Sonderdruck aus
„Numerische Mathematik" 20, 312—316 (1973)

Über Konvergente Zerlegungen von Matrizen

G. Alefeld

Herrn Professor Dr. Johannes Weissinger
zum 60. Geburtstag gewidmet

Numer. Math. 20, 312—316 (1973)

Über konvergente Zerlegungen von Matrizen

G. Alefeld

Herrn Professor Dr. Johannes Weissinger zum 60. Geburtstag gewidmet

Eingegangen am 14. April 1972

Abstract. Let A, M, N be $n \times n$ real matrices, let $A = M - N$, let A and M be nonsingular. Let $M'y \geqq 0$ imply $N'y \geqq 0$ (where the prime denotes the transpose). Then $A'y \geqq 0$ implies $N'y \geqq 0$ if and only if the spectral radius $\varrho(M^{-1}N)$ of $M^{-1}N$ is less than one. This complements a result of Mangasarian, given in [1]. The same conclusions are true if A', M', and N' are replaced by A, M, and N respectively. The proof given here does not make use of the Perron-Frobenius theorem.

Vorgelegt sei die Aufgabe, das lineare Gleichungssystem

$$A x = b$$

— mit einer reellen nichtsingulären $n \times n$ Matrix A und einem Vektor b — aufzulösen. Viele Iterationsverfahren (Gesamtschritt-, Einzelschritt-, Relaxationsverfahren) erhält man dadurch, daß man die Matrix A in die Differenz zweier reeller $n \times n$ Matrizen M und N mit einer nichtsingulären Matrix M zerlegt und dann gemäß

$$x^{k+1} = M^{-1} N x^k + M^{-1} b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \; x^0 \text{ beliebig},$$

iteriert (s. etwa [3]). Das Iterationsverfahren konvergiert genau dann für jedes x^0, wenn der Spektralradius $\varrho(M^{-1}N)$ von $M^{-1}N$ kleiner als eins ist.

In [1] hat Mangasarian bewiesen, daß für eine Zerlegung $A = M - N$ mit reellen nichtsingulären Matrizen A und M aus

$$M'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0$$

die Beziehung

$$\varrho(M^{-1}N) < 1$$

folgt, falls

$$A'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0$$

gilt. (Der Strich bedeutet Übergang zur transponierten Matrix.)

In dieser Note wird diese Aussage verschärft zu folgendem

Satz 1. Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von A mit reellen nichtsingulären Matrizen A und M. Gilt

$$M'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0,$$

so folgt

$$(A'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0) \Leftrightarrow \varrho(M^{-1}N) < 1.$$

Als eine weitere Aussage erhalten wir

Satz 1*. Es sei $A = M - N$ eine Zerlegung von A mit reellen nichtsingulären Matrizen A und M. Gilt

$$My \geqq 0 \Rightarrow Ny \geqq 0,$$

so folgt

$$(Ay \geqq 0 \Rightarrow Ny \geqq 0) \Leftrightarrow \varrho(M^{-1}N) < 1,$$

dessen Beweis sich aus Satz 1 folgendermaßen ergibt:

Mit

$$\tilde{M} := M', \qquad \tilde{N} := N', \qquad \tilde{A} := A',$$

sind die Aussagen von Satz 1* äquivalent mit:

Es gelte

$$\tilde{M}'y \geqq 0 \Rightarrow \tilde{N}'y \geqq 0.$$

Dann gilt

$$(\tilde{A}'y \geqq 0 \Rightarrow \tilde{N}'y \geqq 0) \Leftrightarrow \varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) < 1.$$

Das ist Satz 1, wobei A durch $\tilde{A}$, M durch $\tilde{M}$ und N durch $\tilde{N}$ ersetzt ist. Wegen

$$\varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) = \varrho\left((M')^{-1}N'\right) = \varrho\left((NM^{-1})'\right) = \varrho(NM^{-1}) = \varrho(M^{-1}N)$$

gilt

$$\varrho(M^{-1}N) < 1 \Leftrightarrow \varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) < 1.$$

Der „$\Rightarrow$"-Teil von Satz 1 wurde in [1] mit Hilfe des Satzes von Perron und Frobenius über die Existenz eines nichtnegativen Eigenwertes einer nichtnegativen Matrix mit dazugehörigem nichtnegativen Eigenvektor geführt. Wir wollen hier einen elementaren Beweis angeben, aus dem sich dann auch unmittelbar der „$\Leftarrow$"-Teil ablesen läßt.

Wie in [1] benötigen wir die Aussagen von

Lemma 1. Es seien A, M und N reelle quadratische Matrizen, A und M nichtsingulär. Dann gilt:

$$(M'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0) \Leftrightarrow (N = MX \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } X \geqq 0),$$

$$(A'y \geqq 0 \Rightarrow N'y \geqq 0) \Leftrightarrow (N = AY \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Y \geqq 0),$$

dessen kurzen Beweis wir zur Vollständigkeit angeben:

„$\Rightarrow$": Wir wählen $z \geqq 0$. Dann gilt mit $y = (M')^{-1}z$ nach Voraussetzung

$$M'(M')^{-1}z = z \geqq 0 \Rightarrow N'(M')^{-1}z \geqq 0,$$

d. h., $X' = N'(M')^{-1} \geqq 0$, oder $N = MX$ mit $X \geqq 0$.

„$\Leftarrow$": Sei $X = M^{-1}N \geqq 0$. Dann ist

$$X' = (M^{-1}N)' = N'(M^{-1})' \geqq 0.$$

Gilt nun $M'y \geqq 0$, so folgt

$$N'(M^{-1})'M'y \geqq 0, \quad \text{also} \quad N'y \geqq 0.$$

Entsprechend beweist man die zweite Äquivalenzrelation.

In Lemma 1 wird nicht verwendet, daß die Differenz $M-N$ eine Zerlegung von A ist. Setzen wir dies voraus, so erhalten wir die Aussagen des folgenden

Lemma 2. Sei $A=M-N$, A und M nichtsingulär und $N=MX$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X\geqq 0$. Dann gilt

$$(N=AY \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Y\geqq 0)$$
$$\Leftrightarrow (M=AZ \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Z\geqq 0).$$

Beweis. „⇒“: Sei $N=AY$ mit $Y\geqq 0$. Dann gilt

$$A^{-1}N=Y\geqq 0\geqq -I \qquad (I \text{ Einheitsmatrix}),$$

also

$$0\leqq A^{-1}N+I=A^{-1}(N+A)=A^{-1}M,$$

oder

$$M=AZ \quad \text{mit} \quad Z=A^{-1}N+I\geqq 0.$$

„⇐“: Sei $M=AZ$ mit $Z\geqq 0$. Dann folgt mit $N=MX$ die Beziehung $N=AZX$, also $N=AY$ mit $Y=ZX\geqq 0$ wegen $Z\geqq 0$, $X\geqq 0$.

Aufgrund von Lemma 1 und 2 sind die Aussagen von Satz 1 mit den folgenden Aussagen identisch:

Satz 2. Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von A, A und M nichtsingulär, und $N=MX$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X\geqq 0$. Dann gilt

$$(M=AZ \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Z\geqq 0)\Leftrightarrow \varrho(M^{-1}N)<1.$$

Beweis. „⇒“: Wegen $Z=A^{-1}M\geqq 0$ gilt

$$0\leqq A^{-1}M=(M-N)^{-1}M=[M^{-1}(M-N)]^{-1}=(I-M^{-1}N)^{-1}=(I-X)^{-1}.$$

Wegen $(I-X)^{-1}\geqq 0$ und $X=M^{-1}N\geqq 0$ folgt $\varrho(M^{-1}N)<1$ (s. etwa [2], S. 53, Satz 2.4.5).

„⇐“: Ist umgekehrt $\varrho(M^{-1}N)<1$ und $X=M^{-1}N\geqq 0$, so existiert aufgrund derselben Quelle $(I-X)^{-1}$, und es ist

$$0\leqq (I-X)^{-1}=(I-M^{-1}N)^{-1}=A^{-1}M,$$

also $M=AZ$ mit $Z\geqq 0$.

Bemerkung. Der Nachweis der beim Beweis von Satz 2 verwendeten Aussage:

$$B\geqq 0\Rightarrow \big(\varrho(B)<1\Leftrightarrow (I-B)^{-1} \text{ existiert und } (I-B)^{-1}\geqq 0\big)$$

wird in [2] (im Gegensatz etwa zu [3], S. 83, Satz 3.8) ohne Verwendung der Perron-Frobenius-Theorie geführt. Der Satz von Perron und Frobenius wird also hier auch nicht implizit zum Beweis von Satz 1 verwendet.

Eine entsprechende Umformulierung von Satz 1*, wie die von Satz 1 durch Satz 2, ist

Satz 2*. Es sei $A=M-N$ eine Zerlegung von A, A und M nichtsingulär, und $N=XM$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X\geqq 0$. Dann gilt

$$(M=ZA \text{ mit einer reellen quadratischen Matrix } Z\geqq 0)\Leftrightarrow \varrho(M^{-1}N)<1.$$

Beweis. Mit

$$\tilde{M} := M', \qquad \tilde{N} := N' \quad \text{und} \quad \tilde{A} := A'$$

sind die Aussagen von Satz 2* äquivalent mit:

Es sei $\tilde{A}' = \tilde{M}' - \tilde{N}'$ eine Zerlegung von $\tilde{A}$, $\tilde{A}$ und $\tilde{M}$ nichtsingulär, und $\tilde{N}' = X\tilde{M}'$, d. h., $\tilde{N} = \tilde{M}X'$ mit einer reellen quadratischen Matrix $X \geqq 0$. Dann gilt ($\tilde{M}' = Z\tilde{A}'$, d. h., $\tilde{M} = \tilde{A}Z'$ mit einer quadratischen Matrix $Z' \geqq 0$) $\Leftrightarrow \varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) < 1$. Das ist Satz 2, wobei A durch $\tilde{A}$, M durch $\tilde{M}$ und N durch $\tilde{N}$ ersetzt ist. Wegen $\varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) = \varrho((M')^{-1}N') = \varrho(M^{-1}N)$ folgt $\varrho(M^{-1}N) < 1 \Leftrightarrow \varrho(\tilde{M}^{-1}\tilde{N}) < 1$, und mit Lemma 1 und 2 folgt die Äquivalenz mit Satz 1*.

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 1 (oder Satz 2) nicht notwendig erfüllt sind, wenn die Voraussetzungen von Satz 1* (oder Satz 2*) vorliegen und umgekehrt.

(a) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{s. } [1]).$$

Mit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$X = M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \geqq 0, \qquad Z = A^{-1}M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geqq 0$$

und Satz 2 ist anwendbar.

Dagegen sind

$$NM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad MA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

beide nicht nichtnegativ, und Satz 2* ist nicht anwendbar.

(b) $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1}M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

so daß Satz 2 nicht anwendbar ist. Dagegen ist

$$X = NM^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geqq 0, \qquad Y = MA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geqq 0,$$

und Satz 2* ist anwendbar.

Literatur

1. Mangasarian, O. L.: A convergent splitting of matrices. Numer. Math. **15**, 351—353 (1970).
2. Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York-London: Academic Press 1970.
3. Varga, R. S.: Matrix iterative analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall 1962.

Priv.-Doz. Dr. Götz Alefeld
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
D-7500 Karlsruhe
Kaiserstraße 12
Bundesrepublik Deutschland