ZAMM 54, 335 – 342 (1974)

G. Alefeld

Quadratisch konvergente Einschließung von Lösungen nichtkonvexer Gleichungssysteme

Ohne Konvexität vorauszusetzen, werden Verfahren zur Einschließung der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme angegeben, die monoton konvergieren und die die Konvergenzordnung 2 besitzen. Die Möglichkeit der praktischen Durchführung dieser Verfahren bei gewissen Gleichungssystemen beruht wesentlich auf der Verwendung der Intervallarithmetik.

Without convexity asumptions we give methods for enclosing the solution of nonlinear systems of equations. These methods possess monotone convergence behaviour. The order of convergence is two. When applied to certain systems the methods make essential use of interval arithmetic.

Не задаваясь наличием выпуклости приведены методы запирания решения нелинейных систем уравнений, сходящихся монотонно и имеющих порядок сходимости 2. Возможность практического осуществления этих методов для определённых систем уравнений зависит в основном от применения интервальной арифметики.

1. Einleitung

Es werden Verfahren angegeben zur fortwährenden Einschließung der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems, wobei die Abbildung nicht notwendig konvex ist. Weitgehend ohne Konvexität kommt auch J. W. Schmidt in [8] aus. In den anderen dem Verfasser bekannten Arbeiten, die die gleiche Problemstellung behandeln, wird stets die Konvexität vorausgesetzt, um ein Verfahren zu erhalten, welches mindestens überlinear konvergiert. Siehe dazu insbesondere [7], [9], [10], [12]. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit und ihre Beweise stehen naturgemäß in engem Zusammenhang mit entsprechenden Resultaten aus [6] und [7]. Andererseits können die hier bewiesenen Ergebnisse auch als Spezialfälle der in [1], [2] und [5] angegebenen Verfahren angesehen werden. Wegen der spezielleren Voraussetzung kommen wir hier jedoch zu stärkeren Aussagen als in den zuletzt genannten Arbeiten. Die Ergebnisse dieser Arbeit lassen sich ohne große Schwierigkeiten auf allgemeinere Räume übertragen.

In Satz 1 beweisen wir Aussagen über ein „Verfahren ohne Auflösung von linearen Gleichungen" (siehe [11]). Satz 2 kann als Spezialfall von Satz 1 erhalten werden. Zur Erzielung von quadratischer Konvergenz genügt neben einer Lipschitzbedingung für die Ableitung die Beziehung (18). In Abschnitt 3 wird gezeigt, daß bei einigen Klassen von Gleichungssystemen die Bedingung (18) stets erfüllbar ist. Wichtig ist dabei, daß man mit der Intervallrechnung ein Hilfsmittel hat, mit welchem man die benötigten Größen aus Satz 1 auch praktisch berechnen kann.

Wir bezeichnen im folgenden mit $L(R^n)$ die Menge der linearen Abbildungen von R^n nach R^n (Menge der $n\times n$-Matrizen). Im R^n und in $L(R^n)$ legen wir die natürliche (komponentenweise) Halbordnung zugrunde und Intervalle im R^n bezeichnen wir mit $\langle x, y\rangle$. Mit $F'(x)$ wird die Gateaux-(G-)Ableitung einer Abbildung F bezeichnet.

2. Verfahren

Satz 1: *Es sei $F\colon D\subset R^n \to R^n$ eine G-differenzierbare Abbildung und das Intervall $\langle x^0, y^0\rangle$ sei in D enthalten. Es gelte $Fx^0 \leqq 0 \leqq Fy^0$.*

$A\colon \langle x^0, y^0\rangle \times \langle x^0, y^0\rangle \to L(R^n)$, $A = A(x, y)$,

sei eine Abbildung mit

$$Fx - Fy = A(x, y)\,(x - y) \quad \textit{für} \quad \langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle\,. \tag{1}$$

$B\colon \langle x^0, y^0\rangle \times \langle x^0, y^0\rangle \to L(R^n)$, $B = B(x, y)$,

sei eine stetige Abbildung mit

$$B(\bar{x}, \bar{y}) \leqq B(x, y) \quad \textit{für} \quad \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \subset \langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle \tag{2}$$

$$A(x, y) \leqq B(x, y) \quad \textit{für} \quad \langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle \tag{3}$$

$$B(x, y)^{-1} \textit{ existiert und } B(x, y)^{-1} \geqq 0 \quad \textit{für} \quad \langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle\,. \tag{4}$$

$P_0 \in L(R^n)$ sei nichtsingulär und es gelte

$$B(x^0, y^0)\,P_0 \leqq I \quad (I \textit{ Einheitsmatrix}) \tag{5}$$

$$P_0\,B(x^0, y^0) \leqq I \tag{6}$$

$$P_0 \geqq 0\,. \tag{7}$$

Dann ist das Iterationsverfahren

$$\left.\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k - P_k\, F x^k \\ x^{k+1} &= x^k - P_k\, F x^k \\ P_{k+1} &= P_k - P_k\,[B(x^{k+1}, y^{k+1})\, P_k - I] \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

unbeschränkt durchführbar.
Es gilt

$$x^0 \leqq x^1 \leqq \cdots \leqq x^k \leqq x^{k+1} \leqq y^{k+1} \leqq y^k \leqq \cdots \leqq y^1 \leqq y^0 \tag{9}$$

$$F x^k \leqq 0 \leqq F y^k \tag{10}$$

$$P_0 \leqq P_1 \leqq \cdots \leqq P_k \leqq P_{k+1} \leqq \cdots \tag{11}$$

$$P_k \geqq 0 \text{ und nichtsingulär} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

$$P_k\, B(x^k, y^k) \leqq I \tag{13}$$

$$B(x^k, y^k)\, P_k \leqq I \tag{14}$$

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^* \leqq y^* = \lim_{k\to\infty} y^k \tag{15}$$

$$P^* := \lim_{k\to\infty} P_k = B(x^*, y^*)^{-1}\,. \tag{16}$$

Alle Lösungen von $F\,x = 0$ *aus dem Intervall* $\langle x^0, y^0\rangle$ *sind in* $\langle x^*, y^*\rangle$ *enthalten.*
Ist F *stetig in* $\langle x^0, y^0\rangle$, *so gilt* $F\,x^* = F\,y^* = 0$.
Ist $A(x, y)$ *nichtsingulär für* $\langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle$, *so ist* $x^* = y^*$. *Genügt außerdem die Ableitung von* F *einer Lipschitzbedingung*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leqq c_1\, \|x - y\| \qquad \text{für} \quad x, y \in \langle x^0, y^0\rangle \tag{17}$$

und gilt für die Abbildung B

$$\|F'(z) - B(x, y)\| \leqq c_2\, \|x - y\| \qquad \text{für} \quad z \in \langle x, y\rangle \subset \langle x^0, y^0\rangle\,, \tag{18}$$

so gilt

$$\lim_{k\to\infty} P_k = F'(x^*)^{-1}\,, \tag{19}$$

und die Folgen

$$\|x^k - x^*\|,\ \|y^k - x^*\|,\ \|x^k - y^k\| \quad \text{und} \quad \|P_k - F'(x^*)^{-1}\|$$

konvergieren quadratisch gegen Null.

Beweis: Wir beweisen die Behauptungen (9) — (14) durch vollständige Induktion. Den Beweisgedanken von (9) und (10) findet man bereits in [6] beim Beweis von Theorem 4.1, Seite 177. Es sei $k \geqq 0$ und $x \in \langle x^k, y^k\rangle$. Dann ist wegen $\langle x, y^k\rangle \subset \langle x^k, y^k\rangle$ nach (2) und (3)

$$A(x, y^k) \leqq B(x, y^k) \leqq B(x^k, y^k)$$

und wegen $P_k \geqq 0$ nach (12) ist

$$P_k\, B(x^k, y^k) \geqq P_k\, A(x, y^k)\,,$$

also nach (13)

$$I - P_k\, A(x, y^k) \geqq I - P_k\, B(x^k, y^k) \geqq 0\,.$$

Damit und wegen $x - y^k \leqq 0$ erhält man mit (1)

$$\begin{aligned} x - P_k\, F x &= y^{k+1} + (x - y^k) - P_k\,(F\,x - F\,y^k) \\ &= y^{k+1} + (x - y^k) - P_k\, A(x, y^k)\,(x - y^k) \\ &= y^{k+1} + [I - P_k\, A(x, y^k)]\,(x - y^k) \\ &\leqq y^{k+1}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Speziell erhält man für $x = x^k$ wegen $F x^k \leqq 0 \leqq F y^k$ nach (10) und $P_k \geqq 0$ nach (12)

$$x^k \leqq x^k - P_k\, F x^k = x^{k+1} \leqq y^{k+1} = y^k - P_k\, F y^k \leqq y^k\,.$$

Damit ist (9) gezeigt.
Wegen $\langle y^{k+1}, y^k\rangle \subset \langle x^k, y^k\rangle$ gilt nach (2) und (3)

$$A(y^{k+1}, y^k) \leqq B(y^{k+1}, y^k) \leqq B(x^k, y^k)\,.$$

Mit $P_k \geqq 0$ und (14) folgt daraus

$$I - A(y^{k+1}, y^k)\, P_k \geqq I - B(x^k, y^k)\, P_k \geqq 0\,.$$

Wegen $Fy^k \geqq 0$ nach (10) folgt damit und nach (1)

$$Fy^{k+1} = Fy^k + A(y^{k+1}, y^k)(y^{k+1} - y^k) = [I - A(y^{k+1}, y^k) P_k] F y^k \geqq 0 .$$

Entsprechend zeigt man $Fx^{k+1} \leqq 0$. Damit ist (10) gezeigt.

Wegen $\langle x^{k+1}, y^{k+1}\rangle \subset \langle x^k, y^k\rangle$ gilt nach (2)

$$B(x^{k+1}, y^{k+1}) \leqq B(x^k, y^k) .$$

Damit und wegen $P_k \geqq 0$ und nach (13) und (14) gilt

$$\begin{aligned} &B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k \leqq B(x^k, y^k) P_k \leqq I , \\ &P_k B(x^{k+1}, y^{k+1}) \leqq P_k(B(x^k, y^k)) \leqq I , \end{aligned} \tag{21}$$

woraus mit (8)

$$I - B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_{k+1} = I - B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k + B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I] = [I - B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k]^2 \geqq 0$$

und

$$I - P_{k+1} B(x^{k+1}, y^{k+1}) = [I - P_k B(x^{k+1}, y^{k+1})]^2 \geqq 0 , \tag{22}$$

sowie

$$P_{k+1} = P_k - P_k [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I] \geqq P_k \geqq 0$$

folgen. Damit sind (13) und (14) gezeigt. Es fehlt bei (12) noch der Nachweis, daß P_{k+1} nichtsingulär ist. Da P_k nichtsingulär ist, gilt

$$B(x^{k+1}, y^{k+1}) = M - N$$

mit

$$M = P_k^{-1}, \quad N = P_k^{-1} - B(x^{k+1}, y^{k+1}) .$$

Nach Voraussetzung gilt $M^{-1} = P_k \geqq 0$ und nach (21) ist

$$M^{-1} N = I - P_k B(x^{k+1}, y^{k+1}) \geqq 0 , \qquad N M^{-1} = I - B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k \geqq 0 ,$$

d. h. $M - N$ ist eine schwach reguläre Zerlegung von $B(x^{k+1}, y^{k+1})$ (siehe Definition 2.4.15 in [7], Seite 56). Nach (4) ist $B(x^{k+1}, y^{k+1})^{-1} \geqq 0$. Nach Satz 2.4.17 in [7], Seite 56, folgt dann

$$\varrho(I - P_k B(x^{k+1}, y^{k+1})) < 1 .$$

(ϱ bezeichne den Spektralradius einer Matrix). Nach Satz 2.2.8 in [7], Seite 44, gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Matrixnorm, so daß mit (22) gilt

$$\| I - P_{k+1} B(x^{k+1}, y^{k+1}) \| = \| [I - P_k B(x^{k+1}, y^{k+1})]^2 \| \leqq [\varrho(I - P_k B(x^{k+1}, y^{k+1})) + \varepsilon]^2 .$$

Man wähle $\varepsilon > 0$ so, daß die rechte Seite dieser Ungleichung kleiner als 1 ausfällt. Auf Grund des BANACH-Lemmas ist dann $P_{k+1} B(x^{k+1}, y^{k+1})$ invertierbar, woraus die Invertierbarkeit von P_{k+1} folgt. Damit ist auch (12) gezeigt. Die Behauptung (15) folgt aus (9) mit der üblichen Argumentation.

Auf Grund von (13) oder (14) mit (4) gilt

$$P_k \leqq B(x^k, y^k)^{-1} .$$

Aus der Stetigkeit von $B(x, y)$ folgt $\lim_{k\to\infty} B(x^k, y^k) = B(x^*, y^*)$ und wegen $\langle x^*, y^*\rangle \subset \langle x^k, y^k\rangle$ gilt nach (2)

$$B(x^*, y^*) \leqq B(x^k, y^k) ,$$

woraus nach (4)

$$B(x^k, y^k)^{-1} \leqq B(x^*, y^*)^{-1} ,$$

also

$$P_k \leqq B(x^*, y^*)^{-1}$$

folgt. Die Folge (11) ist also nach oben beschränkt und somit konvergent. Aus der Iterationsvorschrift (8) folgt mit (21) und (11)

$$P_k - P_{k+1} = P_k [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I] \leqq P_0 [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I] \leqq 0$$

und daraus

$$\lim_{k\to\infty} (P_k - P_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} P_0 [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I] = P_0 [B(x^*, y^*) P^* - I] = 0 .$$

Da P_0 nichtsingulär ist, folgt (16).

Sei $z \in \langle x^k, y^k \rangle$ für ein $k \geqq 0$ mit $Fz = 0$. Dann gilt nach (20)

$$z = z - P_k Fz \leqq y^{k+1}.$$

Aus der Beziehung

$$x - P_k F x \geqq x^{k+1} \quad \text{für} \quad x \in \langle x^k, y^k \rangle,$$

die man genauso wie (20) beweisen kann, folgt mit $x := z$

$$z = z - P_k F z \geqq x^{k+1},$$

insgesamt also

$$x^k \leqq x^{k+1} \leqq z \leqq y^{k+1} \leqq y^k \quad \text{für alle } k \geqq 0.$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß alle Lösungen von $F x = 0$ aus dem Intervall $\langle x^0, y^0 \rangle$ in $\langle x^*, y^* \rangle$ enthalten sind.

Ist F stetig in $\langle x^0, y^0 \rangle$, so folgt aus der Iterationsvorschrift (8)

$$0 = \lim_{k\to\infty} (y^k - y^{k+1}) = \lim_{k\to\infty} P_k F y^k = P^* F y^*.$$

Da $P^* = B(x^*, y^*)^{-1}$ nichtsingulär ist, folgt $F y^* = 0$. Entsprechend zeigt man $F x^* = 0$.

Ist $A(x, y)$ nichtsingulär für $\langle x, y \rangle \subset \langle x^0, y^0 \rangle$, so folgt aus (1)

$$0 = Fx^* - Fy^* = A(x^*, y^*) (x^* - y^*), \quad \text{also } x^* = y^*.$$

Unter der Voraussetzung (18) folgt mit

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^* = y^* = \lim_{k\to\infty} y^k \text{ die Beziehung } \lim_{k\to\infty} B(x^k, y^k) = F'(x^*),$$

also mit (16) die Behauptung (19).

Der Nachweis der quadratischen Konvergenz erfolgt ähnlich wie in [11], Satz 2. Zur Abkürzung setzen wir

$$B_k := B(x^k, y^k), \quad p := \|F'(x^*)\|, \quad P^* = F'(x^*)^{-1}.$$

Dann folgt aus der Iterationsvorschrift (8) und mit (17)

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - x^*\| &= \|y^k - x^* - P_k F y^k\| \\ &= \| - P_k (F y^k - F x^* - F'(x^*) (y^k - x^*)) + (F'(x^*)^{-1} - P_k) F'(x^*) (y^k - x^*)\| \\ &\leqq \frac{c_1}{2} \|P_k\| \, \|y^k - x^*\|^2 + p \, \|P^* - P_k\| \, \|y^k - x^*\|. \end{aligned} \tag{23}$$

Entsprechend zeigt man

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leqq \frac{c_1}{2} \|P_k\| \, \|x^k - x^*\|^2 + p \, \|P^* - P_k\| \, \|x^k - x^*\|. \tag{24}$$

Aus der Iterationsvorschrift (8) und mit $I = F'(x^*)P^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_{k+1} - P^* &= P_k - P^* - P^k (B_{k+1} P_k - I) \\ &= P_k - P^* + P_k [I - F'(x^*) P_k + (F'(x^*) - B_{k+1}) P_k] \\ &= P_k - P^* + P_k (F'(x^*) P^* - F'(x^*) P_k) + P_k(F'(x^*) - B_{k+1}) P_k \\ &= P_k - P^* + P_k F'(x^*) (P^* - P_k) + P_k(F'(x^*) - B_{k+1}) P_k \\ &= (P^* F'(x^*) - P_k F'(x^*)) (P_k - P^*) + P_k(F'(x^*) - B_{k+1})P_k \\ &= - (P_k - P^*) F'(x^*) (P_k - P^*) + P_k(F'(x^*) - B_{k+1}) P_k \end{aligned}$$

woraus mit (18)

$$\|P_{k+1} - P^*\| \leqq p \, \|P_k - P^*\|^2 + c_2 \|P_k\|^2 \, \|x^{k+1} - y^{k+1}\| \tag{25}$$

folgt.

Wegen $\lim_{k\to\infty} P_k = P^* = F'(x^*)^{-1}$ gibt es eine Konstante s, so daß $\|P_k\| \leqq s$ für alle $k \geqq 0$.

Es sei

$$c = \max \{c_1 s + 2p, \; p + c_2 s^2 (c_1 s + 2p)\}$$

und

$$r_k = \max \{\|x^k - x^*\|, \|y^k - x^*\|, \|x^k - y^k\|, \|P_k - P^*\|\}.$$

Dann folgt mit den zuletzt bewiesenen Beziehungen (23), (24) und (25)

$$\|y^{k+1} - x^*\| \leqq \left(\frac{c_1}{2} s + p\right) r_k^2 \leqq c\, r_k^2 ,$$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leqq \left(\frac{c_1}{2} + p\right) r_k^2 \leqq c\, r_k^2 ,$$

$$\|x^{k+1} - y^{k+1}\| \leqq \|x^{k+1} - x^*\| + \|y^{k+1} - x^*\| \leqq \|(c_1 s + 2p)\, r_k^2 \leqq c\, r_k^2 ,$$

$$\|P_{k+1} - P^*\| \leqq (p + c_2 s^2 (c_1 s + 2p))\, r_k^2 \leqq c\, r_k^2 ,$$

also

$$r_{k+1} \leqq c\, r_k^2 , \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Damit ist die quadratische Konvergenz nachgewiesen.

Bemerkung:

Der Inhalt von Satz 1 läßt sich ohne große Schwierigkeiten auf Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit übertragen (siehe [11]). Dazu wird in der Iterationsvorschrift (8) die Matrix P_k über mehrere Schritte festgehalten und zur näherungsweisen Invertierung von $B(x^{k+1}, y^{k+1})$ ein Verfahren höherer Ordnung angewandt. Damit kommt man zu folgender Iterationsvorschrift:

$$\left.\begin{aligned}
&y^{k,0} := y^k \\
&y^{k,r+1} := y^{k,r} - P_k F y^{k,r} , \quad r = 0, 1, 2, \ldots, m \\
&y^{k+1} := y^{k,m+1} \\
&x^{k,0} := x^k \\
&x^{k,r+1} := x^{k,r} - P_k F x^{k,r} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, m \\
&x^{k+1} := x^{k,m+1} \\
&P_{k+1} = P_k + P_k \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^\mu [B(x^{k+1}, y^{k+1}) P_k - I]^\mu
\end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Unter den in Satz 1 gemachten Voraussetzungen konvergiert dieses Verfahren von der Ordnung $m + 2$.

Satz 1 enthält als Spezialfall den Beweis der entsprechenden Aussagen für ein Verfahren, bei dem die Matrizen $B(x^k, x^k)$ nicht näherungsweise sondern vollständig invertiert werden. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 2: *Man setze in Satz 1* $P_k := B(x^k, y^k)^{-1}$ *und ändere die Iterationsvorschrift* (8) *ab in*

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k - P_k F y^k \\ x^{k+1} &= x^k - P_k F x^k \end{aligned} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{8)'$$

Dann gelten alle Aussagen von Satz 1.

Beweis: (5), (6) und (7) sowie (12), (13) und (14) sind wegen (4) trivialerweise erfüllt. (11) folgt ebenfalls aus (4). Die anderen Teile des Beweises können unverändert übernommen werden.

Bei der Durchführung von Verfahren (8)′ beachte man, daß bei Anwendung des GAUSSschen Algorithmus die Dreieckszerlegung von $B(x^k, y^k)$ nur einmal durchgeführt werden muß (siehe auch [7], Seite 452).

3. Anwendungen

Es sei

$$F: D \subset R^n \to R^n, \; Fx = H\,x + \varepsilon\, \Phi(x) + b \text{ mit } \varepsilon > 0 \text{ und } b \in R^n . \tag{26}$$

Dabei sei H eine M-Matrix, d. h. $h_{ij} \leqq 0$ für $i \neq j$ und $H^{-1} \geqq 0$.

$$\Phi: D \subset R^n \to R^n, \quad \Phi(x) = (\varphi_i(x))$$

sei eine stetige G-differenzierbare Abbildung mit

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, g_j(x_j) , \quad i = 1(1)\, n ,$$

wobei

$$g_i: D_i \subset R^1 \to R^1, \quad g_i = g_i(s) , \quad i = 1(1)n ,$$

$$\frac{d}{ds} g_i(s) \geqq 0 , \quad i = 1(1)n ,$$

und $\alpha_{ij} \geqq 0$, $i, j = 1(1)n$.

Mit $g(x) = g_i(x_i)$ und $U = (\alpha_{ij})$ läßt sich F in der Form

$$Fx = H\,x + \varepsilon\,U\,g(x) + b$$

schreiben.

Es sei $A(x, y)$ die Matrix, deren i-te Zeile gleich

$$f_i'(x + t_i(y - x)) = \left(h_{i1} + \varepsilon\alpha_{i1}\frac{d}{dx_1}g_1(x_1 + t_i(y_1 - x_1)), \ldots, h_{in} + \varepsilon\alpha_{in}\frac{d}{dx_n}g_n(x_n + t_i(y_n - x_n))\right)$$

mit $t_i \in (0, 1)$, $i = 1(1)\,n$, ist. Ist D konvex, so gilt auf Grund des Mittelwertsatzes für Abbildungen von $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

$$F\,x - F\,y = A(x, y)\,(x - y)$$

für $x, y \in D$. Es bezeichne $u_j(x_j, y_j)$ die obere Schranke der intervallmäßigen Auswertung von $\frac{dg_j}{dx_j}$ für das Intervall $[x_j, y_j]$ mit $x_j \leqq y_j$. Dann gilt auf Grund der Teilmengeneigenschaft der Intervallrechnung

$$\frac{d}{dx_j}g_j(\bar{x}_j + \bar{t}_i(\bar{y}_j - \bar{x}_j)) \in \frac{d}{dx_j}g_j([\bar{x}_j, \bar{y}_j]) \subset \frac{d}{dx_j}g_j([x_j, y_j]) \quad \text{für} \quad [\bar{x}_j, \bar{y}_j] \subset [x_j, y_j],$$

also

$$u_j(x_j, y_j) \geqq \frac{d}{dx_j}g_j(x_j + \bar{t}_i(y_j - x_j)) \geqq 0\,.$$

Setzen wir

$$\bar{U} = (\bar{u}_{ij}) \quad \text{mit} \quad \bar{u}_{ij} = \alpha_{ij}\,u_j(x_j, y_j)\,,$$

so gilt mit

$$B(x, y) = H + \varepsilon\,\bar{U}$$

sowohl

$$B(\bar{x}, \bar{y}) \leqq B(x, y) \quad \text{für} \quad \langle\bar{x}, \bar{y}\rangle \subset \langle x, y\rangle$$

als auch

$$A(x, y) \leqq B(x, y)\,.$$

Damit sind die Voraussetzungen (1), (2) und (3) von Satz 1 erfüllt. Da H M-Matrix ist, ist nach Satz 2.4.10 in [7] für genügend kleines ε wegen $\bar{U} \geqq 0$ auch $B(x, y)$ M-Matrix und damit (4) erfüllt.

(ε muß der Bedingung

$$h_{ij} + \varepsilon\,\alpha_{ij}\,u_j(x_j^0, y_j^0) \leqq 0\,, \quad i \neq j\,, \quad i, j = 1(1)\,n$$

genügen).

Bezeichnet D den Diagonalanteil von $B(x^0, y^0)$, so gilt wegen $D^{-1} \geqq 0$ und $B(x^0, y^0) = D - (D - B(x^0, y^0))$ mit $P_0 = D^{-1}$

$$B(x^0, y^0)\,P_0 = I - (D - B(x^0, y^0))\,D^{-1} \leqq I$$

$$P_0\,B(x^0, y^0) = I - D^{-1}\,(D - B(x^0, y^0)) \leqq I$$

da $D - B(x^0, y^0) \geqq 0$ ist.

Mit dieser Wahl von P_0 sind auch die Voraussetzungen von (5), (6) und (7) aus Satz 1 erfüllt.

Zerlegt man $B(x^0, y^0)$ in $D - L - R$ mit einer strengen unteren Dreiecksmatrix L und einer strengen oberen Dreiecksmatrix R, so ist $P_0 := (D - L)^{-1} \geqq 0$ und wegen $R \geqq 0$ gilt

$$B(x^0, y^0)\,P_0 = (D - L - R)\,(D - L)^{-1} = I - R\,(D - L)^{-1} \leqq I$$

$$P_0\,B(x^0, y^0) = (D - L)^{-1}\,(D - L - R) = I - (D - L)^{-1}\,R \leqq I\,.$$

Hiermit ist eine andere Möglichkeit für die Wahl von P_0 aufgezeigt. Die Voraussetzung (17) ist erfüllt, falls die Ableitungen der Abbildungen g_i einer LIPSCHITZbedindung genügen. Die Voraussetzung (18) ist ohne weitere Annahmen erfüllt.

Für $F'(z) = \left(h_{ij} + \varepsilon\,\alpha_{ij}\,\frac{d}{dx_j}g_j(z_j)\right)$ und $B(x, y) = (b_{ij}(x, y))$ mit $b_{ij}(x, y) = h_{ij} + \varepsilon\,\alpha_{ij}\,u_j(x_j, y_j)$ gilt ja

$$F'(z) - B(x, y) = \left(\varepsilon\,\alpha_{ij}\left\{\frac{d}{dx_j}g_j(z_j) - u_j(x_j, y_j)\right\}\right).$$

Setzen wir

$$[s_j(x_j, y_j),\; u_j(x_j, y_j)] := \frac{d}{dx_j}g_j([x_j, y_j])\,,$$

so gilt für $z_j \in [x_j, y_j]$ auf Grund der Teilmengeneigenschaft der Intervallrechnung

$$\frac{d}{dx} g_j(z_j) \in [s_j(x_j, y_j), u_j(x_j, y_j)]$$

und damit auf Grund von Korollar 2 zu Theorem 4.4 in [5], Seite 24,

$$u_j(x_j, y_j) - \frac{d}{dx_j} g_j(z_j) \leqq u_j(x_j, y_j) - s_j(x_j, y_j) \leqq c_j (y_j - x_j) .$$

Also gilt

$$B(x, y) - F'(z) \leqq \max_i \{y_i - x_i\} \cdot C$$

mit einer Matrix $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \varepsilon \alpha_{ij} c_j \geqq 0$, $i, j = 1(1)\, n$, woraus (18) folgt.

4. Numerisches Beispiel

Wir betrachten die Aufgabe, eine numerische Näherung für die Lösung $y(t)$ der Randwertaufgabe

$$y'' = f(t, y) , \quad y(0) = \bar{a} , \quad y(1) = \bar{b}$$

zu finden. Die Anwendung des Differenzenverfahrens führt auf die m Gleichungen

$$x_{i-1} - 2\, x_i + x_{i+1} - h^2 \{\alpha\, f\, (t_{i-1}, x_{i-1}) + \beta\, f(t_i, x_i) + \gamma\, f(t_{i+1}, x_{i+1})\} = 0 , \qquad i = 1(1)\, m ,$$

mit $t_i = i\, h$, $i = 1(1)\, m$, und $(m + 1)\, h = 1$ und $x_0 = a$, $x_{m+1} = b$. x_i ist eine Näherung für $y(t_i)$. Für $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$ erhält man das gewöhnliche Differenzenverfahren, für $\alpha = \gamma = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{10}{12}$ das Mehrstellenverfahren (siehe [13], S. 461). Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} , \quad g(x) = \begin{pmatrix} f(t_1, x_1) \\ f(t_2, x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t_m, x_m) \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} \bar{a} - \alpha\, h^2\, g(0, \bar{a}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{b} - \gamma\, h^2\, g(1, \bar{b}) \end{pmatrix} ,$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} , \quad U = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & \beta & \gamma \\ & & & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

und $\varepsilon = h^2$ lassen sich diese m-Gleichungen in der Form

$$F\, x = H\, x + \varepsilon\, U\, g(x) + b$$

schreiben. Unter der Vorauszetzung $\frac{\partial f}{\partial y} \geqq 0$ für $t \in (0, 1)$ erfüllt F alle vorangehenden Ausführungen über Systeme der Form (26), falls man beim Mehrstellenverfahren h^2 genügend klein wählt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Randwertaufgabe

$$y'' = \sin y + y , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) = 1 .$$

Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \sin y$ indefinit, ist das diskretisierte Problem sicherlich nicht im ganzen R^n konvex.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten jeweils für $m = 5, 25, 51$ und 101 die Iterierten der Näherung für $y(1/2)$ und zwar in der ersten Tabelle nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren und in der zweiten Tabelle nach dem Mehrstellenverfahren. Die Iteration wurde nach Verfahren (8)' aus Satz 2 durchgeführt. Die Anfangsvektoren x^0 und y^0 wurden dabei für das gewöhnliche Differenzenverfahren nach 13.4.6, (c) in [7], Seite 460, bestimmt. Für diese Werte ist auch beim Mehrstellenverfahren $Fx^0 \leqq 0 \leqq Fy^0$.

Die Durchführung der Rechnung besorgte Herr Peter T. Speck auf der Rechenanlage Elegtrologica X8 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe.

$y\left(\frac{1}{2}\right)$ (Gewöhnliches Differenzenverfahren)

k	$m = 5$	
0	-0.5	0.5
1	0.3940299983760	0.4000335866235
2	0.3989339526997	0.3989347005095
3	0.3989344659822	0.3989344659822

k	$m = 25$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935413781128	0.3997788906381
2	0.3986874733555	0.3986882610402
3	0.3986880255447	0.3986880255452
4	0.3986880255452	0.3986880255452

k	$m = 51$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935206369679	0.3997680696930
2	0.3986771185469	0.3986779080124
3	0.3986776725106	0.3986776725169
4	0.3986776725137	0.3986776725153

k	$m = 101$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935155168238	0.3997653993461
2	0.3986745645657	0.3986753545055
3	0.3986751189564	0.3986751189564

$y\left(\frac{1}{2}\right)$ (Mehrstellenverfahren)

k	$m = 5$	
0	-0.5	0.5
1	0.3938048950831	0.3997635541509
2	0.3986758325059	0.3986765352929
3	0.3986763144021	0.3986763144021

k	$m = 25$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935292233327	0.3997644587939
1	0.3986736779243	0.3986744630652
3	0.3986742283178	0.3986742283191

k	$m = 51$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935175960669	0.3997644612118
2	0.3986736691791	0.3986744580066
3	0.3986742226748	0.3986742226762
4	0.3986742226762	0.3986742226762

k	$m = 101$	
0	-0.5	0.5
1	0.3935147300836	0.3997644611468
2	0.3986736680718	0.3986744577855
3	0.3986742223087	0.3986742223447
4	0.3986742223155	0.3986742223174

Literatur

1 Alefeld, G. und Herzberger, J., Über das Newton-Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen. ZAMM 50, 773–774 (1970).

2 Alefeld, G. und Herzberger, J., Nullstelleneinschließung mit dem Newton-Verfahren ohne Invertierung von Intervallmatrizen. Numerische Mathematik 19, 56–64 (1972).

3 Baluev, A. N., Zur Methode von Chaplygin (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR 83, 781–789 (1952).

4 Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.

5 Moore, R. E., Interval analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall Inc. 1966.

6 Ortega, J. M. und Rheinboldt, W. C., Monotone iterations for nonlinear equations with application to Gauss-Seidel methods. SIAM J. Numer. Anal. 4, 171–190 (1967).

7 Ortega, J. M. und Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York-London. Academic Press 1970.

8 Schmidt, J. W., Einschließung von Nullstellen bei Operatoren mit monoton zerlegbarer Steigung durch überlinear konvergente Iterationsverfahren. Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica 1972.

9 Schmidt, J. W., Eingrenzung von Lösungen nichtlinearer Gleichungen durch Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit. Computing 8, 208–215 (1971).

10 Schmidt, J. W. und Leonhardt, H., Eingrenzung von Lösungen mit Hilfe der Regula falsi. Computing 6, 318–329 (1970).

11 Schmidt, J. W. und Leder, D., Ableitungsfreie Verfahren ohne Auflösung linearer Gleichungen. Computing 5, 71–81 (1970).

12 Vandergraft, J. S., Newton's method for convex operators in partially ordered spaces. SIAM J. Numer. Anal. 4, 406–432 (1967).

13 Zurmühl, R., Praktische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg. 4. Aufl. (1962).

Eingereicht am 15. 6. 1973

Anschrift: Prof. Dr. G. Alefeld, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe, 75 Karlsruhe, Kaiserstraße 12, BRD