

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT



Band 24, 1971, Heft 8

FERD.  ÜMMLERS VERLAG · BONN / HIRSCHGRABEN-VERLAG · FRANKFURT/M.

Über neuere Gesichtspunkte beim numerischen Rechnen

Von G. ALEFELD, J. HERZBERGER, O. MAYER, Karlsruhe

Mit 2 Abbildungen

Einleitung

Wohl alle für die Mathematikausbildung in den höheren Schulen verantwortlichen Stellen sind sich heute darüber einig, daß neben einer Vermittlung der theoretischen Grundlagen der Mathematik das Interesse der jungen Menschen für konkrete Problemstellungen schon sehr frühzeitig geweckt werden muß. Ausgehend von dieser Forderung findet man in den neueren Lehrplänen für die Gymnasien erfreulicherweise schon in den unteren Klassen Aufgaben, welche der Numerischen Mathematik zuzurechnen sind (Elementare Fehlerbetrachtungen, Ungleichungen, systematische Gleichungsauflösung, Rechenschieber). Es ist unbedingt zu begrüßen, daß darüber hinaus der Mathematikunterricht heute den Gymnasiasten auch mit Aufbau und Wirkungsweise von elektronischen Rechenanlagen vertraut machen soll (Binäres Zahlensystem, Boolesche Algebra). Erfreulich ist in diesem Zusammenhang, daß – wie etwa in Baden-Württemberg – die Verwendung von Strukturdiagrammen, durch welche in einfacher und anschaulicher Weise der Rechenablauf dargestellt werden kann, in den höheren Schulen schon sehr früh gefordert wird. Obwohl in der Lehrerbildung in der Vergangenheit das Hauptgewicht in der Vermittlung der sogenannten Reinen Mathematik (Analysis, Algebra, Geometrie) lag, ist mit dem Wandel der Lehrpläne in den höheren Schulen auch hier die Erkenntnis gereift, daß der Mathematiklehrer mit den Grundlagen der Numerischen Mathematik vertraut sein muß. Die vorliegende Arbeit soll deshalb den Lehrern an den Gymnasien Einblick geben in eine neuere und in vieler Hinsicht interessante Entwicklung in der Numerischen Mathematik.

Sie gibt einen Überblick über die Grundlagen der sogenannten Intervallrechnung und zeigt einige be-

achtliche Anwendungsmöglichkeiten. Der Begriff des Intervalls ist schon an der Schule wohlbekannt, man denke nur an die Intervallschachtelungen bei der Berechnung des Kreisumfanges oder irrationaler Zahlen wie $\sqrt{2}$. Dabei werden jeweils Folgen von Intervallen bestimmt, die das gesuchte Ergebnis enthalten und mit beiden Schranken gegen dieses konvergieren.

In der Intervallrechnung wird diese Aufgabenstellung verallgemeinert und ausgedehnt auf beliebige mathematische Probleme. Dazu wird zur Verallgemeinerung des Rechnens mit reellen Zahlen ein Rechnen mit Intervallen eingeführt. Die Entwicklung ist noch im Fluß, doch liegen auch jetzt schon viele bemerkenswerte und in mancher Hinsicht weiterreichende Verfahren und Resultate vor, als beim Rechnen im Körper der reellen Zahlen. Obwohl dieser Stoff naturgemäß ein gewisses Abstraktionsvermögen verlangt, sei doch hervorgehoben, daß die meisten Schlußweisen anschaulich gedeutet werden können.

Hier wird zunächst eine allgemeine Einführung in die Intervallrechnung gegeben, dann werden Anwendungsmöglichkeiten bei der Nullstellenbestimmung von Polynomen behandelt. Es wird ein sogenanntes Halbierungsverfahren angegeben, das Einschließungsintervalle für die Nullstellen liefert; anschließend wird eine intervallarimetische Modifikation des Newton-Verfahrens angegeben, das auch in Fällen noch zum Ziele führt, in denen das herkömmliche Verfahren versagt.

1. Das Rechnen mit Intervallen – die Menge $I(\mathbb{R})$ und ihre algebraische Struktur

Im reellen Zahlenkörper \mathbb{R} sind für je zwei reelle Zahlen a und b die vier Verknüpfungen $+$, $-$, \cdot , $:$ in bekannter Weise erklärt, wobei im Falle der Division

$b \neq 0$ vorausgesetzt wird. Wir wollen nun die Definition dieser Verknüpfungen vom reellen Zahlkörper \mathbb{R} auf die Menge $I(\mathbb{R})$ aller abgeschlossenen und beschränkten Intervalle

$$A = [a_1, a_2] = \{a \in \mathbb{R} \mid a_1 \leq a \leq a_2\}$$

in natürlicher Weise erweitern. Dazu bezeichnen wir zwei Intervalle $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ als gleich, wenn ihre entsprechenden Schranken übereinstimmen, also wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ gilt. Als Ergebnis der Verknüpfung $A * B$ (* stehe für eines der Zeichen $+$, $-$, \cdot , $:$) zweier Elemente $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ bezeichnen wir das Intervall, welches aus allen möglichen Verknüpfungsergebnissen $a * b$ gebildet wird, wenn a das Intervall A und b das Intervall B durchlaufen. Wir setzen also:

$$A * B := \{a * b \mid a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2\}$$

(wobei $0 \notin B$ im Falle $*$ = $:$ vorausgesetzt wird). So prüft man leicht nach, daß z. B. gilt:

$$[1, 2] + [-3, -1] = [-2, 1]$$

$$[1, 2] - [-3, -1] = [2, 5]$$

$$[-3, 1] \cdot [3, 4] = [-12, 4]$$

$$[-3, 6] : [3, 4] = [-1, 2]$$

Wichtig ist die Feststellung, daß das Ergebnis der Verknüpfung zweier Intervalle $[a_1, a_2]$ und $[b_1, b_2]$ stets wiederum ein Intervall ist und sich auf Grund der Beziehung

$$[a_1, a_2] * [b_1, b_2] = [\min_{i,j} (a_i * b_j), \max_{i,j} (a_i * b_j)]$$

stets durch die Schranken der beiden Ausgangsintervalle ausdrücken läßt. Man erhält dabei die folgenden Regeln:

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j} (a_i \cdot b_j), \max_{i,j} (a_i \cdot b_j)],$$

$$[a_1, a_2] : [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right].$$

Die Menge $I(\mathbb{R})$ ist also abgeschlossen bezüglich der so erklärten Intervallverknüpfungen. Die Teilmenge aller Intervalle der Gestalt $[a, a]$ ist dabei isomorph zum Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen, d. h. die Intervallverknüpfungen gehen in die gewöhnlicher Verknüpfungen reeller Zahlen über, wenn man das Intervall $[a, a]$ mit der reellen Zahl a identifiziert. Im Sinne dieser Identifizierung von $[a, a]$ mit a soll auch $a * B$ dasselbe bedeuten wie $[a, a] * B$. Es sei darauf hingewiesen, daß in gleicher Weise wie für Intervalle auch ein Rechnen mit beliebigen Mengen reeller Zahlen definiert werden kann. Diese

Verknüpfungen ergeben dann im Falle von Intervallen die oben definierten Operationen in $I(\mathbb{R})$. Derartige Betrachtungsweisen werden in [5] ausführlich durchgeführt und seien dem Leser zur Lektüre empfohlen.

Zusammen mit den Verknüpfungen für reelle, abgeschlossene Intervalle bildet die Menge $I(\mathbb{R})$ eine algebraische Struktur, welche jedoch wesentlich kompliziertere Eigenschaften besitzt, als der reelle Zahlkörper \mathbb{R} . Zwar sind Addition und Multiplikation wie im reellen Zahlkörper kommutativ und assoziativ, d. h. es gilt:

$$A + B = B + A, A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$A \cdot B = B \cdot A, A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Ferner haben Addition und Multiplikation je ein neutrales Element, nämlich $0 = [0, 0]$ bzw. $1 = [1, 1]$.

Anders als im reellen Zahlkörper sind aber Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division nicht mehr zueinander inverse Operationen. Dies folgt z. B. aus der leicht beweisbaren Aussage:

Ein beliebiges Element $A = [a_1, a_2] \in I(\mathbb{R})$ mit $a_1 \neq a_2$ besitzt keine Inversen bezüglich Addition und Multiplikation.

Beweis: Seien $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2] \in I(\mathbb{R})$ dann folgt aus $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [0, 0] = 0$ sofort $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 0$. Wegen $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$ ist dies jedoch nicht möglich. Eine ähnlich einfache Überlegung gilt im Falle der Multiplikation.

Anders als im reellen Zahlkörper ist auch die Distributivität $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ nur für gewisse $A, B, C \in I(\mathbb{R})$ erfüllt¹⁾; so ist zum Beispiel

$$[1, 2] \cdot ([3, 4] + [-1, 2]) = [2, 12] \neq [1, 12] \\ = [1, 2] \cdot [3, 4] + [1, 2] \cdot [-1, 2].$$

Doch gilt das subdistributive Gesetz

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C.$$

Somit kann man folgende Aussage treffen:

Die Menge $I(\mathbb{R})$ mit den Verknüpfungen $+$, $-$, \cdot und $:$ bildet keinen Körper. Sie enthält als Teilstruktur den reellen Zahlkörper \mathbb{R} . Wie wir sahen, sind die vier Intervallverknüpfungen $+$, $-$, \cdot , $:$ weitgehend voneinander unabhängig; wir werden später sehen, daß sie neben dem subdistributiven Gesetz noch weitere Eigenschaften besitzen, welche es gestatten, wichtige Anwendungen anzugeben. Ausdrücke, die aus Intervallen $A_1, A_2, A_3, \dots, X, Y, \dots \in I(\mathbb{R})$ mittels der vier Grundrechenoperationen aufgebaut sind, wobei die Reihenfolge der Rechenoperationen (etwa durch geeignete Klammerstrukturen) eindeutig festgelegt ist, nennen wir rationale Intervallausdrücke. Sie sind Verallgemeinerungen der rationalen Ausdrücke über den reellen Zahlen. Der Wert eines rationalen Intervallausdrucks

¹⁾ In der Arbeit [9] werden alle jene Fälle charakterisiert, in denen die Distributivität noch gilt.

ist ein Intervall. Zu beachten ist aber, daß der Wert eines rationalen Intervallausdrucks gegenüber den im Körper der reellen Zahlen gewohnten Umformungen (die den Wert rationaler Ausdrücke über \mathbb{R} invariant lassen) i. a. nicht invariant ist. Ein einfaches Beispiel dafür wurde schon beim subdistributiven Gesetz angegeben. Auf die weiteren wichtigen Eigenschaften von rationalen Intervallausdrücken und deren Zusammenhang mit den gewöhnlichen rationalen Ausdrücken soll etwas später noch eingehend eingegangen werden.

Eine wichtige auch beim praktischen Rechnen mit Intervallen häufig benutzte Operation ist die Durchschnittsbildung, die wie bei Mengen üblich definiert wird; also

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ und } c \in B\}.$$

Der Durchschnitt $A \cap B$ ist nicht leer, wenn

$$a_2 \geq b_1 \text{ und } b_2 \geq a_1.$$

In diesem Falle wird

$$A \cap B = [\max(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)].$$

2. Metrische Strukturen in der Menge $I(\mathbb{R})$

In diesem Abschnitt werden metrische Eigenschaften der Menge $I(\mathbb{R})$ untersucht.

Für eine saubere Fassung des Konvergenzbegriffes führt man am besten für je zwei Elemente aus $I(\mathbb{R})$ einen Abstand, d. h. also eine Metrik in $I(\mathbb{R})$ ein.

Um die Größe und Lage von Intervallen abschätzen zu können, benötigt man darüberhinaus auch eine Art Absolutbetrag, sowie ein Maß für die Länge eines Intervalls.

Es gibt nun viele Möglichkeiten, in $I(\mathbb{R})$ eine Metrik einzuführen. Wir definieren hier einen Abstand $q(A, B)$ für Intervalle $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ durch

$$q(A, B) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

$q(A, B)$ ist der größte Abstand entsprechender Schranken und geht für »Intervalle« $a = [a, a]$, $b = [b, b]$ in den gewöhnlichen Abstand $|a - b|$ der reellen Zahlen a und b über.

Daß dieser Abstand auch tatsächlich eine Metrik in $I(\mathbb{R})$ definiert, ergibt sich unmittelbar aus den beiden Eigenschaften

$$q(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \quad (1)$$

$$q(A, B) \leq q(A, C) + q(B, C). \quad (2)$$

Er besitzt darüberhinaus noch die bemerkenswerten Eigenschaften

$$q(c \cdot A, c \cdot B) = |c| \cdot q(A, B) \quad (3)$$

$$q(A + C, B + C) = q(A, B). \quad (4)$$

Auch die folgende Aussage läßt sich leicht beweisen: $I(\mathbb{R})$ ist bezüglich der Metrik q ein vollständiger metri-

scher Raum, d. h. jede Cauchy-Folge in $I(\mathbb{R})$ konvergiert gegen ein Element aus $I(\mathbb{R})$. Diese Aussage ist unmittelbar einsichtig, da eine Folge von Intervallen $\{[x_1^i, x_2^i]\}_{i=1}^{\infty}$ genau dann gegen das Intervall $[x_1, x_2]$ konvergiert, wenn für die Folgen der Schranken $\lim_{i \rightarrow \infty} x_1^i = x_1$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} x_2^i = x_2$ gilt.

Die Metrik q ergibt nun auch in üblicher Weise einen Stetigkeitsbegriff. Damit erhält man sodann die Aussage, daß die vier Intervallverknüpfungen stetige Verknüpfungen von Intervallen sind. Damit gilt die wichtige Feststellung:

Die rationalen Intervallausdrücke sind in allen ihren Argumenten stetige Ausdrücke. (Dabei wird stets vorausgesetzt, daß in Nennern auftretende Intervalle die 0 nicht enthalten.) Den Abstand eines Intervalls A von der Null $0 = [0, 0]$ bezeichnen wir als Betrag $|A|$ des Intervalls, also $|A| := q(A, 0)$. Auch hierbei handelt es sich um eine natürliche Ausdehnung des von den reellen Zahlen her bekannten Betragsbegriffes. Es gilt $|[a_1, a_2]| = \max(|a_1|, |a_2|)$. Für den Betrag in $I(\mathbb{R})$ gelten wie bei den reellen Zahlen die drei fundamentalen Eigenschaften

$$A \neq [0, 0] \Rightarrow |A| > 0;$$

$$|A + B| \leq |A| + |B|;$$

$$|c \cdot A| = |c| \cdot |A|.$$

Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften (1), (2) und (3) der Metrik q .

Neben dem Betrag von Intervallen führt man noch eine andere charakteristische Größe ein, nämlich die Länge oder den Durchmesser eines Intervalles. Wir bezeichnen den Durchmesser mit $d([a_1, a_2]) = a_2 - a_1$.

Für den Durchmesser ergeben sich im Zusammenhang mit den Intervallverknüpfungen wichtige Rechenregeln. Es seien einige davon kurz angeführt:

$$d(A \pm B) = d(A) + d(B);$$

$$|A| \cdot d(B) \leq d(A \cdot B)$$

$$\leq |A| \cdot d(B) + |B| \cdot d(A);$$

$$d(X^r) \leq r \cdot |X|^{r-1} \cdot d(X);$$

$$|A \cdot C - B \cdot C| \leq |C| \cdot |A - B|$$

$$+ d(C) \cdot \min\{|A|, |B|\}.$$

Soweit ist nun ein kurzer Überblick über die Intervallverknüpfungen und ihre wichtigsten Eigenschaften gegeben. Eine ausführlichere und vollständige Zusammenstellung dieser Materie findet der interessierte Leser z. B. in [5] oder in einem allgemeineren Rahmen in [7]. Intervalle über komplexen Zahlen oder allgemeineren Mengen wurden in [1] bzw. [6] untersucht. Darüberhinaus enthalten diese Arbeiten auch Untersuchungen über eine Reihe wichtiger praktischer Anwendungen sowie zahlreiche Beispiele. Wir wollen nun im folgenden Abschnitt erste Anwendungen der Intervallverknüpfungen schildern.

3. Intervallfunktionen und ihre Eigenschaften. Eine einfache Anwendung

Für viele Anwendungen in der Mathematik ist es erforderlich, für den Wert $f(x)$ einer reellen Funktion f eine Abschätzung der Form $u_1 \leq f(x) \leq u_2$, mit oberen und unteren Schranken u_2, u_1 zu kennen. Man kann die Größen u_1, u_2 auch zweckmäßigerweise zu einem Intervall $U = [u_1, u_2]$ zusammenfassen. Das Problem der Einschließung tritt jedoch meist in der folgenden allgemeineren Gestalt auf: Für eine Menge von Funktionswerten, etwa den Wertebereich $\{f(x) : x_1 \leq x \leq x_2\}$ einer stetigen Funktion f auf dem Intervall $X = [x_1, x_2]$ soll eine geeignete Intervallabschätzung $U = [u_1, u_2]$ mit $U \supset \{f(x) \mid x \in X\}$ angegeben werden. Sei \bar{U} eine Methode zur Gewinnung einer solchen Abschätzung, so bezeichne $\bar{U}(f, X)$ das damit gewonnene Abschätzungsintervall für $\{f(x) \mid x \in X\}$. Darüberhinaus ist die Abschätzung nicht ganz willkürlich wählbar, sondern sie muß für die Anwendungen einigen grundlegenden Forderungen genügen. Diese sind:

- 1) Die Einschließungseigenschaft, d. h. für alle $X \in I(\mathbb{R})$ soll $\{f(x) \mid x \in X\} \subset \bar{U}(f, X)$ gelten. Diese Forderung besagt, daß es sich um eine einschließende Abschätzung für den Wertebereich von f handelt.
- 2) Die Inklusionsmonotonie, d. h. aus $X \subset Y$ soll stets $\bar{U}(f, X) \subset \bar{U}(f, Y)$ folgen. Dies stellt eine gewisse Forderung an die »gleichmäßige Güte« der Abschätzung dar.
- 3) Die Stetigkeitseigenschaft, d. h. aus der Konvergenz einer Folge $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$ gegen eine reelle Zahl $x = [x, x]$ soll die Konvergenz der Folge der Abschätzungen $\bar{U}(f, X_1) \supset \bar{U}(f, X_2) \supset \dots$ gegen den Funktionswert $f(x)$ folgen.

Diese Forderung besagt, daß die Abschätzung $\bar{U}(f, X)$ bei hinreichend kleinem Durchmesser $d(X)$ den Wertebereich $\{f(x) \mid x \in X\}$ beliebig genau approximiert.

Die Notwendigkeit derartiger Forderungen an die Einschließungsintervalle für die Wertebereiche von f wird bei ihrer späteren Anwendung deutlich. Tatsächlich kommt man in den meisten Fällen mit diesen drei Eigenschaften aus, auch wenn die praktisch verwendeten Einschließungsmengen oft viel weitergehende Eigenschaften haben. Es erhebt sich nun die Frage nach einer möglichst einfachen Konstruktionsmöglichkeit für derartige intervallwertige Ausdrücke $\bar{U}(f, X)$ zu einer vorgegebenen Funktion f . Wir wollen uns im weiteren dabei hier auf den Fall von rationalen Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_m \cdot x^m}$$

beschränken. Dann läßt sich die folgende Aussage treffen: Der rationale Intervallausdruck

$$R(X) = \frac{[a_0, a_0] + [a_1, a_1] \cdot X + \dots + [a_n, a_n] \cdot X^n}{[b_0, b_0] + [b_1, b_1] \cdot X + \dots + [b_m, b_m] \cdot X^m}$$

aufgefaßt als Abschätzung $U(r, X)$ für die rationale Funktion $r(x)$, erfüllt alle drei oben gestellten Forderungen für eine Abschätzungsfunktion $U(r, X)$, sofern das Intervall im Nenner die Null nicht enthält.

Wir betrachten hierzu ein einfaches Beispiel. Sei $r(x) = 1 - x^2$, also $R(X) = [1, 1] - X \cdot X$, dann ergibt sich für $X = [-1, 1]$ die Abschätzung $R([-1, 1]) = [0, 2] \supset [0, 1] = \{1 - x^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$. Die nachstehende Abb. 1 soll diesen Sachverhalt veranschaulichen.

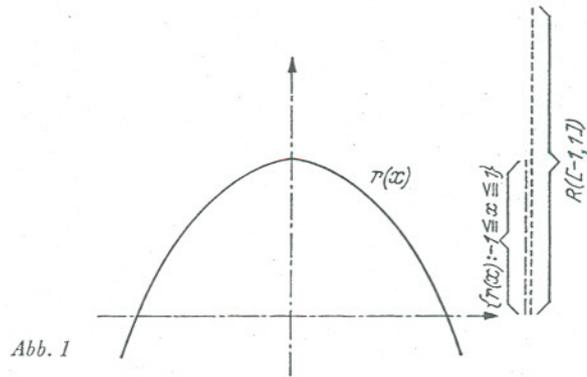


Abb. 1

Wir wenden uns nun einer ersten wichtigen Anwendungsmöglichkeit dieser rationalen Intervallausdrücke zu. Dabei betrachten wir die Aufgabe für ein vorgelegtes Polynom $p(x) = a_0 + \dots + a_n \cdot x^n$ sämtliche reellen Nullstellen x_v , welche dieses in einem vorgegebenen Intervall $X = [x_1, x_2]$ besitzt, einzeln beliebig genau in Intervalle $[x_{v1}, x_{v2}]$ einzuschließen. Übrigens läßt sich auf Grund bekannter Abschätzungsformeln mit Hilfe der Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n stets ein Intervall X angeben, das alle Nullstellen von $p(x)$ enthält. Wir nehmen an, daß sonst keine Informationen über die Art und Vielfachheit etwaig vorhandener Nullstellen vorliegen. Das erwähnte Verfahren läßt sich kurz folgendermaßen beschreiben:

Man berechnet das Einschließungsintervall $P(X)$ des zu $p(x)$ gehörigen Intervallausdruckes P . Gilt $0 \notin P(X)$, dann hat offenbar wegen der Eigenschaft 1) $p(x)$ keine Nullstelle in X . Im anderen Falle zerlegen wir $X = [x_1, x_2]$ in seine beiden Hälften $X = X_1^{(1)} \cup X_2^{(1)} = [x_1, (x_1 + x_2)/2] \cup [(x_1 + x_2)/2, x_2]$ und berechnen $P(X_1^{(1)})$ sowie $P(X_2^{(1)})$ und prüfen wieder, ob $0 \in P(X_1^{(1)})$ bzw. $0 \in P(X_2^{(1)})$. Für diejenigen $X_i^{(1)}$, für welche $0 \in P(X_i^{(1)})$ ist, wird das Vorgehen fortgesetzt. Von allen anderen ist sicher, daß sie keine Nullstelle von $p(x)$ enthalten. Die Eigenschaft 2) des Intervallausdruckes P stellt sicher, daß wir bei diesem Vorgehen die eventuell vorhandenen Nullstellen in immer kleinere Intervalle einfangen. Wegen der Eigenschaft 3) werden dann im Limes genau alle reellen Nullstellen von $p(x)$ in X berechnet.

Wir zeigen dieses Verfahren an dem vorhin gewählten Beispiel. Sei $p(x) = 1 - x^2$ und $X = [-1, +1]$, dann gilt $0 \in P([-1, 1]) = [0, 2]$. Im zweiten Schritt

erhalten wir $0 \in P([-1, 0]) = [0, 1]$ und $0 \in P([0, 1]) = [0, 1]$. Im dritten Schritt können schon zwei der vier auftretenden Teilintervalle ausgesondert werden und wir erhalten $[-1, -1/2]$ und $[1/2, 1]$ als Einschließungen. Allgemein liefert dieses Verfahren im n -ten Schritt $[-1, (-1) + (1/2)^{n-2}]$ und $[1 - (1/2)^{n-2}, 1]$ als Einschließungsintervalle für die Nullstellen von $p(x)$ in $[-1, 1]$. Dieses triviale Beispiel sollte nur die grundsätzliche Wirkungsweise unseres Verfahren schildern. Eine genauere Untersuchung dieser als Halbierungsverfahren bekannten Methode findet sich etwa in [6] oder [10]. Wegen der im Verhältnis zum Aufwand langsamen Konvergenz wählt man in der Praxis jedoch nach Möglichkeit schneller konvergente Verfahren. Im nächsten Abschnitt soll eine Möglichkeit dafür näher beschrieben werden.

Im folgenden soll noch ein sogenanntes Strukturdiagramm für das beschriebene Halbierungsverfahren angegeben werden.

Strukturdiagramme eignen sich besonders gut zur übersichtlichen und anschaulichen Darstellung des logischen Ablaufs von Rechenvorschriften; auf Grund dieser ihrer Bedeutung wird die Behandlung von Strukturdiagrammen auch in den Lehrplänen der höheren Schulen einiger Bundesländer wie etwa in Baden-Württemberg gefordert. Strukturdiagramme bilden übrigens auch ein wesentliches Hilfsmittel bei der Programmierung elektronischer Rechenanlagen.

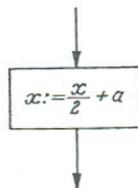
Jede Rechenvorschrift läßt sich bekanntlich darstellen durch eine Liste von Befehlen und Marken. Die einzelnen Befehle sind zunächst in der Reihenfolge der Niederschrift abzuarbeiten. Ein Befehl besteht nun entweder aus einer Anweisung, die durchzuführen ist, oder aus einer Abfrage zusammen mit zwei Anweisungen, von denen eine in Abhängigkeit von der Abfrage ausgewählt und durchgeführt wird. Eine Anweisung etwa der Form

$$x := \frac{x}{2} + a$$

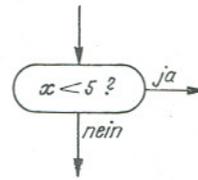
bedeutet, daß zunächst die Summe $\frac{x}{2} + a$ berechnet und dann als neuer Wert der linksstehenden Größe x zugewiesen werden soll.

Bei einer Abfrage, etwa $x < 5$? soll geprüft werden, ob der Wert der Größe x kleiner als 5 ist oder nicht.

In Strukturdiagrammen kennzeichnet man allgemein Anweisungen durch beschriftete Rechtecke, z. B.:

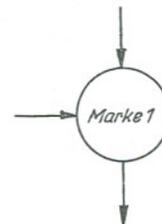


Abfragen durch beschriftete Ovale, z. B.:

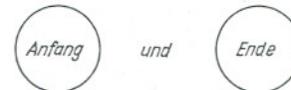


(Jede Abfrage hat zwei Ausgänge, die Weiterführung des Rechenprozesses hängt vom Ergebnis der Abfrage ab.)

Marken durch beschriftete Kreise, z. B.:



Anfang und Ende des Programms werden im Strukturdiagramm häufig durch die Marken



gekennzeichnet.

Im folgenden wird die Rechenvorschrift für das oben angegebene Halbierungsverfahren zur Bestimmung aller Nullstellen eines vorgegebenen Polynoms $p(x)$ in einem vorgegebenen Intervall $X = [x_1, x_2]$ sowohl in Form eines Programms durch eine Liste von Befehlen und Marken und dann durch ein Strukturdiagramm (Strukturdiagramm 1) dargestellt.

Als gegeben sind das Polynom (durch seine Koeffizienten), das Intervall $X = [x_1, x_2]$ durch seine Schranken x_1 und x_2 und eine reelle Zahl ε anzusehen; diese Zahl ε gibt den maximalen Durchmesser der gesuchten Einschließungsintervalle an und bestimmt so die erwünschte Genauigkeit. i, j, x_u und x_0 sind Hilfsgrößen. Die Rechenvorschrift lautet dann:

ANFANG: $x_u := x_1$;
 $x_0 := x_2$;
 $i := 0$;
 $j := 0$;

MARKE 1: Wenn $0 \in P([x_u, x_0])$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 {Wenn $x_0 - x_u \geq \varepsilon$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 $(i := i + 1$;
 $x_0 := \frac{x_u + x_0}{2}$;

Fahre fort bei MARKE 1;)
 Wenn $x_0 - x_u < \varepsilon$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 $(j := j + 1;$
 Schreibe: » $P(x)$ hat evtl. eine oder mehrere Nullstellen in« und gib das Intervall $[x_u, x_0]$ an;
 Fahre fort bei MARKE 2;)}
 MARKE 2: Wenn $0 \notin P([x_u, x_0])$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 {Wenn $x_0 \neq x_2$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 $(x_u := x_0;$
 $x_0 := x_u + \frac{x_2 - x_1}{2^i};$
 $i := i - 1;$
 Fahre fort bei MARKE 1;)
 Wenn $x_0 = x_2$,
 sind folgende Befehle auszuführen:
 (Wenn $j \neq 0$, fahre fort bei ENDE.
 Wenn $j = 0$, schreibe:
 » $P(x)$ hat keine reellen Nullstellen im Intervall $[x_1, x_2]$ «.
 Fahre fort bei ENDE);}

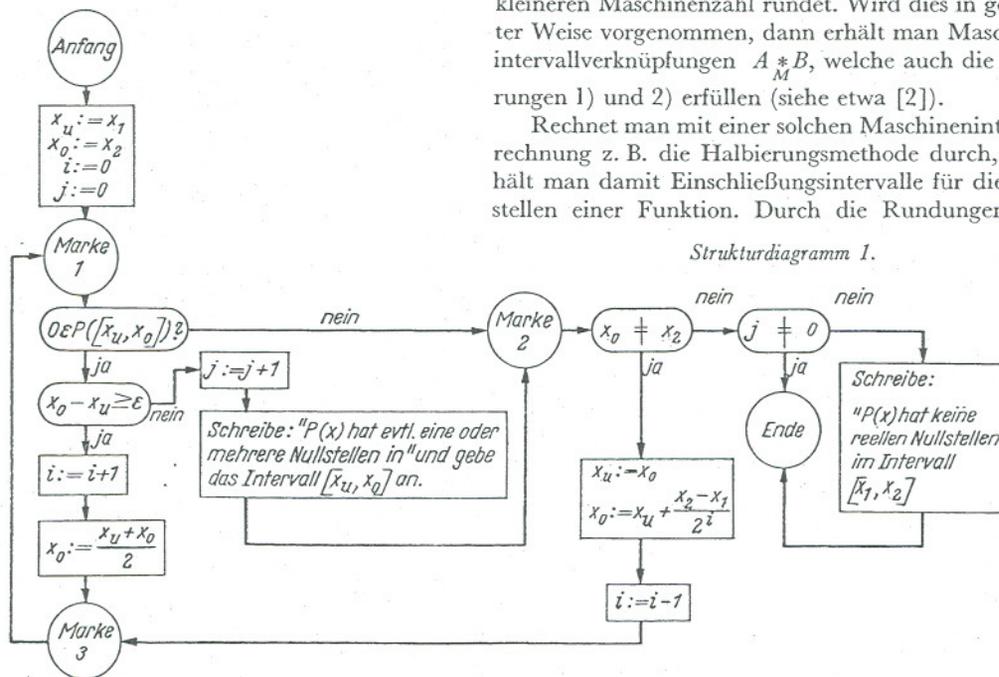
ENDE:

Zur Durchführung von numerischen Aufgaben setzt man heute in großem Umfange elektronische Digitalrechner ein. Diese Rechenanlagen operieren in einer endlichen Menge \mathbb{R}_M von Maschinenzahlen meist von Gleitkommazahlen; deshalb lassen sich vorgegebene Ausgangsdaten i. a. nur näherungsweise auf der Rechenanlage darstellen und die reellen Rechenoperationen nur näherungsweise durchführen. Will man auf der Maschine die beiden Maschinenzahlen a und b zu $a * b$ verknüpfen, dann erhält man in der Regel nicht exakt $a * b$, sondern eine zu $a * b$ nächstgelegene Zahl

$$(a * b)_M \in \mathbb{R}_M.$$

Wir können auch sagen, daß auf der Maschine anstelle $a * b$ die Maschinenverknüpfung $a *_M b := (a * b)_M$ ausgeführt wird. Aus diesem Grunde werden alle Rechnungen auf der Maschine durch eine Anhäufung von derartigen Rundungsfehlern mehr oder minder verfälscht. Die Berücksichtigung und Abschätzung dieser Rundungseffekte ist ein wesentlicher Gegenstand der Untersuchungen in der Numerischen Mathematik. Bei der Übertragung der Intervallrechnung auf digitale Rechenanlagen tritt das Problem auf, die wesentlichen Eigenschaften der exakten Intervallrechnung, wie sie oben in der Menge $I(\mathbb{R})$ definiert wurden, unter Berücksichtigung der Rundungsfehler auch bei der approximativen Durchführung auf der Maschine zu gewährleisten. Was die Forderungen 1) und 2) betrifft, so ist dies auch möglich. Die Intervallarithmetik auf der Maschine wird so realisiert, daß man bei der Berechnung eines Verknüpfungsintervalls $A *_M B$ dessen untere bzw. obere Schranke zu einer nicht größeren bzw. nicht kleineren Maschinenzahl rundet. Wird dies in geeigneter Weise vorgenommen, dann erhält man Maschinenintervallverknüpfungen $A *_M B$, welche auch die Forderungen 1) und 2) erfüllen (siehe etwa [2]).

Rechnet man mit einer solchen Maschinenintervallrechnung z. B. die Halbierungsmethode durch, so erhält man damit Einschließungsintervalle für die Nullstellen einer Funktion. Durch die Rundungen wird



lediglich bedingt, daß die Rechnung nicht bis zu Einschließungsintervallen mit beliebig kleinem Durchmesser fortgeführt werden kann, denn das Fehlen der Eigenschaft 3) verhindert im allgemeinen die Konvergenz von Intervallfolgen gegen reelle Zahlen.

4. Eine praktische Anwendungsmöglichkeit der Intervallrechnung

Der folgende abschließende Abschnitt soll zeigen, daß sich mit Hilfe der Intervallrechnung neue Algorithmen gewinnen lassen, beziehungsweise bekannte Verfahren verbessern lassen. Als Beispiel betrachten wir die Bestimmung einer Nullstelle \hat{x} der Funktion $y = f(x)$. Eines der bekanntesten Verfahren für diese Aufgabe ist wohl wegen seiner einfachen Herleitung und der Möglichkeit einer anschaulichen Deutung das sicherlich heute auch in der Oberstufe der Gymnasien bekannte Newton-Verfahren. Bei diesem wird ausgehend von einer Näherung x_0 für die Nullstelle \hat{x} nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

iteriert. Für das Verfahren läßt sich beweisen, daß die Folge $\langle x_n \rangle$ gegen \hat{x} konvergiert, falls x_0 »genügend nahe« an \hat{x} gewählt wird. Außerdem ist das Konvergenzverhalten quadratisch, falls \hat{x} eine einfache Nullstelle ist, d. h. es gibt eine Konstante c , so daß für alle n gilt: $|x_{n+1} - \hat{x}| \leq c |x_n - \hat{x}|^2$. Etwas vage wird diese Eigenschaft gewöhnlich dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man sagt, »die Anzahl der richtigen Dezimalstellen verdoppelt sich mit jedem Schritt«. So ideal dieses letztere Verhalten auch ist, bei konkreten Beispielen bereitet jedoch fast immer die Wahl von x_0 »genügend nahe« an \hat{x} Schwierigkeiten. (Wie kompliziert die Verhältnisse selbst schon bei Polynomen dritten Grades sein können wird in [3], Seite 225/226 demonstriert.) Selbst dann, wenn man bereits ein Intervall kennt, in welchem genau eine Nullstelle liegt, konvergiert das Newton-Verfahren nicht notwendig gegen diese. Eine einfache Eigenschaft der Intervallrechnung, nämlich die in Abschnitt 1 angeführte Inklusionsmonotonie gestattet nun das Newton-Verfahren so zu modifizieren, daß nicht nur die Konvergenz gegen \hat{x} stets erzwungen wird, sondern außerdem noch gleichzeitig in jedem Schritt die Nullstelle durch obere und untere Schranken eingeschlossen wird. Man besitzt also in jedem Iterationsschritt automatisch eine Fehlerabschätzung. Diese Eigenschaften wollen wir nun genauer formulieren und beweisen. Wir beschränken uns dabei auf Polynome. Die durchzuführenden Überlegungen sind elementar und setzen außer den Intervallverknüpfungen und einigen der angegebenen Eigenschaften des eingeführten Abstandes und Durchmessers von Intervallen keine weiteren Kenntnisse voraus.

Satz: Gegeben sei das Polynom $y = f(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v$ und ein Intervall $X_0 = [a, b]$, in welchem eine Nullstelle \hat{x} von $f(x)$ liegt. Für die intervallmäßige Auswertung der Ableitung $y' = f'(x) = \sum_{v=1}^n v \cdot a_v x^{v-1}$ im Intervall X_0 gelte $0 \notin f'(X_0)$. (Die Nullstelle ist also einfach.) Dann gelten für das Iterationsverfahren

$$X_{i+1} = \left\{ m_i - \frac{f(m_i)}{f'(X_i)} \right\} \cap X_i \quad (V)$$

(m_i ist der Mittelpunkt des Intervalles X_i)
die folgenden Aussagen:

- Für alle i gilt: $x \in X_i$ (d. h. alle Intervalle enthalten die Nullstelle).
- Es gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \hat{x}$, (d. h. die Intervallfolge zieht sich auf die Lösung zusammen).
- Für die Folge der Durchmesser $d(X_i)$ gilt $d(X_{i+1}) \leq c (d(X_i))^2$,
(d. h. die Folge der Durchmesser konvergiert quadratisch gegen Null).

Bemerkung

In Abschnitt 1 haben wir die reellen Zahlen a mit den Intervallen der Form $[a, a]$ identifiziert. Die angegebene Iterationsvorschrift ist daher zu verstehen als

$$X_{i+1} = \left\{ [m_i, m_i] - \frac{f([m_i, m_i])}{f'(X_i)} \right\} \cap X_i.$$

Nun zum

Beweis

(a) Diese Behauptung ist eine Folge des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Für ein beliebiges $x \in X_0$ gilt nämlich

$$f(\hat{x}) - f(x) = f'(\xi)(\hat{x} - x).$$

Dabei ist ξ eine Stelle aus dem Intervall X_0 . Wegen $f'(\xi) \in f'(X_0)$ (Einschließungseigenschaft) und $f(x) = 0$ erhalten wir

$$\hat{x} = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)} \in x - \frac{f(x)}{f'(X_0)}.$$

Insbesondere gilt also

$$\hat{x} \in m_0 - \frac{f(m_0)}{f'(X_0)}.$$

Da \hat{x} nach Voraussetzung im Intervall X_0 liegt, liegt \hat{x} auch im Durchschnitt von X_0 mit dem zuletzt angegebenen Intervall:

$$x \in \left\{ m_0 - \frac{f(m_0)}{f'(X_0)} \right\} \cap X_0 =: X_1.$$

Durch die gleiche Schlußweise zeigt man, daß \hat{x} in allen Intervallen X_i enthalten ist.

(b) Wir zeigen, daß $d(X_{i+1}) \leq \frac{1}{2} d(X_i)$, also $d(X_{i+1}) \leq (\frac{1}{2})^{i+1} \cdot d(X_0)$ gilt. Für $i \rightarrow \infty$ folgt dann unmittelbar $d(X_i) \rightarrow 0$; da wegen (a) stets $\hat{x} \in X_i$ gilt, erhalten wir $X_i \rightarrow \hat{x}$. Nun zum Beweis der obigen Ungleichung. Das Intervall $f'(X_n)$ bezeichnen wir mit $[\alpha, \beta]$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha > 0$ annehmen ($\beta < 0$ läßt sich analog durchführen). Dann gilt für $f(m_i) \geq 0$

$$Y = [y_1, y_2] := [m_i, m_i] - \left[\frac{f(m_i)}{\beta}, \frac{f(m_i)}{\alpha} \right] \\ = \left[m_i - \frac{f(m_i)}{\alpha}, m_i - \frac{f(m_i)}{\beta} \right].$$

Es ist also

$$y_2 = m_i - \frac{f(m_i)}{\beta} \leq m_i.$$

Damit folgt

$$d(X_{i+1}) = d(Y \cap X_i) \leq \frac{1}{2} d(X_i).$$

Entsprechend zeigt man, falls $f(m_i) < 0$ ist,

$$y_1 = m_i - \frac{f(m_i)}{\beta} > m_i,$$

und damit

$$d(X_{i+1}) = d(Y \cap X_i) < \frac{1}{2} d(X_i).$$

Allgemein gilt also

$$d(X_{i+1}) = d(Y \cap X_i) \leq \frac{1}{2} d(X_i).$$

(c) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß für das Intervall $f'(X_0) = [\alpha_0, \beta_0]$ die Bedingung $\alpha_0 > 0$ erfüllt ist. (Andernfalls kann man $f(x)$ mit -1 multiplizieren. Dann ist $-f'(X_0) = [-\beta_0, -\alpha_0]$ und $-\beta_0 > 0$. $-f(x)$ hat dieselben Nullstellen wie $f(x)$.) Es sei

$$Y_0 := m_0 - \frac{f(m_0)}{f'(X_0)}.$$

Dann gilt

$$d(Y_0) = |f(m_0)| \cdot \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_0 \cdot \beta_0}. \quad (1)$$

Weiter erhalten wir mit einem $y \in X_0$ wegen $f(\hat{x}) = 0$

$$f(m_0) = f(\hat{x}) + (m_0 - \hat{x})f'(y) \in (m_0 - \hat{x}) \cdot [\alpha_0, \beta_0]$$

also

$$|f(m_0)| = |(m_0 - \hat{x})[\alpha_0, \beta_0]| = |m_0 - \hat{x}| \cdot |[\alpha_0, \beta_0]| \\ \leq (b - a) \cdot \beta_0 = \beta_0 \cdot d(X_0). \quad (2)$$

Außerdem folgt unter Verwendung der in Abschnitt 2 angegebenen Ungleichung

$$d(X^v) \leq v \cdot |X|^{v-1} \cdot d(X)$$

die Beziehung

$$\beta_0 - \alpha_0 = d(f'(X_0)) = |f'(X_0) - f'(X_0)| \\ = \left| \sum_{v=1}^n v \cdot a_v \cdot X_0^{-v} - \sum_{v=1}^n v \cdot a_v \cdot X_0^{v-1} \right| \\ = \left| \sum_{v=1}^n v \cdot a_v \cdot (X_0^{v-1} - X_0^{v-1}) \right| \\ \leq \sum_{v=1}^n v \cdot |a_v| \cdot |X_0^{v-1} - X_0^{v-1}| \\ \leq K_0 \cdot d(X_0) \quad (3)$$

mit

$$K_0 = \sum_{v=2}^n v \cdot (v-1) \cdot |a_v| \cdot |X_0|^{v-2}.$$

Mit (2) und (3) ergibt sich in (1)

$$d(Y_0) \leq \frac{K_0}{\alpha_0} (d(X_0))^2.$$

Da für zwei beliebige Intervalle A und B mit nicht-leerem Durchschnitt stets die Beziehung $d(A \cap B) \leq \min \{d(A), d(B)\}$ gilt, erhalten wir

$$d(X_1) = d(X_0 \cap Y_0) \leq \frac{K_0}{\alpha_0} (d(X_0))^2.$$

Nun ist $X_1 \subset X_0$ und daher

$$\alpha) \quad |X_1| \leq X_0,$$

also

$$K_1 = \sum_{v=2}^n v(v-1) |a_v| \cdot |X_1|^{v-2} \leq K_0,$$

$\beta)$ auf Grund der Inklusionsmonotonie

$$f'(X_1) = [\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha_0, \beta_0] = f'(X_0),$$

d. h.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1.$$

Daraus folgt

$$d(X_2) = d(Y_1 \cap X_1) \leq \frac{K_1}{\alpha_1} (d(X_1))^2 \leq \frac{K_0}{\alpha_0} (d(X_1))^2.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise erhalten wir schließlich

$$d(X_{i+1}) \leq c (d(X_i))^2 \quad \text{mit} \quad c = \frac{K_0}{\alpha_0}.$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen.

Das angegebene Verfahren (V) gestattet eine einfache geometrische Deutung. Diese ist in Abb. 2 für den ersten Schritt im Fall $\alpha_0 > 0, f(m_0) > 0$ angegeben.

$$f'(X_0) = [\alpha_0, \beta_0]$$

$$\alpha_0 = \tan \varphi_1, \beta_0 = \tan \varphi_2$$

$$X_0 = [a, b]; X_1 = [a, y_2]$$

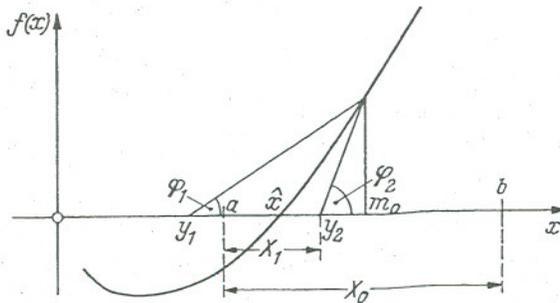
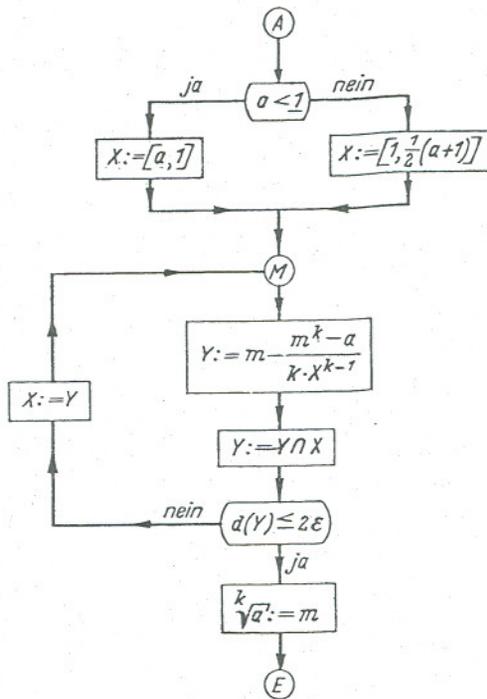


Abb. 2. Geometrische Deutung von Verfahren (V).



Strukturdiagramm 2

Als einfache Anwendung betrachten wir nun die Berechnung der k -ten Wurzel aus einer positiven Zahl a . Diese Aufgabe ist äquivalent mit der Bestimmung der größten Nullstelle der Funktion $y = x^k - a$. Wegen $y' = k \cdot x^{k-1}$ erhalten wir in diesem Fall für die Iterationsvorschrift (V)

$$X_{i+1} = \left\{ m_i - \frac{m_i^k - a}{k \cdot X_i^{k-1}} \right\} \cap X_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Um das Verfahren starten zu können, benötigen wir ein Intervall X_0 mit $\sqrt[k]{a} \in X_0$ und $0 \notin X_0$. Für $a \geq 1$ und $k = 2$ können wir wegen

$$(\sqrt{a} - 1)^2 = a - 2\sqrt{a} + 1 \geq 0,$$

also

$$\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a + 1),$$

$X_0 = [1, \frac{1}{2}(a + 1)]$ setzen. Nun ist $\sqrt[k]{a} \leq \sqrt{a}$ für $a \geq 1$, d. h. für alle k gilt $\sqrt[k]{a} \in [1, \frac{1}{2}(a + 1)]$. Ist $a < 1$, so zeigt man durch ähnliche Überlegungen $\sqrt[k]{a} \in [a, 1]$. Damit hat man zur Einschließung der k -ten Wurzel aus einer positiven Zahl a den folgenden Algorithmus:

$$X_0 = \begin{cases} [1, \frac{1}{2}(a + 1)] & \text{für } a \geq 1 \\ [a, 1] & \text{für } a < 1 \end{cases}$$

$$X_{i+1} = \left\{ m_i - \frac{m_i^k - a}{k \cdot X_i^{k-1}} \right\} \cap X_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Für die Mittelpunkte m_{i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|m_{i+1} - \sqrt[k]{a}| \leq \frac{1}{2} d(X_{i+1}).$$

Man besitzt hier also in jedem Iterationsschritt eine einfache Aussage über die bereits erreichte Genauigkeit, oder anders ausgedrückt: Bei vorgegebener Genauigkeit läßt sich in jedem Schritt einfach kontrollieren, ob diese bereits erreicht ist oder nicht. Wir geben im Strukturdiagramm 2 den Rechenablauf bis zum Erreichen eines Fehlers an, der kleiner als ϵ ist.

Zur Illustration führen wir einen Schritt zur Einschließung von $\sqrt{2}$ durch.

$X := [1, \frac{1}{2}(a + 1)]$	$X := [1, \frac{3}{2}]$
$Y := m - \frac{m^k - a}{k \cdot X^{k-1}}$	$Y := \frac{5}{4} - \frac{\frac{25}{16} - \frac{32}{16}}{2 [1, \frac{3}{2}]} = [\frac{67}{48}, \frac{47}{32}]$
$Y := X \cap Y$	$Y := [1, \frac{3}{2}] \cap [\frac{67}{48}, \frac{47}{32}] = [\frac{67}{48}, \frac{47}{32}]$
$X := Y$	$X := [\frac{67}{48}, \frac{47}{32}]$
⋮	⋮

Abschließend geben wir eine Tabelle an, in welcher die Anzahl der Iterationsschritte aufgeführt ist, die man benötigt, um für einige Werte von a und k eine Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-10}$ zu erreichen. Die Rechnungen wurden am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe auf der elektronischen Rechanlage X8 durchgeführt.

$k \backslash a$	0.5	0.75	1.25	1.5	3	5	10
2	4	3	3	4	4	4	4
3	4	4	3	3	4	5	6
4	4	4	3	3	5	5	7
5	5	4	3	4	5	6	7
6	5	4	3	4	5	6	8
7	5	4	4	4	5	6	7
8	5	4	4	4	6	6	7
9	5	4	4	4	6	7	7
10	6	5	4	5	6	7	8

Literatur

- [1] G. ALEFELD: Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten einer komplexen Intervallarithmetik. - ZAMM 50, 455-465 (1970).
 [2] N. APOSTOLATOS - U. KULISCH: Grundlagen einer

- Maschinenintervallarithmetik. - Comp. 2, 89-104 (1967).
 [3] L. COLLATZ: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. - Berlin, Göttingen: Springer 1964.
 [4] H. CHRIST: Realisierung einer Maschinenintervallarithmetik mit beliebigen Algol-60-Compilern. - Elektronische Rechenanlagen 10 (1968).
 [5] U. KULISCH: Grundzüge der Intervallrechnung, Überblick Mathematik 2. - Mannheim: Bibl. Inst. 1969.
 [6] J. HERZBERGER: Definition und Eigenschaften allgemeiner Intervallräume. - ZAMM 50, T50-T51 (1970).
 [7] O. MAYER: Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen. - Comp. 5, 144-162 (1970).
 [8] R. E. MOORE: Intervallanalyse. - München: Oldenbourg 1969.
 [9] O. SPANIOL: Die Distributivität in der Intervallarithmetik. - Comp. 5, 6-16 (1970).
 [10] N. APOSTOLATOS - U. KULISCH - K. NICKEL: Ein Einschließungsverfahren für Nullstellen. - Computing, Vol. 2, 195-201 (1967).