Computing

Archiv für elektronisches Rechnen
Archives for Electronic Computing

Reprint from Vol 11 Fasc 4 1973

G. Alefeld

Zur Konvergenz des Verfahrens der Tangierenden Hyperbeln und des Tschebyscheff Verfahrens bei konvexen Abbildungen

Springer-Verlag Wien New York

Computing 11, 379—390 (1973)

Zur Konvergenz des Verfahrens der Tangierenden Hyperbeln und des Tschebyscheff-Verfahrens bei konvexen Abbildungen

Von

G. Alefeld, Karlsruhe

(Eingegangen am 27. April 1973)

Zusammenfassung — Abstract

Zur Konvergenz des Verfahrens der Tangierenden Hyperbeln und des Tschebyscheff-Verfahrens bei konvexen Abbildungen. Für das Verfahren von Tschebyscheff und das Verfahren der tangierenden Hyperbeln werden Konvergenzaussagen bewiesen zur Auflösung der Gleichung $F(x)=0$, wobei neben F auch F' ordnungskonvex ist.

Convergence of Chebyshev's Method and the Method of Tangential Hyperbolas for Convex Mappings. For Chebyshev's method and the method of tangential hyperbolas we prove convergence if applied to equations $F(x)=0$, for which F and F' are both orderconvex.

1. Einleitung

Es seien B_1 und B_2 Banachräume und $F: D \subset B_1 \to B_2$ zweimal Fréchet-differenzierbar in D. Dann bezeichnet man bekanntlich das Iterationsverfahren

$$F(z_n) + F'(z_n)(w_{n+1} - z_n) = 0$$
$$F(z_n) + F'(z_n)(z_{n+1} - z_n) + \tfrac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)(z_{n+1} - z_n) = 0,$$
$$z_0 \in D, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

als *Verfahren der tangierenden Hyperbeln* (*TH*)

und das Verfahren

$$F(z_n) + F'(z_n)(w_{n+1} - z_n) = 0$$
$$F(z_n) + F'(z_n)(z_{n+1} - z_n) + \tfrac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)^2 = 0,$$
$$z_0 \in D, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

als *Tschebyscheff-Verfahren* (*TV*) zur Auflösung der Gleichung $F(z)=0$. Beide Verfahren können als Verbesserung des Newton-Verfahrens aufgefaßt werden. Unter geeigneten Voraussetzungen sind sie beide von der Ordnung 3 konvergent. Vom Rechenaufwand her gesehen ist Verfahren (TV) das angenehmere, da — abgesehen vom konstanten Glied — zweimal die gleiche lineare Gleichung aufgelöst werden muß. Dies bedeutet z. B. bei der Anwendung auf nichtlineare

Gleichungssysteme einen erheblichen Vorteil gegenüber (TH), weil dabei die Dreieckszerlegung den Hauptaufwand darstellt.

In neuerer Zeit sind diese Verfahren eingehender untersucht worden. Sehr ausführliche Literaturverzeichnisse finden sich in den Arbeiten [2] und [3]. Die bekannten Konvergenzaussagen für die Verfahren (TH) und (TV) sind lokaler Natur und erfordern sehr feine Abschätzungen. Nun ist jedoch seit längerer Zeit bekannt, daß man beim Newton-Verfahren aus Konvexitätseigenschaften der Abbildung F ziemlich weitreichende Konvergenzaussagen erhalten kann. Siehe [1], [8], insbesondere [13] und die dort angegebene Literatur. Ziel dieser Arbeit ist es, entsprechende Aussagen über die Verfahren (TH) und (TV) herzuleiten. Es erscheint klar, daß man dazu außer für F auch für die Ableitung F' Konvexitätseigenschaften voraussetzen muß. Es zeigt sich dann, daß die von Vandergraft in [13] verwendeten prinzipiellen Schlußweisen, welche auch von J. W. Schmidt und H. Leonhardt ([10], [11], [12]) benutzt werden, nach entsprechender Modifikation bei der Konvergenzuntersuchung der Verfahren (TH) und (TV) angewandt werden können. Zur Schreibweise der Iterationsverfahren (TH) und (TV) bemerken wir, daß wie in [13] nicht notwendig die Existenz der inversen Operatoren $F'(z_n)^{-1}$ bzw. $[F'(z_n)+\frac{1}{2}F''(z_n)]^{-1}$ gefordert wird. Falls von z_0 ausgehend eine Folge $\{z_n\}$ existiert, die den Gleichungen des (TH)-Verfahrens bzw. des (TV)-Verfahrens genügt, so sagen wir, die Abbildung F besitzt eine (TH)- bzw. (TV)-Folge. Wir beschränken uns im folgenden auf Fréchet-differenzierbare Abbildungen zwischen Banachräumen, obwohl die meisten Überlegungen wie für das Newton-Verfahren in allgemeineren Räumen und für Gateaux-differenzierbare Abbildungen durchgeführt werden können (siehe [13]).

2. Hilfsmittel

Wir setzen im folgenden voraus, daß der Banachraum B durch einen abgeschlossenen Kegel K, d. h. eine Teilmenge $K\subset B$ mit $\lambda K\in K$, $K+K=K$, $K\cap(-K)=\{0\}$ halbgeordnet ist. Es gilt also „$x\leqq y$ genau dann, wenn $y-x\in K$". Die so eingeführte Halbordnung ist mit der linearen Struktur verträglich. Zwei Elemente heißen vergleichbar, wenn entweder $x\leqq y$ oder $x\geqq y$, d. h. $-x\leqq -y$ gilt. Ein Kegel K heißt regulär, wenn jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt. Der Kegel K heißt normal, wenn aus $0\leqq x\leqq y$ die Beziehung $\|x\|\leqq\beta\|y\|$ mit einer von x und y unabhängigen Konstanten β folgt. Ein regulärer Kegel K ist normal. Aus der Normalität von K folgt, daß Intervalle im Sinne der Norm beschränkt sind. Der halbgeordnete Banachraum heißt solid, falls der die Halbordnung erzeugende Kegel innere Punkte besitzt. Eine ausführliche Darstellung und Beweise der zitierten Aussagen findet man in [6]. Der Operator $H: B_1\to B_2$ heißt monoton wachsend, wenn aus $x\leqq y$ die Beziehung $H(x)\leqq H(y)$ folgt. H heißt positiv, $H\geqq 0$, falls aus $x\geqq 0$ stets $H(x)\geqq 0$ folgt. Ist $G: D\subset B_1\to L(B_1, L(B_1, B_2))$ ein bilinearer Operator auf $B_1\times B_1$, so heißt G positiv, $G\geqq 0$, falls für $h_1, h_2\geqq 0$ die Beziehung $G(x)(h_1, h_2)\geqq 0$ gilt. Im folgenden schreiben wir $G(x)h_1h_2$ statt $G(x)(h_1, h_2)$ und $G(x)h^2$ für $h_1=h_2=h$. Die entsprechenden Absprachen treffen wir für multilineare Operatoren. Mit $L(B_1, B_2)$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von B_1 nach B_2.

Definition 1: Die Abbildung $F: D \subset B_1 \to B_2$ heißt ordnungskonvex (0-konvex) auf der konvexen Menge $D_0 \subset D$ genau dann, wenn

$$F(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \leqq \lambda F(z_1) + (1-\lambda) F(z_2)$$

für $\lambda \in [0, 1]$ und alle vergleichbaren Elemente $z_1, z_2 \in D_0$ gilt. (Siehe [8] und [13].)

Ist die Abbildung F Fréchet-(F-)differenzierbar, so gilt bekanntlich

Lemma 1: *$F: D \subset B_1 \to B_2$ sei F-differenzierbar in der Menge D. F ist 0-konvex auf der konvexen Menge $D_0 \subset D$ genau dann, wenn für alle vergleichbaren Elemente $z_1, z_2 \in D_0$ gilt*

$$F(z_1) - F(z_2) \geqq F'(z_2)(z_1 - z_2).$$

Zum Beweis siehe [8] oder [13].

Ist $F: D \subset B_1 \to B_2$ zweimal F-differenzierbar in der Menge D, so kann man Lemma 1 auf $F': D \subset B_1 \to L(B_1, B_2)$ anwenden, d.h. F' ist 0-konvex auf $D_0 \subset D$ genau dann, wenn

$$F'(z_1) - F'(z_2) \geqq F''(z_2)(z_1 - z_2)$$

für alle vergleichbaren Elemente $z_1, z_2 \in D$ gilt.

Eine hinreichende Bedingung für die 0-Konvexität von F gibt

Lemma 2: *$F: D \subset B_1 \to B_2$ sei zweimal stetig F-differenzierbar in der Menge D. Für jedes Intervall $[z_1, z_2] \subset D$ gelte $F''(z) \geqq 0$ für $z \in [z_1, z_2]$. Dann gilt*

(1) *$F'(a) \leqq F'(b)$ für $z_1 \leqq a \leqq b \leqq z_2$*

(2) *F ist 0-konvex.*

Der Beweis folgt aus der im Banachraum gültigen Beziehung

$$F'(a) - F'(b) = \int_0^1 F''\big(a + t(b-a)\big)(a-b)\, dt.$$

(Siehe auch [8] und [13].).

Ist $F: D \subset B_1 \to B_2$ dreimal stetig F-differenzierbar, so kann man Lemma 2 mit $F'''(z)$ anwenden. Ist also $F'''(z) \geqq 0$ auf jedem Intervall aus D, so ist dort F'' monoton wachsend und F' 0-konvex. Wir ziehen noch eine einfache Folgerung aus der 0-Konvexität von F'.

Lemma 3: *Es sei $F: D \subset B_1 \to B_2$ zweimal F-differenzierbar und $F': D \subset B_1 \to L(B_1 B_2)$ 0-konvex auf einer konvexen Menge $D_0 \subset D$. Dann gilt*

$$F(x) \left\{ \begin{smallmatrix} \leqq \\ \geqq \end{smallmatrix} \right\} F(y) + F'(y)(x-y) + \tfrac{1}{2} F''(y)(x-y)^2 \quad \textit{für} \quad \left\{ \begin{smallmatrix} x \leqq y \\ x \geqq y \end{smallmatrix} \right\},\ x, y \in D_0.$$

Beweis: Nach Lemma 1 gilt für $P: D \subset B_1 \to L(B_1, B_2)$ mit

$$P(x) = F'(x) - F'(y) - F''(y)(x-y)$$

für alle x, die mit einem festen y vergleichbar sind, $x, y \in D_0$, die Beziehung $P(x) \geqq 0$. Die Abbildung P ist stetig und aufgrund der bekannten Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (siehe [5], Seite 540), gilt dann

$$\int_y^x P(x)\,dx = F(x) - F(y) - F'(y)(x-y) - \tfrac{1}{2} F''(y)(x-y)^2.$$

Dabei ist

$$\int_y^x P(x)\,dx = \int_0^1 P\big(y + t(x-y)\big)(x-y)\,dt = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

mit

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P\big(y + t_k(x-y)\big)(x-y)(t_{k+1} - t_k)$$

Wegen $P \geqq 0$, $t_{k+1} - t_k > 0$, gilt $S_{n-1} \leqq 0$ für $x \leqq y$ und $S_{n-1} \geqq 0$ für $x \geqq y$. Diese Beziehungen bleiben wegen der Abgeschlossenheit des Kegels beim Grenzübergang erhalten.

Ist $F: D \subset B_1 \to B_2$ dreimal stetig F-differenzierbar und $F'''(z) \geqq 0$ auf einem Intervall $D_0 \subset D$, so ist nach Lemma 2 $F'(z)$ 0-konvex auf jedem Intervall aus D_0. Somit gelten die Aussagen des vorangehenden Lemmas für alle vergleichbaren x, y aus einem Intervall, welches in D_0 enthalten ist.

Schließlich benötigen wir noch das bekannte Kantorowitsch-Lemma.

Lemma 4: *Es sei $H: D \subset B \to B$ ein stetiger monoton wachsender Operator und für $x \leqq y$ gelte $H(x) \geqq x$, $H(y) \leqq y$. Dann besitzt H einen Fixpunkt in $[x, y]$ falls B durch einen regulären Kegel halbgeordnet ist.*

Zum Beweis siehe [4] oder [8].

3. Sätze

Wir kommen nun zu Aussagen über die in Frage stehenden Iterationsverfahren.

Satz 1: *Es sei B_1 ein durch einen* regulären *Kegel halbgeordneter Banachraum und die Abbildung $F: D \subset B_1 \to B_2$ sei zweimal stetig F-differenzierbar auf einer das Intervall $[a, b]$ enthaltenden Menge $D_0 \subset D$. Es sei $F'(z)$ 0-konvex und $F''(z) \geqq 0$ auf dem Intervall $[a, b]$ sowie $F(a) \geqq 0 \geqq F(b)$. Es gebe einen linearen Operator $\Gamma: B_1 \to B_2$, der einen stetigen positiven inversen Operator besitzt mit $-F'(a) \leqq \Gamma$. Weiter sei entweder $-F''(z) \leqq \Omega$ für alle $z \in [a, b]$ oder F dreimal stetig F-differenzierbar und $-F''(a) \leqq \Omega$, wobei Ω ein beschränkter bilinearer Operator ist. Dann besitzt F von $z_0 = a$ ausgehend eine (TH)-Folge, die monoton wachsend ist und gegen ein Element $z^* \in [a, b]$ konvergiert, welches Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ ist. Die gleiche Aussage gilt für das Verfahren (TV).*

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß nach Lemma 2 aus der Voraussetzung $F''(z) \geqq 0$ die 0-Konvexität von $F(z)$ auf $[a, b]$ sowie die Monotonie der Ableitung $F'(z)$ folgt. Es gilt also $-F'(z) \leqq -F'(a) \leqq \Gamma$ für alle $z \in [a, b]$. Mit Hilfe dieser Bemerkungen folgt jetzt unmittelbar, daß die erste Gleichung des (TH)-Verfahrens für $n=0$, $F(z_0)+F'(z_0)(w_1-z_0)=0$, eine Lösung w_1 mit $a=z_0 \leqq w_1 \leqq b$ besitzt. Der Beweis kann wie in [13], Theorem 5.1, geführt werden und wird hier weggelassen. Zum Beweis, daß die zweite Gleichung des (TH)-Verfahrens eine Lösung besitzt, zeigen wir zunächst, daß die „quadratische Gleichung"

$$F(z_0)+F'(z_0)+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(z-z_0)^2=0$$

eine Lösung r_1 mit $w_1 \leqq r_1 \leqq b$ besitzt.

Dazu betrachten wir den Operator

$$U(z)=z+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0) z+\tfrac{1}{2} F''(z_0) z^2\}$$

auf dem Intervall $[w_1-z_0, b-z_0]$.

Es ist

$$\begin{aligned} U(w_1-z_0) &= w_1-z_0+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0)(w_1-z_0)+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(w_1-z_0)^2\} \\ &= w_1-z_0+\tfrac{1}{2}\Gamma^{-1} F''(z_0)(w_1-z_0)^2 \geqq w_1-z_0 . \end{aligned}$$

Wegen $b \geqq z_0$ gilt nach Lemma 3

$$F(b) \geqq F(z_0)+F'(z_0)(b-z_0)+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(b-z_0)^2$$

und damit

$$\begin{aligned} U(b-z_0) &= b-z_0+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0)(b-z_0)+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(b-z_0)^2\} \\ &\leqq b-z_0+\Gamma^{-1} F(b) \leqq b-z_0 . \end{aligned}$$

Weiter gilt für $z \in [w_1-z_0, b-z_0]$, d. h. $z \geqq 0$, und $\Delta z \geqq 0$

$$\begin{aligned} U(z+\Delta z) &= U(z)+\Delta z+\Gamma^{-1}\{F'(z_0)\Delta z+F''(z_0) z \Delta z+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(\Delta z)^2\} \\ &\geqq U(z)+\Delta z+\Gamma^{-1} F'(z_0)\Delta z \geqq U(z) \end{aligned}$$

wegen $F''(z_0) \geqq 0$ und $\Gamma^{-1} F'(z_0)\Delta z \geqq -\Delta z$.

U ist also auf dem Intervall $[w_1-z_0, b-z_0]$ monoton wachsend. Nach Lemma 4 besitzt $U(z)$ einen Fixpunkt $r' \in [w_1-z_0, b-z_0]$. Setzt man $r_1=z_0+r'$, so gilt $w_1 \leqq r_1 \leqq b$ und $F(z_0)+F'(z_0)(r_1-z_0)+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(r_1-z_0)^2=0$.

Damit zeigen wir nun, daß die zweite Gleichung des (TH)-Verfahrens eine Lösung z_1 besitzt.

Dazu betrachten wir den Operator

$$R(z)=z+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0) z+\tfrac{1}{2} F''(z_0)(w_1-z_0) z\}$$

auf dem Intervall $[w_1-z_0, r_1-z_0]$.

Wie für U gilt

$$R(w_1-z_0) \geqq w_1-z_0 .$$

Außerdem ist wegen $w_1 \leqq r_1$

$$R(r_1-z_0)=r_1-z_0+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0)(r_1-z_0)+\tfrac{1}{2}F''(z_0)[(w_1-r_1)-(z_0-r_1)]\cdot(r_1-z_0)\}$$

$$=r_1-z_0+\tfrac{1}{2}\Gamma^{-1}F''(z_0)(w_1-r_1)(z_1-z_0)\leqq r_1-z_0$$

und für $z\in[w_1-z_0, r_1-z_0]$, $\Delta z\geqq 0$,

$$R(z+\Delta z)=R(z)+\Delta z+\Gamma^{-1}F'(z_0)\Delta z+\tfrac{1}{2}F''(z_0)(w_1-z_0)\Delta z\geqq R(z).$$

Nach Lemma 4 besitzt R einen Fixpunkt $z'\in[w_1-z_0, r_1-z_0]$. Mit $z_1=z_0+z'$ gilt $w_1\leqq z_1\leqq r_1$ und $F(z_0)+F'(z_0)(z_1-z_0)+\frac{1}{2}F''(z_0)(w_1-z_0)(z_1-z_0)=0$. Subtrahiert man diese Gleichung von der nach Lemma 3 wegen $z_1\geqq z_0$ bestehenden Ungleichung

$$F(z_1)\geqq F(z_0)+F'(z_0)(z_1-z_0)+\tfrac{1}{2}F''(z_0)(z_1-z_0)^2$$

so folgt

$$F(z_1)\geqq\tfrac{1}{2}F''(z_0)(z_1-w_1)(z_1-z_0)\geqq 0.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise erhält man eine Folge $\{z_n\}$ mit $z_0\leqq z_1\leqq z_2\leqq\ldots\leqq b$. Aus der Regularität des Banachraumes B_1 folgt die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} z_n=z^*$ mit $a\leqq z^*\leqq b$. Für die Folge $\{w_n\}$ gilt $w_{n+1}\in[z_n, z_{n+1}]$, also $0\leqq w_{n+1}-z_n\leqq z_{n+1}-z_n$, und da B_1 als regulärer Raum normal ist, die Konvergenz der Folge $\{w_n\}$ gegen z^*.

Damit erhält man aus der zweiten Gleichung des (TH)-Verfahrens

$$0\leqq F(z_n)=-F'(z_n)(z_{n+1}-z_n)-\tfrac{1}{2}F''(z_n)(w_{n+1}-z_n)(z_{n+1}-z_n)$$

$$\leqq\Gamma(z_{n+1}-z_n)+\tfrac{1}{2}\Omega(w_{n+1}-z_n)(z_{n+1}-z_n)$$

oder

$$0\leqq\Gamma^{-1}F(z_n)\leqq[I+\tfrac{1}{2}\Gamma^{-1}\Omega(w_{n+1}-z_n)](z_{n+1}-z_n).$$

Aufgrund der Normalität von B_1 folgt $\lim_{n\to\infty}\Gamma^{-1}F(z_n)=0$ und $F(z^*)=0$ mit der Stetigkeit von F.

Der Beweis für Verfahren (TV)

$$F(z_n)+F'(z_n)(w_{n+1}-z_n)=0,$$

$$F(z_n)+F'(z_n)(z_{n+1}-z_n)+\tfrac{1}{2}F''(z_n)(w_{n+1}-z_n)^2=0$$

ist jetzt einfach. Dazu bezeichnen wir hier die von z_n ausgehend mit dem (TH)-Verfahren berechnete Näherung z_{n+1} mit $\bar{z}_{n+1}$. Dann gilt für $n=0$ wie oben bewiesen:

$$\exists\, w_1: z_0\leqq w_1\leqq b \text{ und } F(z_0)+F'(z_0)(w_1-z_0)=0,$$

$$\exists\, \bar{z}_1: w_1\leqq\bar{z}_1\leqq b \text{ und } F(z_0)+F'(z_0)(\bar{z}_1-z_0)+\tfrac{1}{2}F''(z_0)(w_1-z_0)(\bar{z}_1-z_0)=0.$$

Wir betrachten den Operator

$$S(z)=z+\Gamma^{-1}\{F(z_0)+F'(z_0)z+\tfrac{1}{2}F''(z_0)(w_1-z_0)^2\}$$

auf dem Intervall $[w_1-z_0, \bar{z}_1-z_0]$.

Es ist

$$S(w_1 - z_0) \geqq w_1 - z_0$$

und wegen $w_1 - z_0 \leqq \bar{z}_1 - z_0$

$$\begin{aligned} S(\bar{z}_1 - z_0) &= \bar{z}_1 - z_0 + \Gamma^{-1}\{F(z_0) + F'(z_0)(\bar{z}_1 - z_0) + \tfrac{1}{2}F''(z_0)(w_1 - z_0)^2\} \\ &\leqq \bar{z}_1 - z_0 + \Gamma^{-1}\{F(z_0) + F'(z_0)(\bar{z}_1 - z_0) + \tfrac{1}{2}F''(z_0)(w_1 - z_0)(\bar{z}_1 - z_0)\} \\ &= \bar{z}_1 - z_0. \end{aligned}$$

Außerdem bestätigt man die Monotonie von $S(z)$ auf dem betrachteten Intervall. Nach Lemma 4 gibt es einen Fixpunkt $z' \in [w_1 - z_0, \bar{z}_1 - z_0]$ und für $z_1 = z_0 + z'$ gilt $w_1 \leqq z_1 \leqq \bar{z}_1$ und $F(z_0) + F'(z_0)(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}F''(z_0)(w_1 - z_0)^2 = 0$. Subtrahiert man diese Gleichung von der wegen $z_1 \geqq z_0$ nach Lemma 3 bestehenden Ungleichung $F(z_1) \geqq F(z_0) + F'(z_0)(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}F''(z_0)(z_1 - z_0)^2$, so folgt $F(z_1) \geqq \frac{1}{2}F''(z_0)(z_1 - z_0)^2 - \frac{1}{2}F''(z_0)(w_1 - z_0)^2 \geqq 0$. Diese Schlußweise kann man für alle n wiederholen. Wie beim Beweis für das (TH)-Verfahren folgen jetzt alle Behauptungen des Satzes.

Der Beweis von Satz 1 hat gezeigt, daß für ein festes n die nach dem Newton-Verfahren und dem (TH)-Verfahren berechneten Näherungen w_{n+1} und $\bar{z}_{n+1}$ die nach dem (TV)-Verfahren berechnete Näherung z_{n+1} einschließen.

Beim Beweis des letzten Satzes wurde die Regularität des die Halbordnung in B_1 erzeugenden Kegels vorausgesetzt. Dadurch ist z. B. der Raum $C[0,1]$ ausgeschlossen. Man kann diese Voraussetzung abschwächen, wenn man dafür weitere Voraussetzungen hinzunimmt, welche statt Lemma 4 die Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes gestatten. Dieser Gedanke stammt von Mönch [7] und wurde von J. W. Schmidt in [12] verwendet.

Satz 2: *Es sei B_1 ein durch einen normalen Kegel halbgeordneter Banachraum und die Abbildung $F: D \subset B_1 \to B_2$ sei zweimal stetig F-differenzierbar auf einer das Intervall $[a,b]$ enthaltenden Menge $D_0 \subset D$. Es sei $F'(z)$ 0-konvex und $F''(z) \geqq 0$ auf dem Intervall $[a,b]$ sowie $F(a) \geqq 0 \geqq F(b)$. Es gebe einen linearen Operator $\Gamma: B_1 \to B_2$, der einen stetigen positiven inversen Operator besitzt mit $-F'(a) \leq \Gamma$. Es seien $\Gamma + F'(z)$, $\Gamma + F$ und F'' vollstetig. Dann besitzt $F(z) = 0$ eine Lösung z^* im Intervall $[a, b]$ und F besitzt ausgehend von $z_0 = a$ eine (TV)-Folge für die $a = z_0 \leqq z_1 \leqq \ldots \leqq z^* \leqq b$ gilt. Die gleiche Aussage gilt für das Verfahren (TH).*

Beweis: Der Beweis erfordert gegenüber Satz 1 nur wenig Änderungen. Wir führen zusätzlich den Operator $V(z) = z + \Gamma^{-1}(F(z_0) + F'(z_0)z)$ ein.

Es ist $V(0) = \Gamma^{-1}F(z_0) \geqq 0$, $V(b - z_0) \leqq b - z_0$ und V monoton auf dem Intervall $[0, b - z_0]$. $V(z) = \Gamma^{-1}(\Gamma z + F'(z_0)z + F(z_0))$ ist als Produkt aus einem beschränkten linearen Operator und einem vollstetigen Operator vollstetig und damit stetig. Der Operator V bildet also das (wegen der Normalität des Kegels in B_1) beschränkte Intervall $[0, b - z_0]$ in sich ab und die Bildmenge ist wegen der Vollstetigkeit kompakt. Da das Intervall $[0, b - z_0]$ abgeschlossen und konvex ist, besitzt V aufgrund des Schauderschen Fixpunktsatzes einen Fixpunkt $w' \in [0, b-z_0]$. Für $w_1 = z_0 + z'$ gilt $z_0 \leqq w_1 \leqq b$ und $F(z_0) + F'(z_0)(w_1 - z_0) = 0$. Aufgrund der weiteren Voraussetzungen dieses Satzes folgen die Vollstetigkeit der Operatoren $U(z)$, $R(z)$ und $S(z)$ aus Satz 1 und die Anwendbarkeit des Schauderschen Fixpunktsatzes. Durch vollständige Induktion folgt die Behauptung über die Monotonie der Iterationsfolgen. Der Operator $T(x) = x + \Gamma^{-1} F(x) = \Gamma^{-1} (\Gamma x + F(x))$ ist vollstetig aufgrund der getroffenen Voraussetzungen. Es bezeichne $\{z_n\}$ die nach (TH) oder (TV) berechnete Iterationsfolge. Dann gilt

$$T(z_n) = z_n + \Gamma^{-1} F(z_n) \geqq z_n, \quad T(b) = b + \Gamma^{-1} F(b) \leqq b.$$

Außerdem ist T stetig und monoton auf $[z_n, b]$, denn es ist für $y \geqq x$, $x, y \in [z_n, b]$, $T(y) - T(x) = y - x + \Gamma^{-1} (F y - F) \geqq y - x + \Gamma^{-1} F(x)(y-x) \geqq 0$. T bildet also jedes Intervall $[z_n, b]$ in sich ab und besitzt daher aufgrund des Schauderschen Satzes einen Fixpunkt $z^* \in [z_n, b]$ und es gilt $F(z^*) = 0$.

Vandergraft hat in [13] an einem Beispiel gezeigt, daß aus der Existenz der Newton-Folge $\{w_n\}$ für eine Abbildung F nicht die Existenz von $F'(w_n)^{-1}$ folgt und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $F'(w_n)^{-1}$ angegeben. Diese Aussagen haben aufgrund der Tatsache, daß in der zweiten Gleichung des (TV) ebenfalls eine lineare Gleichung mit dem beim Newtonschritt auftretenden linearen Operator gelöst werden muß, ohne weitere Überlegungen Gültigkeit. Interessanterweise sind diese Bedingungen, wie im folgenden gezeigt wird, auch für die Existenz des inversen Operators $[F'(z_n) + \frac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)]^{-1}$ im zweiten Teil des (TH)-Verfahrens hinreichend.

Satz 3: *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 1 sei der in B_2 die Halbordnung erzeugende Kegel solid und entweder $B_1 = B_2 = R^n$ oder $F'(z)$ injektiv für alle $z \in [a, b]$. Außerdem sei entweder $F(b)$ ein innerer Punkt des positiven Kegels von B_2 oder $-F'(z) \geqq \Delta_z$, wobei Δ_z ein linearer Operator ist, dessen Inverser stetig und positiv ist. Dann gelten alle Aussagen von Satz 1. Die Operatoren $-F'(z_n)^{-1}$ und $-[F'(z_n) + \frac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)]^{-1}$ existieren und sind positiv.*

Beweis: Der Beweis für $-F(z_n)^{-1}$ ist in [13], Theorem 5.3, enthalten. Der Beweis für $-[F(z_n) + \frac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)]^{-1}$ erfordert nur wenige Modifikationen. Statt des in Theorem 5.3 in [13] eingeführten Operators $V(z) = z + \Gamma^{-1}(w + F'(z_n) z)$ mit $w \geqq 0$ betrachte man den Operator

$$V(z) = z + \Gamma^{-1} \{w + [F'(z_n) + \tfrac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)] z\}.$$

Wegen $F''(z_n) \geqq 0$ und $w_{n+1} - z_n \leqq 0$ lassen sich alle Schlüsse analog durchführen.

Es ist — wie in der Einleitung erwähnt — bekannt, daß die beiden Verfahren (TH) und (TV) kubisch konvergieren, falls F dreimal stetig differenzierbar ist. Wir beweisen hier

Satz 4: *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Weiter gebe es einen linearen Operator $\Gamma_1 : B_1 \to B_2$ mit $-F'(b) \geqq \Gamma_1$, so daß Γ_1 einen stetigen positiven inversen Operator besitzt. Dann konvergieren die Verfahren (TH) und (TV)*

schneller als quadratisch. Genügt die zweite Ableitung F'' auf dem Intervall $[a, b]$ einer Hölderbedingung $\| F''(x) - F''(y) \| \leqq \gamma \| x - y \|^{\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, $x, y \in [a, b]$ und ist $\| F''(z) \| \leqq M_1$ für $z \in [a, b]$, so konvergieren beide Verfahren mindestens von der Ordnung $2 + \lambda$. Ist insbesondere F dreimal stetig F-differenzierbar auf $[a, b]$, so konvergieren beide Verfahren mindestens kubisch, falls $\| F'''(z) \| \leqq M_2$ für $z \in [a, b]$ gilt.

Beweis: Wir führen den Beweis für das Verfahren (*TV*). Aus der zweiten Gleichung $F(z_n) + F'(z_n)(z_{n+1} - z_n) + \frac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)^2 = 0$ dieses Verfahrens folgt wegen der Monotonie der Ableitung $F'(z)$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 (z^* - z_{n+1}) &\leqq -F'(z_n)(z^* - z_{n+1}) \\
&= -F(z_n) - F'(z_n)(z^* - z_n) - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z_n)^2 \\
&= -F(z_n) - F'(z_n)(z^* - z_n) - \tfrac{1}{2} F''(z_n)[w_{n+1} - z^* + z^* - z_n]^2 \\
&= -F(z_n) - F'(z_n)(z^* - z_n) - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(z^* - z_n)^2 \\
&\quad - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(w_{n+1} - z^*)^2 + F''(z_n)(z^* - z_n)(z^* - w_{n+1}) \\
&\leqq -F(z_n) - F'(z_n)(z^* - z_n) - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(z^* - z_n)^2 + F''(z_n)(z^* - z_n)(z^* - w_{n+1}).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Taylorschen Formel gilt

$$0 = F(z^*) = F(z_n) + F'(z_n)(z^* - z_n) + \int_0^1 F''\big(z_n + t(z^* - z_n)\big)(1-t)(z^* - z_n)^2$$

und damit

$$\begin{aligned}
& -F(z_n) - F'(z_n)(z^* - z_n) - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(z^* - z_n)^2 = \\
& \int_0^1 \left[F''\big(z_n + t(z^* - z_n)\big)(1-t)(z^* - z_n)^2 - \tfrac{1}{2} F''(z_n)(z^* - z_n)^2\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[F''\big(z_n + t)(z^* - z_n)\big) - F''(z_n)\right](1-t)(z^* - z_n)^2\, dt + \int_0^1 F''(z_n)\left(\tfrac{1}{2} - t\right)(z^* - z_n)^2\, dt.
\end{aligned}$$

Das zweite Integral ist gleich dem Nullvektor. In [13], Theorem 5.2, hat Vandergraft die Beziehung

$$0 \leqq z^* - w_{n+1} \leqq \Gamma_1^{-1} \int_0^1 F''\big(z^* + t(z_n - z^*)\big)(z^* - z_n)^2\, dt$$

gezeigt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 \leqq z^* - z_{n+1} \leqq \Gamma_1^{-1} & \int_0^1 \left[F''\big(z_n + t(z^* - z_n)\big) - F''(z_n)\right](1-t)(z^* - z_n)^2\, dt \\
& + \Gamma_1^{-1} F''(z_n)(z^* - z_n)\, \Gamma_1^{-1} \int_0^1 F''\big(z^* + t(z_n - z^*)\big)(z^* - z_n)^2\, dt.
\end{aligned}$$

Durch Übergang zur Norm folgen wegen der Stetigkeit bzw. Hölder-Stetigkeit von F'' die beiden ersten Behauptungen. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus dem Mittelwertsatz, angewandt auf $F''(z)$. Der Beweis für das Verfahren (*TH*) verläuft im wesentlichen analog.

4. Beispiele

1. Wir betrachten die Integralgleichung

$$2\,z(s)-\int_0^1 st\,[z(t)]^2\,dt=\tfrac{3}{4}\sqrt{s}.$$

Für $F: L^2\,[0,1]\to L^2\,[0,1]$ mit

$$F\big(z(s)\big)=\tfrac{3}{4}\sqrt{s}+\int_0^1 st\,[z(t)]^2\,dt-2\,z(s)$$

gilt

$$F'\big(z(s)\big)\,h(s)=2\int_0^1 st\,z(t)\,h(t)\,dt-2\,h(s)$$

$$F''\big(z(s)\big)\,h(s)\,k(s)=2\int_0^1 st\,h(t)\,k(t)\,dt,$$

$$F'''\big(z(s)\big)=0.$$

Es ist

$$F(0)=\tfrac{3}{4}\sqrt{s}\geqq 0$$

$$F(b)\leqq 0 \quad \text{für} \quad b=2-\tfrac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Wegen $F''\big(z(s)\big)\geqq 0$ und $F'''\big(z(s)\big)=0$ sind F und F' 0-konvex. Außerdem ist $-F'(0)\,h(s)\leqq 2\,h(s)$, d.h. $-F'(0)\leqq\Gamma=2\,I$. Somit konvergieren nach Satz 1 die Verfahren (TH) und (TV) ausgehend von $z_0(s)=0$ monoton wachsend gegen eine Lösung von $F\big(z(s)\big)=0$, die im Intervall $[0,b]$ liegt.

Der Newton-Schritt liefert

$$w_1(s)=\tfrac{3}{8}\sqrt{s}.$$

Damit erhält man als erste Näherung des (TV)-Verfahrens

$$z_1(s)=\tfrac{3}{8}\sqrt{s}+\tfrac{3}{128}\,s$$

und als erste Näherung des (TH)-Verfahrens

$$z_1(s)=\tfrac{3}{8}\sqrt{s}+\tfrac{21}{848}\,s.$$

Diese Näherungen lassen sich einfach weiter verbessern.

2. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Integralgleichung von Chandrasekhar

$$H(s)=1+s\cdot H(s)\int_0^1 \frac{f(t)\cdot H(t)}{s+t}\,dt$$

mit einer nichtnegativen Funktion $f(s)$. (Siehe [9], [13].)

Für

$$F\big(z(s)\big)=1+s\,z(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,z(t)}{s+t}\,dt-z(s)$$

gilt

$$F'(z(s))\,h(s)=s\,h(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,z(t)}{s+t}\,dt+s\,z(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,h(t)}{s+t}\,dt-h(s),$$

$$F''(z(s))\,h(s)\,k(s)=s\,h(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,k(t)}{s+t}\,dt+s\,k(s)\int_0^1 \frac{f(t)\,h(t)}{s+t}\,dt,$$

$$F'''(z(s))=0.$$

Wegen $F''(z(s))\geqq 0$ und $F'''(z(s))=0$ sind F und F' 0-konvex.
Außerdem ist $F(0)=1\geqq 0$ und $F(2)\leqq 0$ für $f(t)\leqq\frac{1}{4\,ln\,2}$ sowie $-F'(0)\leqq I$.

Mit dem Tschebyscheff-Verfahren erhält man als untere Schranke einer Lösung $H(s)$ die im Intervall $[0, 2]$ liegt

$$z_1(s)=1+s\int_0^1 \frac{f(t)}{s+t}\,dt.$$

3. Zur Berechnung von numerischen Werten der Lösung der unter 2. betrachteten Gleichung wurde die Integralgleichung mit Hilfe einer 9 Punkte Gaußschen Quadraturformel für $f(t)=\frac{1}{4}$ in ein nichtlineares Gleichungssystem übergeführt. Man überzeugt sich leicht davon, daß alle Voraussetzungen von Satz 1 für das Intervall $[a, b]$ mit $a=(a_i)$, $a_i=1$, $i=1\,(1)\,9$ und $b=(b_i)$ mit $b_i=2$, $i=1\,(1)\,9$ erfüllt sind. Die nachfolgende Tabelle enthält die Iterierten für die Näherung $z_n(0{,}5)$ der Lösung $z^*(0{,}5)$.

n	Newton	Tschebyscheff	Tangierende Hyperbeln
0	1.0	1.0	1.0
1	1.1825830	1.1874593	1.1875915
2	1.1877312	1.1877352	1.1877352
3	1.1877352	1.1877352	1.1877352
4	1.1877352		

Die Durchführung der Rechnungen erfolgte auf der Rechenanlage UNIVAC 1108 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe. Die Programmierung besorgte Herr cand. math. Peter T. Speck.

Literatur

[1] Collatz, L.: Funktionsanalysis und numerische Mathematik. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1965.

[2] Döring, B.: Das Tschebyscheff-Verfahren in Banach-Räumen. Numer. Math. **15**, 175—195 (1970).

[3] Döring, B.: Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen. Aplikace Matematiky **15**, 418—466 (1970).

[4] Kantorowitsch, L. W.: The method of successive approximations for functional equations. Acta Math. **71**, 63—97 (1939).

[5] Kantorowitsch, L. W., und G. P. Akilow: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag. 1964.

[6] Krasnoselski, M. A.: Positive Solutions of Operator Equations. Groningen: Noordhoff. 1964.

[7] Mönch, W.: Monotone Einschließung von Nullstellen, Zwischenbericht im Forschungsstudium. TU Dresden 1971 (unveröffentlicht).
[8] Ortega, J. M., and W. C. Rheinboldt: Iterative Solution of Equations of Several Variables. New York-London: Academic Press. 1970.
[9] Rall, L. B.: Computational Solution of Nonlinear Operator Equations. J. Wiley. 1969.
[10] Schmidt, J. W., und H. Leonhardt: Eingrenzung von Lösungen mit Hilfe der Regula Falsi. Computing **6**, 118—191 (1960).
[11] Schmidt, J. W.: Eingrenzung von Lösungen mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit. Computing **8**, 208—215 (1971).
[12] Schmidt, J. W.: Einschließung von Nullstellen bei Operatoren mit monoton zerlegbarer Steigung durch überlinear konvergente Iterationsverfahren. Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica (1972).
[13] Vandergraft, J. S.: Newton's method for convex operators in partially ordered spaces. SIAM J. Numer. Anal. **4**, 406—432 (1967).

Privatdozent Dr. Götz Alefeld
Universität Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
Kaiserstraße 12
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland

Printed in Austria
Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien