)}} \geq \lambda_1 - \varepsilon = \varrho(A) - \varepsilon \quad \text{für } k \geq k(\varepsilon) \geq k_0,$$

oder

$$a_{ij}^{(k+1)} \geq \alpha[\varrho(A) - \varepsilon], \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

mit

$$\alpha = \min_{i,j=1(1)n} \{a_{ij}^{(k)}\} > 0.$$

Daher gilt

$$a_{ij}^{(k+2)} \geq a_{ij}^{(k+1)}[\varrho(A) - \varepsilon] \geq \alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^2$$

und allgemein

$$a_{ij}^{(k+r)} \geq \alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots$$

Damit erhält man

$$m^{(k+r)} = A^{k+r} m^{(0)} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k+r)} \right) e \geq (n\alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r) e$$

mit $e = (e_i)$ $e_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, und

$$\eta_i^{(k+r)} \leq \eta^{n\alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad r = 1, 2, \dots; \quad k \geq k(\varepsilon) \geq k_0,$$

oder

$$d_i^{(k+r)} \leq \frac{1}{\gamma} \eta^{n\alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r}.$$

Daher gilt auch mit

$$d^{(k)} = \max_{i=1(1)n} d_i^{(k)}$$

die Beziehung

$$d^{(k+r)} \leq \frac{1}{\gamma} \eta^{n\alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r}.$$

Daraus ergibt sich

$$R_{\varrho(A) - \varepsilon}(d^{(k)}) = \limsup_{r \rightarrow \infty} [d^{(k+r)}]^{1/[\varrho(A) - \varepsilon]^r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\gamma} \eta^{n\alpha[\varrho(A) - \varepsilon]^r} \right]^{1/[\varrho(A) - \varepsilon]^r} = \eta^{\alpha n} < 1$$

und daher

$$O_R((EV), 0) \geq \varrho(A) - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt

$$O_R((EV), 0) \geq \varrho(A).$$

Das charakteristische Polynom $p_n(\lambda)$ von A lautet

$$p_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1) - 1.$$

Durch die Substitution

$$\sigma = \lambda - 1$$

geht dies über in

$$\tilde{p}_n(\sigma) = \sigma^n - \sigma - 1.$$

Wegen $\tilde{p}_n(1) = -1$ und $\tilde{p}_n(2) > 0$ besitzt $\tilde{p}_n(\sigma)$ eine Nullstelle σ_n mit $1 < \sigma_n \leq 2$ und auf Grund der Vorzeichenregel von DESCARTES gibt es keine anderen positiven Nullstellen von $\tilde{p}_n(\sigma)$. Daher gilt für den Spektralradius $\varrho(A)$ von A

$$\varrho(A) = 1 + \sigma_n.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$O_R((EV), 0) \geq 1 + \sigma_n.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

5. Verallgemeinerung

In diesem Abschnitt wollen wir noch auf eine naheliegende Verallgemeinerung von Satz 1 eingehen. Dazu betrachten wir jetzt den Fall, daß für zwei Nullstellen ζ_{j^*-1} und ζ_{j^*} , $2 \leq j^* \leq n$, Einschließungsintervalle

$$x_{j^*-1,1}^{(0)} \leq \zeta_{j^*-1} \leq x_{j^*-1,2}^{(0)} \quad \text{und} \quad x_{j^*,1}^{(0)} \leq \zeta_{j^*} \leq x_{j^*,2}^{(0)}$$

bekannt sind, für die nicht notwendig

$$x_{j^*-1,2}^{(0)} < x_{j^*,1}^{(0)}$$

gilt. Für die anderen Nullstellen gelte dagegen

$$x_{j,2}^{(0)} < x_{j+1,1}^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, j^* - 2, j^*, j^* + 1, \dots, n.$$

Damit beweisen wir den folgenden

Satz 4: Für das Polynom (1) seien für die n einfachen reellen Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_n Einschließungsintervalle $X_j^{(0)} \ni \zeta_j, j = 1, 2, \dots, n$, mit

$$x_{j,2}^{(0)} < x_{j+1,1}^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, j^* - 2, j^*, \dots, n,$$

und

$$x_{j^*-1,1}^{(0)} < x_{j^*,1}^{(0)} \leq x_{j^*-1,2}^{(0)} < x_{j^*,2}^{(0)}$$

bekannt. Liegt im Durchschnitt $X_{j^*-1}^{(0)} \cap X_{j^*}^{(0)}$ höchstens eine der beiden Nullstellen ζ_{j^*-1} und ζ_{j^*} , so konvergiert das Gesamtschrittverfahren

$$P_{j^*-1,1}^{(k)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_{j^*-1,1}^{(k)} - X_i^{(k)}),$$

$$X_{j^*-1}^{(k+1)} = \begin{cases} \left\{ x_{j^*-1,1}^{(k)} - \frac{p_n(x_{j^*-1,1}^{(k)})}{P_{j^*-1,1}^{(k)}} \right\} \cap X_{j^*-1}^{(k)} & \text{für } x_{j^*-1,1}^{(k)} < x_{j^*,1}^{(k)} \\ X_{j^*-1}^{(k)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$P_{j^*,2}^{(k)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_{j^*,2}^{(k)} - X_i^{(k)}),$$

$$X_{j^*}^{(k+1)} = \begin{cases} \left\{ x_{j^*,2}^{(k)} - \frac{p_n(x_{j^*,2}^{(k)})}{P_{j^*,2}^{(k)}} \right\} \cap X_{j^*}^{(k)} & \text{für } x_{j^*-1,2}^{(k)} < x_{j^*,2}^{(k)} \\ X_{j^*}^{(k)} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X_j^{(k+1)} = \left\{ x_j^{(k)} - \frac{p_n(x_j^{(k)})}{P_j^{(k)}} \right\} \cap X_j^{(k)}, \quad j \neq j^*, j^* - 1; \quad x_j^{(k)} \in X_j^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gegen die Nullstellen von (1).

Beweis: Auf Grund der getroffenen Voraussetzung, daß im Durchschnitt $X_{j^*-1}^{(0)} \cap X_{j^*}^{(0)}$ höchstens eine der beiden Nullstellen ζ_{j^*-1} und ζ_{j^*} liegt, folgt in den Fallunterscheidungen für die mögliche Lage von ζ_{j^*-1} jeweils die rechte Beziehung für die Lage von ζ_{j^*} :

(a) $x_{j^*-1}^{(0)} \ni \zeta_{j^*-1} < x_{j^*,1}^{(0)} \Rightarrow x_{j^*,1}^{(0)} \leq \zeta_{j^*} \leq x_{j^*,2}^{(0)},$

(b) $\zeta_{j^*-1} = x_{j^*,1}^{(0)} \Rightarrow x_{j^*-1,2}^{(0)} < \zeta_{j^*} \leq x_{j^*,2}^{(0)},$

(c) $x_{j^*,1}^{(0)} < \zeta_{j^*-1} < x_{j^*-1,2}^{(0)} \Rightarrow x_{j^*-1,2}^{(0)} < \zeta_{j^*} \leq x_{j^*,2}^{(0)},$

(d) $\zeta_{j^*-1} = x_{j^*-1,2}^{(0)} \Rightarrow x_{j^*-1,2}^{(0)} < \zeta_{j^*} \leq x_{j^*,2}^{(0)}.$

Unter der Voraussetzung (a) gilt wegen $\zeta_{j^*-1} \in X_{j^*-1}^{(k)}$ für alle k

$$x_{j^*-1,1}^{(k)} < x_{j^*,1}^{(0)} \leq x_{j^*,1}^{(k)},$$

d. h., $X_{j^*-1}^{(k+1)}$ berechnet sich nach

$$X_{j^*-1}^{(k+1)} = \left\{ x_{j^*-1,1}^{(k)} - \frac{p_n(x_{j^*-1,1}^{(k)})}{P_{j^*-1,1}^{(k)}} \right\} \cap X_{j^*-1}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Wie in Satz 1 zeigt man $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{j^*-1}^{(k)} = \zeta_{j^*-1}$. Daher gibt es ein $k^* \geq 0$, so daß für alle $k \geq k^*$ gilt

$$x_{j^*-1,2}^{(k)} < x_{j^*,2}^{(k)}.$$

Dann berechnet sich $X_{j^*}^{(k+1)}$ nach

$$X_{j^*}^{(k+1)} = \left\{ x_{j^*,2}^{(k)} - \frac{p_n(x_{j^*,2}^{(k)})}{P_{j^*,2}^{(k)}} \right\} \cap X_{j^*}^{(k)}, \quad k \geq k^*,$$

und wie in Satz 1 folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{j^*}^{(k)} = \zeta_{j^*}$.

Den Beweis des Satzes für die drei anderen Fälle zeigt man ähnlich.

Der Inhalt dieses Satzes läßt sich sinngemäß verallgemeinern, falls für mehrere Paare von Nullstellen die angegebenen Voraussetzungen vorliegen. Außerdem bleibt der Inhalt richtig, wenn man an Stelle des Gesamtschrittverfahrens das Einzelschrittverfahren entsprechend modifiziert.

6. Beispiel

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & b_{18} & a_{19} & b_{19} & \\ & & b_{19} & a_{20} & \end{pmatrix}$$

mit $a_i = i, i = 1(1)20$, und $b_i = 0.2, i = 1(1)19$.

Auf Grund des Satzes von GERSCHGORIN liegt in jedem der 20 Intervalle

[0.8; 1.2], [1.6; 2.4], [2.6; 3.4], ... [18.6; 19.4], [19.8; 20.2]

genau ein reeller Eigenwert der Matrix A .

Nach drei Iterationsschritten mit dem Einzelschrittverfahren erhält man die folgenden Einschließungsintervalle für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

[0.9607647801358;	0.9607647801559]	[10.99999999998;	11.00000000003]
[1.999240411984;	1.999240411988]	[11.99999999997;	12.00000000003]
[2.999994825306;	2.999994825314]	[12.99999999997;	13.00000000003]
[3.999999982595;	3.999999982600]	[13.99999999997;	14.00000000002]
[4.999999999963;	4.999999999973]	[14.99999999998;	15.00000000002]
[5.999999999985;	6.000000000013]	[16.00000000002;	16.00000000006]
[6.999999999989;	7.000000000008]	[17.00000001736;	17.00000001742]
[7.999999999992;	8.000000000021]	[18.00000517465;	18.00000517473]
[8.999999999978;	9.000000000015]	[19.00075958799;	19.00075958804]
[9.999999999981;	10.00000000002]	[20.03923521984;	20.03923521989]

Das Beispiel wurde auf der Rechenanlage Elektrológica X8 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe gerechnet (40 Bit Mantissenlänge).

Literatur

- 1 ALEFELD, G., Eine Modifikation des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der reellen Nullstellen einer reellen Funktion, ZAMM 50, T 32—T 33 (1970).
- 2 ALEFELD, G. und HERZBERGER, J., Über das Newton-Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen, ZAMM 50, 773—774 (1970).
- 3 ALEFELD, G. und HERZBERGER, J., Nullstelleneinschließung mit dem Newton-Verfahren ohne Invertierung von Intervallmatrizen, Numer. Math. 19, 56—64 (1972).
- 4 BARTH, W., Nullstellenbestimmung mit der Intervallrechnung, Computing 8, 320—328 (1971).
- 5 CHRIST, H., Realisierung einer Maschinenintervallarithmetic mit beliebigen ALGOL 60 Compilern, Elektronische Rechenanlagen 10, 217—222 (1968).
- 6 HENRICH, P., Circular Arithmetic and the Determination of Polynomial Zeros, In "Conference on Application of Numerical Analysis", Lecture Notes in Mathematics 228, 86—92 (1971), Springer-Verlag.
- 7 GARGANTINI, I. und HENRICH, P., Circular Arithmetic and the Determination of Polynomial Zeros, Numer. Math. 18, 305—320 (1972).
- 8 HANSON, R. J., Automatic Error Bounds for Real Roots of Polynomials having Interval Coefficients, The Computer Journal 13, 284—288 (1970).
- 9 PETERS, G. und WILKINSON, J. H., Practical Problems Arising in the Solution of Polynomial Equations, J. Inst. Maths. Applics. 8, 16—35 (1971).
- 10 HERZBERGER, J., Über die Nullstellenbestimmung bei näherungsweise berechneten Funktionen, Computing 10, 23—31 (1973).
- 11 DARGEL, R. H., LOSCALZO, F. R. und WITT, T. H., Automatic Error Bounds on Real Zeros of Rational Functions, Comm. ACM 9, 806—809 (1966).
- 12 MOORE, R. E., Interval Analysis, Englewood Cliffs N. J.: Prentice Hall Inc.
- 13 DEWAR, J. K. S., Procedures for Interval Arithmetic, The Computer Journal 14, 447—450 (1970).
- 14 KULISCH, U., Grundzüge der Intervallrechnung, In Überblicke Mathematik 2 (1969), Bibliographisches Inst. Mannheim.
- 15 KERNER, I. O., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8, 290—294 (1966).
- 16 ORTEGA, J. M. und RHEINBOLDT, W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, New York—London, Academic Press (1971).
- 17 DOCHEV, K. und BYRNEV, P., Certain Modifications of Newton's Method for the Approximate Solution of Algebraic Equations, Zh. Vych. Mat. 4, 915—920 (1964).
- 18 EHRLICH, L. W., A Modified Newton Method for Polynomials, Comm. ACM 10, 107—108 (1967).
- 19 GOOD, D. I. and LONDON, R. L., Computer Interval Arithmetic: Definition and Proof of Correct Implementation, J. ACM 17, 603—612 (1970).
- 20 BÖRSCH-SUPAN, W., A Posteriori Error Bounds for the Zeros of Polynomials, Numer. Math. 5, 380—398 (1963).
- 21 DURAND, E., Solutions Numeriques des Equations Algébriques (Tome I, Chap. IX). Paris: Masson et Cie. (1960).
- 22 ABERTH, O., Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously. Technical Report, Texas A & M University (1971), Math. Comp. 27, 339—344 (1973).
- 23 VARGA, R. S., Matrix Iterative Analysis, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall Inc. (1962).
- 24 GRÖBNER, W., Matrizenrechnung, Mannheim: Bibliographisches Institut (1966).
- 25 SCHMIDT, J. W. und DRESSEL, H., Fehlerabschätzungen bei Polynomgleichungen mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, Numer. Math. 10, 42—50 (1967).
- 26 ALEFELD, G. und HERZBERGER, J., Über die Verbesserung von Schranken für die Eigenwerte symmetrischer Tridiagonalmatrizen, Angew. Informatik 13, 107—112 (1973).
- 27 BRAESS, D. und HADELER, K. P., Simultaneous Inclusion of the Zeros of a Polynomial, Numer. Math. 21, 161—165 (1973).
- 28 PETRIC, J., JOVANOVIĆ, M. und STAMATOVIĆ, S., Algorithm for Simultaneous Determination of all Roots of Algebraic Polynomial Equations, Matematički Vestnik 9 (24), 325—332 (1972).

Anschriften: Prof. Dr. GÖTZ ALEFELD, Priv.-Doz. Dr. JÜRGEN HERZBERGER, Institut für Angewandte Mathematik der Universität, D-75 Karlsruhe, Postfach 6380, BRD