ZAMM 52, 233–238 (1972)

Über reguläre Zerlegungen bei nichtlinearen Abbildungen

Von G. Alefeld

In [3] hat R. S. Varga den Begriff der regulären Zerlegung einer Matrix eingeführt und damit die Konvergenz einiger Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme nachgewiesen. In dieser Arbeit sollen diese Ergebnisse in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden: Einerseits werden auch nichtlineare Abbildungen zugelassen, andererseits werden alle Aussagen in einem halbgeordneten Banachraum formuliert und bewiesen. Als konkrete Anwendung ergeben sich unmittelbar Aussagen über die Konvergenz einiger Iterationsverfahren zur Auflösung nichtlinearer Gleichungssysteme im R^n.

In [3] R. S. Varga has given the definition of regular splittings of a matrix. This concept allows to prove convergence for some iterative methods for solving a wide class of system of linear equations. In this paper we generalize this concept to nonlinear mappings in Banach-space. In this way we immediately can make conclusions about convergence of some iterative methods for solving nonlinear systems of equations.

В [3] ввёл Р. С. Варга понятие регулярного разложения матрицы и доказал этим сходимость некоторых методов итерации для решения линейных систем уравнений. В предлагаемой работе производится обобщение этих результатов в двояком отношении: с одной стороны допускаются также нелинейные отображения а с другой стороны все высказывания формулируются и доказываются в полуупорядоченном пространстве Банаха. В качестве конкретного применения получены непосредственно формулировки относительно сходимости некоторых методов итерации для решения нелинейных систем уравнений R^n.

I.

Es sei B ein Banachraum und K ein Kegel in B, d. h., K ist eine abgeschlossene Teilmenge von B mit den Eigenschaften $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ für $\lambda \geqq 0$ und $K \cap -K = \{0\}$. Dann ist durch „$x \leqq y$ *genau dann, wenn* $y - x \in K$" in B eine mit der linearen Struktur verträglichen Halbordnung erklärt.

Definition 1: Gegeben sei eine stetige Abbildung $F: B \to B$, $F = F(x)$. Eine Abbildung $\hat{F}: B \times B \to B$, $\hat{F} = \hat{F}(x, y)$, heißt Zerlegung von F genau dann, wenn gilt:

1. $\hat{F}(x, y)$ ist stetig;
2. $\hat{F}(x, x) = F(x) \quad \forall x$.

Jeder Zerlegung $\hat{F}(x, y)$ von $F(x)$ kann man ein Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$ zur Auflösung von $F(x) = w$ zuordnen.

Beispiel 1: Wir geben für einige Abbildungen Zerlegungen und die dazugehörigen Iterationsverfahren an.

(1) Banachraum B:

(a) $F(x) = (I - F_1)(x)$:

(α) $\hat{F}(x, y) = x - F_1(y)$;

$x^{k+1} = F_1(x^k) + w$;

(β) $\hat{F}(x, y) = \frac{1}{\omega} x - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_1(y)], \quad \omega > 0$;

$x^{k+1} = (1 - \omega) x^k + \omega [F_1(x^k) + w]$;

(b) $F(x) = (I - F_1 - F_2)(x)$:

(α) $\hat{F}(x, y) = x - F_1(y) - F_2(y)$;

$x^{k+1} = F_1(x^k) + F_2(x^k) + w$;

(β) $\hat{F}(x, y) = x - F_1(x) - F_2(y)$;

$x^{k+1} - F_1(x^{k+1}) = F_2(x^k) + w$;

(γ) $\hat{F}(x, y) = \frac{1}{\omega} x - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_1(y) + \omega F_2(y)], \quad \omega > 0$;

$x^{k+1} = (1 - \omega) x^k + \omega F_1(x^k) + \omega F_2(x^k) + \omega w$;

(δ) $\hat{F}(x, y) = \frac{1}{\omega} [x - \omega F_1(x)] - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_2(y)], \quad \omega > 0$;

$x^{k+1} - \omega F_1(x^{k+1}) = (1 - \omega) x^k + \omega F_2(x^k) + \omega w$;

(2) $B = R^n$ (n-dimensionaler Vektorraum):

$$x = (x_i);\; F(x) = \big(f_i(x_1, \ldots, x_n)\big) = \big(f_i(x)\big);\; x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i\,, \quad i = 1(1)\,n\,.$$

(α) $$\hat{F}(x, y) = \big(f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\big):$$
$$f_i(x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = w_i\,, \quad i = 1(1)\,n;$$

(β) $$\hat{F}(x, y) = \big(f_i(x_1, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\big):$$
$$f_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = w_i\,, \quad i = 1(1)\,n;$$

(γ) $$\hat{F}(x, y) = \left(f_i\left(y_1, \ldots, y_{i-1}, \frac{1}{\omega}\,[x_i - (1-\omega)\,y_i]\,, y_{i+1}, \ldots, y_n\right)\right), \quad \omega > 0;$$
$$f_i\left(x_1^k, \ldots, x_{i-1}^k\,, \frac{1}{\omega}\,[x_i^{k+1} - (1-\omega)\,x_i^k]\,, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k\right) = w_i\,, \quad i = 1(1)\,n;$$

(δ) $$\hat{F}(x, y) = \left(f_i\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \frac{1}{\omega}\,[x_i - (1-\omega)\,y_i]\,, y_{i+1}, \ldots, y_n\right)\right), \quad \omega > 0;$$
$$f_i\left(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}\,, \frac{1}{\omega}\,[x_i^{k+1} - (1-\omega)\,x_i^k]\,, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k\right) = w_i\,, \quad i = 1(1)\,n;$$

Üblicherweise bezeichnet man die Verfahren (2), (α) bis (δ) als Gesamtschrittverfahren, Einzelschrittverfahren, Relaxationsverfahren in Gesamtschritten und Relaxationsverfahren in Einzelschritten. Die Durchführung eines Iterationsschrittes, d. h. die Berechnung von x^{k+1} aus x^k, erfordert dabei die Auflösung von n eindimensionalen nichtlinearen Gleichungen, falls F nicht linear ist.

II.

Ist eine Zerlegung $\hat{F}(x, y)$ von $F(x)$ gegeben, so entsteht die Frage, unter welchen Voraussetzungen die durch das zugeordnete Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$ definierte Folge $\{x^k\}$ eindeutig bestimmt ist, konvergiert, und wann der Grenzwert x^* eine Lösung von $F(x) = w$ ist. Um darüber zu Aussagen zu kommen, geben wir die folgende

Definition 2: Eine Zerlegung $\hat{F}\colon B \times B \to B$, $\hat{F} = \hat{F}(x, y)$, von $F\colon B \to B$, $F = F(x)$, heißt regulär, wenn folgendes gilt:

1. $\hat{F}(x^1, y) \leqq \hat{F}(x^2, y) \Rightarrow x^1 \leqq x^2 \quad \forall\, y$; (invers isoton)
   $\forall\, y, w\; \exists\, x\colon \hat{F}(x, y) = w$; (surjektiv)
2. $y^1 \leqq y^2 \Rightarrow \hat{F}(x, y^1) \geqq F(x, y^2) \quad \forall\, x$; (antiton)

Bemerkung 1: Da eine invers isotone Abbildung injektiv ist, folgt für gegebenes y und w die Eindeutigkeit eines Elementes x mit $\hat{F}(x, y) = w$.

Beispiele II:

(1)
(a) (α) regulär, falls F_1 isoton;
(β) regulär, falls F_1 isoton und $0 < \omega \leqq 1$;
(b) (α) regulär, falls $F_1 + F_2$ isoton;
(β) regulär, falls $I - F_1$ invers isoton und surjetiv und F_2 isoton;
(γ) regulär, falls $F_1 + F_2$ isoton und $0 < \omega \leqq 1$;
(δ) regulär, falls $I - \omega\, F_1$ invers isoton und surjektiv, F_2 isoton und $0 < \omega \leqq 1$.

(2) Wir zitieren einige Definitionen (siehe [2]):

Eine Abbildung: $F\colon R^n \to R^n$, $F(x) = \big(f_i(x_1, \ldots, x_n)\big) = \big(f_i(x)\big)$ heißt außendiagonal antiton, wenn für jedes $x \in R^n$ die Abbildungen

$$\varphi_{ij}\colon R^1 \to R^1, \quad \varphi_{ij} = f_i(x + t\,e^j)\,, \quad i \neq j, \quad i, j = 1(1)\,n, \text{ antiton sind.}$$

(e^j bedeutet den j-ten Einheitsvektor).

$F\colon R^n \to R^n$ heißt surjektiv diagonal isoton, wenn für jedes $x \in R^n$ die Abbildungen

$\varphi_{ii}\colon R^1 \to R^1$, $\varphi_{ii} = f_i\,(x + t\,e^i)$, $i = 1(1)\,n$, surjektiv und streng isoton sind.

Lemma 1: *Ist $F\colon R^n \to R^n$ außendiagonal antiton und surjektiv diagonal isoton, so sind die Zerlegungen (γ) und (δ) für $0 < \omega \leqq 1$ (und damit auch die Zerlegungen (α) und (β)) regulär.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

Wir beweisen nun einige Aussagen, welche für sich von Interesse sind. Mit ihrer Hilfe werden wir jedoch auch das Hauptergebnis (Satz 3) beweisen. Zuvor zitieren wir noch die

Definition 3: Ein Kegel $K \subset B$ heißt regulär, wenn jede (in der Ordnung) beschränkte monoton wachsende oder fallende Folge konvergent ist. (Siehe [1], Seite 36).

Satz 1: *Es sei B ein durch einen regulären Kegel K halbgeordneter Banachraum und*

$\hat{F}: B \times B \to B$ eine reguläre Zerlegung der stetigen Abbildung $F: B \to B$. Es gebe $x^0, y^0 \in B$ mit $x^0 \leqq y^0$, $F(x^0) \leqq w \leqq F(y^0)$.

Die Folgen $\{x^k\}$ bzw. $\{y^k\}$ werden nach $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$ bzw. $\hat{F}(y^{k+1}, y^k) = w$ berechnet. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x^0 \leqq x^k \leqq x^{k+1} \leqq y^{k+1} \leqq y^k \leqq y^0 \\ F(x^k) \leqq w \leqq F(y^k) \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots .$$

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^* \leqq y^* = \lim_{k\to\infty} y^k, \quad F(x^*) = F(y^*) = w.$$

Beweis: Es sei

$$x^0 \leqq x^k \leqq y^k \leqq y^0, \quad F(x^k) \leqq w \leqq F(y^k)$$

für ein $k \geqq 0$, was sicherlich für $k = 0$ richtig ist. Dann folgt

$$\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w = \hat{F}(y^{k+1}, y^k) \leqq \hat{F}(y^{k+1}, x^k) \Rightarrow x^{k+1} \leqq y^{k+1}.$$

$$\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w \geqq F(x^k) = \hat{F}(x^k, x^k) \Rightarrow x^{k+1} \geqq x^k.$$

$$\hat{F}(y^{k+1}, y^k) = w \leqq F(y^k) = \hat{F}(y^k, y^k) \Rightarrow y^{k+1} \leqq y^k.$$

Mit den beiden letzten Ungleichungen folgt

$$w = \hat{F}(x^{k+1}, x^k) \geqq \hat{F}(x^{k+1}, x^{k+1}) = F(x^{k+1})$$

und

$$w = \hat{F}(y^{k+1}, y^k) \leqq \hat{F}(y^{k+1}, y^{k+1}) = F(y^{k+1}).$$

Da der Kegel K regulär ist, und die Folgen $\{x^k\}$ bzw. $\{y^k\}$ monoton wachsend bzw. monoton fallend und beschränkt sind, gilt

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^* \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y^k = y^*.$$

Aus der Beziehung $y^k - x^k \geqq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, folgt $y^* - x^* \geqq 0$ für $k \to \infty$, da der Kegel K abgeschlossen ist, also $x^* \leqq y^*$. Schließlich gilt

$$w = \hat{F}(x^{k+1}, x^k) \Rightarrow w = \lim_{k\to\infty} \hat{F}(x^{k+1}, x^k) = \hat{F}(x^*, x^*) = F(x^*).$$

Entsprechend zeigt man $w = F(y^*)$.

III.

Der nächste Satz enthält Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit von zu verschiedenen Zerlegungen gehörigen Iterationsverfahren.

Satz 2: *Es sei B ein durch einen regulären Kegel K halbgeordneter Banachraum und*

$$\hat{F}: B \times B \to B, \quad \hat{F} = \hat{F}(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\hat{F}}: B \times B \to B, \quad \hat{\hat{F}} = \hat{\hat{F}}(x, y)$$

seien reguläre Zerlegungen der stetigen Abbildung $F: B \to B$, $F = F(x)$. Es sei

$$G: B \times B \times B \to B, \quad G = G(x, y, z),$$

eine Abbildung mit dem folgenden Eigenschaften:

1. $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y); \quad G(x, x, y) = \hat{\hat{F}}(x, y);$
2. $y^1 \leqq y^2 \Rightarrow G(x, y^1, z) \geqq G(x, y^2, z).$

Es gelte $x^0 \leqq y^0$, $F(x^0) \leqq w \leqq F(y^0)$.

Für die Folgen $\{\hat{x}^k\}$, $\{\hat{\hat{x}}^k\}$, $\{\hat{y}^k\}$, $\{\hat{\hat{y}}^k\}$ mit

$$\hat{F}(\hat{x}^{k+1}, \hat{x}^k) = w, \quad \hat{\hat{F}}(\hat{\hat{x}}^{k+1}, \hat{\hat{x}}^k) = w, \quad \hat{x}^0 = \hat{\hat{x}}^0 = x^0,$$

$$\hat{F}(\hat{y}^{k+1}, \hat{y}^k) = w, \quad \hat{\hat{F}}(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k) = w, \quad \hat{y}^0 = \hat{\hat{y}}^0 = y^0$$

gilt dann:

$$x^0 \leqq \hat{x}^k \leqq \hat{\hat{x}}^k \leqq \hat{\hat{y}}^k \leqq \hat{y}^k \leqq y^0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}^k = \lim_{k\to\infty} \hat{\hat{x}}^k = x^* \leqq y^* = \lim_{k\to\infty} \hat{\hat{y}}^k = \lim_{k\to\infty} \hat{y}^k,$$

$$F(x^*) = F(y^*) = w.$$

Beweis: Wie beim Beweis von Satz 1 zeigt man $\hat{\hat{y}}^{k+1} \leqq \hat{\hat{y}}^k$ für alle $k \geqq 0$. Es sei nun

$$x^0 \leqq \hat{x}^k \leqq \hat{\hat{x}}^k \leqq \hat{\hat{y}}^k \leqq \hat{y}^k \leqq y^0$$

für ein $k \geqq 0$, was sicherlich für $k = 0$ richtig ist. Dann folgt

$$\hat{F}(\hat{y}^{k+1}, \hat{y}^k) = w = \hat{\hat{F}}(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k) = G(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k) \geqq G(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k, \hat{\hat{y}}^k) = \hat{F}(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k) \geqq \hat{F}(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{y}^k) .$$

Da $\hat{F}$ reguläre Zerlegung ist, folgt $\hat{\hat{y}}^{k+1} \leqq \hat{y}^{k+1}$. Die Behauptung $\hat{x}^k \leqq \hat{\hat{x}}^k$ für alle $k \geqq 0$ zeigt man ähnlich.

Nach Satz 1 gilt

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}^k = \hat{x}^* \leqq \hat{y}^* = \lim_{k\to\infty} \hat{y}^k , \quad F(\hat{x}^*) = F(\hat{y}^*) = w ;$$

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\hat{x}}^k = \hat{\hat{x}}^* \leqq \hat{\hat{y}}^* = \lim_{k\to\infty} \hat{\hat{y}}^k , \quad F(\hat{\hat{x}}^*) = F(\hat{\hat{y}}^*) = w .$$

Es sei $\bar{x}$ eine Lösung von $F(x) = w$ im Intervall $I = \{x | x_0 \leqq x \leqq y_0\}$. Dann gilt $\bar{x} \leqq \hat{\hat{y}}^k \leqq \hat{y}^k \leqq y^0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dies ist für $k = 0$ richtig und aus dem Bestehen dieser Beziehung für ein $k \geqq 0$ folgt

$$\hat{\hat{F}}(\hat{\hat{y}}^{k+1}, \hat{\hat{y}}^k) = w = F(\bar{x}) = \hat{\hat{F}}(\bar{x}, \bar{x}) \geqq \hat{\hat{F}}(\bar{x}, \hat{\hat{y}}^k) ,$$

also $\bar{x} \leqq \hat{\hat{y}}^{k+1}$ und damit auch $\bar{x} \leqq \hat{\hat{y}}^{k+1} \leqq \hat{y}^{k+1} \leqq y^0$. Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} \hat{y}^k = \hat{y}^* \geqq \lim_{k\to\infty} \hat{\hat{y}}^k = \hat{\hat{y}}^* \geqq \bar{x} .$$

Da $\bar{x} \in I$ eine beliebige Lösung war, gilt insbesondere für $\bar{x} = \hat{y}^*$ die Beziehung $\hat{y}^* \geqq \hat{\hat{y}}^* \geqq \hat{y}^*$, also $\hat{y}^* = \hat{\hat{y}}^*$.

Entsprechend zeigt man $\hat{x}^* = \hat{\hat{x}}^*$.

Beispiel III: Wir geben jeweils die aus G entstehenden Zerlegungen aus Beispiel I an.

(1)

(a) $$G(x, y, z) = \frac{1}{\omega} x - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_1(z)] ;$$

(α) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$;

(β) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind erfüllt, falls F_1 isoton und $0 < \omega \leqq 1$.

(b) (A)

$$G(x, y, z) = x - F_1(y) - F_2(z) ;$$

(α) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$;

(β) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind erfüllt, falls $F_1 + F_2$ isoton, F_1 isoton und $I - F_1$ surjektiv und invers isoton.

(B)

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\omega} x - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_1(z) + \omega F_2(z)] ;$$

(γ) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$;

(α) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind erfüllt, falls $F_1 + F_2$ isoton und $0 < \omega \leqq 1$.

(C)

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\omega} [x - \omega F_1(x)] - \frac{1}{\omega} [(1 - \omega) y + \omega F_2(z)] ;$$

(δ) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$;

(β) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind erfüllt, falls $I - \omega F_1$ invers isoton und surjektiv, F_2 isoton und $0 < \omega \leqq 1$.

(2) (A)

$$G(x, y, z) = (f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)) ;$$

(α) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$;

(β) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$;

(B)

$$G(x, y, z) = \left(f_i\left(z_1, \ldots, z_{i-1}, \frac{1}{\omega} [x_i - (1 - \omega) y_i] , z_{i+1}, \ldots, z_n\right)\right) ;$$

(γ) $G(x, y, y) = \hat{F}(x, y)$;

(α) $G(x, x, y) = \hat{F}(x, y)$;

(C)

$$G(x, y, z) = \left(f_i\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \frac{1}{\omega}[x_i - (1-\omega)\, y_i],\, z_{i+1}, \ldots, z_n\right)\right);$$

(δ) $G(x, y, y) = \widehat{F}(x, y)$;

(β) $G(x, x, y) = \widehat{F}(x, y)$.

In den Beispielen (A), (B) und (C) sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, falls F außendiagonal antiton und surjektiv diagonal isoton ist und bei (B) und (C) $0 < \omega \leqq 1$ gilt.
Damit erhält man unmittelbar

Lemma 2:

(1) *Das Gesamtschrittverfahren konvergiert (im Sinne von Satz 2) nicht besser als das Einzelschrittverfahren.*

(2) *Das Relaxationsverfahren in Gesamtschritten konvergiert (im Sinne von Satz 2) für $0 < \omega \leqq 1$ nicht besser als das Gesamtschrittverfahren.*

(3) *Das Relaxationsverfahren in Einzelschritten konvergiert (im Sinne von Satz 2) für $0 < \omega \leqq 1$ nicht besser als das Einzelschrittverfahren.*

Unter den genannten Voraussetzungen liefert also das Einzelschrittverfahren in jedem Iterationsschritt die engste Einschließungsfolge. (Siehe auch [2]).

IV.

Mit Hilfe von Satz 2 beweisen wir nun unter geeigneten Voraussetzungen an F und den BANACHraum B die globale Konvergenz eines aus einer regulären Zerlegung entstehenden Iterationsverfahrens.

Satz 3: *Es sei B ein durch einen regulären Kegel K halbgeordneter Banachraum. B sei ein Rieszscher Raum (d. h. zu je zwei Elementen existierten das Supremum und das Infimum). $\widehat{F}(x, y)$ sei eine reguläre Zerlegung der stetigen Abbildung F. Ist F invers isoton und surjektiv, so konvergiert das Iterationsverfahren $\widehat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ für jedes $x^0 \in B$ gegen die (eindeutige) Lösung x^* von $F(x) = w$.*

Beweis: Da F invers isoton ist, ist F injektiv, d. h. $F(x) = w$ besitzt genau eine Lösung $x^* = F^{-1}(w)$.
Nach Voraussetzung existieren die Elemente

$$a = \inf\,(F(x^0), w) \quad \text{und} \quad b = \sup\,(F(x^0), w)$$

für beliebige Elemente $x^0, w \in B$. Wir setzen

$$u^0 = F^{-1}(a) \quad \text{und} \quad v^0 = F^{-1}(b)\,.$$

Dann gilt

$$F(u^0) \leqq F(x^0) \leqq F(v^0)\,.$$

Daraus folgt wegen der inversen Isotonie von F die Beziehung $u^0 \leqq x^0 \leqq v^0$. Außerdem gilt $F(u^0) \leqq w \leqq F(v^0)$. Nach Satz 1 gilt dann für die nach $\widehat{F}(u^{k+1}, u^k) = w$, $\widehat{F}(v^{k+1}, v^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ berechneten Folgen $\{u^k\}$ und $\{v^k\}$:

$$\left.\begin{array}{l} u^0 \leqq u^k \leqq u^{k+1} \leqq v^{k+1} \leqq v^k \leqq v^0 \\ F(u^k) \leqq w \leqq F(v^k) \end{array}\right\} \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{k\to\infty} u^k = \lim_{k\to\infty} v^k = x^* = F^{-1}(w)\,.$$

Wir zeigen nun, daß die Beziehung

$$u^k \leqq x^k \leqq v^k$$

für alle k besteht. Dies ist für $k = 0$ richtig und aus dem Bestehen dieser Beziehung für ein $k \geqq 0$ folgt

$$\widehat{F}(u^{k+1}, u^k) = w = \widehat{F}(x^{k+1}, x^k) \leqq \widehat{F}(x^{k+1}, u^k)\,,$$

also $u^{k+1} \leqq x^{k+1}$. Entsprechend zeigt man $x^{k+1} \leqq v^{k+1}$.
Aus der Beziehung $u^k \leqq x^k \leqq v^k$ folgt

$$0 \leqq u^k - x^k \leqq v^k - u^k\,.$$

Nach Voraussetzung ist der Kegel K regulär und damit normal (siehe [1], Seite 20), d. h. für $0 \leqq x \leqq y$ folgt $\|x\| \leqq \beta \|y\|$ (siehe [1], Seite 24). Mit Hilfe dieser Beziehung und durch zweimalige Anwendung der Dreiecksungleichung erhält man

$$\|x^k - x^*\| \leqq (1 + \beta)\, \|u^k - x^*\| + \beta\, \|v^k - x^*\|\,,$$

also $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$.

V.

Eine wichtige Klasse von Abbildungen F im R^n, bei denen sich Satz 3 anwenden läßt, sind die von RHEINBOLDT in [2] eingeführten M-Funktionen. Eine Abbildung $F: R^n \to R^n$ heißt M-Funktion, wenn F invers isoton und außendiagonal antiton ist.

RHEINBOLDT hat in [2] gezeigt, daß eine surjektive M-Funktion surjetiv diagonal isoton ist. Damit sind nach Lemma 1 die Zerlegungen (2), (α)–(δ) für $0 < \omega \leqq 1$ regulär und nach Satz 3 sind das Gesamtschrittverfahren, Einzelschrittverfahren und das Relaxationsverfahren in Gesamt- und Einzelschritten global konvergent (Siehe auch [2]).

Wir betrachten nun speziell für M-Funktionen einige weitere Zerlegungen.

Beispiel IV:

$$B = R^n, \quad x = (x_i), \quad F(x) = \big(f_i(x_1, \ldots, x_n)\big) = \big(f_i(x)\big).$$

Wir fassen den Vektor $x = (x_i)$ auf als Vektor von Teilvektoren

X_i der Dimension d_i: $x = (X_i) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$ mit $\sum_{i=1}^{m} d_i = n$. Dann definieren wir Abbildungen

$$F_i: R^n \to R^{d_i}, \quad F_i = F_i(X_1, \ldots, X_m),$$

wobei F_i durch Zusammenfassen von d_i Komponenten der Abbildung F entsteht. Es gilt dann $F(x) = \big(F_i(X_1, \ldots, X_m)\big)$. Dann betrachten wir die beiden Zerlegungen

(α') $\quad \hat{F}(x, y) = \big(F_i(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, X_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_m)\big);$

(β') $\quad \hat{F}(x, y) = \big(F_i(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_m)\big);$

Die dazugehörigen Iterationverfahren

$$F_i(X_1^k, \ldots, X_{i-1}^k, X_i^{k+1}, X_{i+1}^k, \ldots, X_m^k) = W_i, \quad i = 1(1)\,m \quad \text{bzw.}$$
$$F_i(X_1^{k+1}, \ldots, X_i^{k+1}, X_{i+1}^k, \ldots, X_m^k) = W_i, \quad i = 1(1)\,m, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

bezeichnet man bekanntlich als Block-Gesamtschritt- bzw. Block-Einzelschrittverfahren. Es gilt

Lemma 3: *Ist $F: R^n \to R^n$ surjektive M-Funktion, so sind für jedes m mit $1 \leq m \leq n$ und $\sum_{i=1}^{m} d_i = n$ die Zerlegungen (α') und (β') regulär.*

Beweis: Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus der folgenden Aussage (siehe [2]): Ist $F: R^n \to R^n$ surjektive M-Funktion, $(m_1, \ldots, m_n)$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$, $1 \leq p \leq n$ und $c_{p+1}, \ldots, c_n$ gegebene reelle Konstanten, so ist die Abbildung

$$H: R^p \to R^p \quad \text{mit} \quad h_i(x_1, \ldots, x_p) = f_i\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e^{m_j} + \sum_{j=p+1}^{n} c_j e^{m_j}\right), \qquad i = 1(1)\,p,$$

eine surjektive M-Funktion. Für die Zerlegung (α') folgt damit bei festem y aus $\hat{F}(x^1, y) \leq \hat{F}(x^2, y)$, d. h. aus

$$F_i(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, X_i^1, Y_{i+1}, \ldots, Y_m) \leq F_i(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, X_i^2, Y_{i+1}, \ldots, Y_m), \qquad i = 1(1)\,m,$$

die Beziehung $X_i^1 \leq X_i^2$, $i = 1(1)\,m$, also $x \leq y$. Außerdem ist $\hat{F}(x, y) - w$ eindeutig nach x auflösbar. Die zweite Forderung an eine reguläre Zerlegung ist klar.

Für die Zerlegung (β') ergibt sich die Behauptung ähnlich.

Mit Hilfe von Satz 3 erhält man daher die folgende Aussage.

Lemma 4: *Ist $F: R^n \to R^n$ surjektive M-Funktion, so sind für beliebige Blockeinteilung (d. h. für jedes m, $1 \leq m \leq n$, $\sum_{i=1}^{m} d_i = n$) Block-Gesamtschritt- und Block-Einzelschrittverfahren global konvergent.*

Zusatz bei der Korrektur. Es gilt auch die Umkehrung von Satz 3: *Ist F injektiv und konvergiert das Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, für jedes x^0 und w aus B, so ist F surjektiv und invers isoton.*

Beweis: a) Für jedes w konvergiert das Iterationsverfahren für beliebiges x^0. Somit gilt $w = \lim_{k\to\infty} \hat{F}^{k+1}(x, x^k) = \hat{F}(x^*, x^*) = F(x^*)$, d. h. F ist surjektiv.

b) Es gelte $F\,x \leq F\,y$, $x, y \in B$. Wir betrachten das Iterationsverfahren $\hat{F}(x^{k+1}, x^k) = w$ mit $w: = F\,y$, $x^0: = x$ und zeigen $x^k \leq x^{k+1}$, $F\,x^k \leq w$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Nach Voraussetzung gilt $F\,x^0 = F\,x \leq F\,y = w$. Damit folgt $\hat{F}(x^1, x^0) = w \geq F\,x^0 = \hat{F}(x^0, x^0)$, also $x^1 \geq x^0$. Sei nun $x^k \leq x^{k+1}$, $F\,x^k \leq w$ für ein $k \geq 0$. Dann folgt $w = \hat{F}(x^{k+1}, x^k) \geq \hat{F}(x^{k+1}, x^{k+1}) = F\,x^{k+1}$ und damit $\hat{F}(x^{k+2}, x^{k+1}) = w \geq F\,x^{k+1} = \hat{F}(x^{k+1}, x^{k+1})$, also $x^{k+2} \geq x^{k+1}$. Die Folge (x^k) ist nach Voraussetzung konvergent, d. h. es gilt $\lim_{k\to\infty} \hat{F}(x^{k+1}, x^k) = F(x^*) = w = F\,y$. Aus der Injektivität von F folgt $x^* = y$. Da die Folge (x^k) monoton wachsend ist, gilt $x^n \leq x^*$ für alle n. Für $m \geq n$ gilt nämlich $x^m - x^n \geq 0$ und somit für $m \to \infty$, wegen der Abgeschlossenheit des Kegels, $x^* \geq x^n$. Insbesondere gilt also $x = x^0 \leq x^* = y$, d. h. F ist invers isoton.

Literatur

1 KRASNOSELSKII, M., Positive Solutions of Operator Equations, P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands (1964).
2 RHEINBOLDT, W., On M-Functions and their application to nonlinear Gauss-Seidel iterations and to network flows, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH, Tech. Rept. 22. Birlinghoven, Germany (1969).
3 VARGA, R., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1962).

Eingereicht am 20. 7. 71

Anschrift: Priv.-Doz. Dr. GÖTZ ALEFELD, Institut für Angewandte Mathematik der Universität, 75 Karlsruhe, Kaiserstr. 12 (BRD)