SONDERABDRUCK

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Vol. 21, Fasc. 5 (1970) ZAMP Seiten 819–824

Verfahren höherer Ordnung zur iterativen Einschliessung der inversen Matrix

Von

GÖTZ ALEFELD und JÜRGEN HERZBERGER

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

PRINTED IN SWITZERLAND

Verfahren höherer Ordnung zur iterativen Einschliessung der inversen Matrix

Von Götz Alefeld und Jürgen Herzberger, Institut für angewandte Mathematik und Rechenzentrum, Universität Karlsruhe, Deutschland

1. Bezeichnungen

Im folgenden wird wesentlich von der Intervallrechnung Gebrauch gemacht. Für je zwei Elemente $X = [x^1, x^2]$, $Y = [y^1, y^2]$ aus der Menge der reellen abgeschlossenen und beschränkten Intervalle $I(\boldsymbol{R})$ sind vier Verknüpfungen $+, -, \cdot$ und $:$ erklärt (s. [4]). Matrizen, deren Elemente aus $I(\boldsymbol{R})$ sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots$ und fassen sie zur Menge $M(I(\boldsymbol{R}))$ zusammen. Eine Teilmenge von $M(I(\boldsymbol{R}))$ sind die Matrizen $\underset{\cdot}{\mathcal{X}}, \underset{\cdot}{\mathcal{Y}}, \ldots$ deren Elemente reelle Zahlen sind (Punktmatrizen); die Gesamtheit dieser Matrizen bezeichnen wir mit $M(\boldsymbol{R})$. Verknüpfungen von Elementen aus $M(I(\boldsymbol{R}))$ sind wie üblich definiert, z.B.

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} := \sum_k A_{ik} \cdot B_{kj} .$$

Die Intervallmatrix $\mathcal{A} = (A_{ij})$ ist in der Intervallmatrix $\mathcal{B} = (B_{ij})$ enthalten, i.Z. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, genau dann, wenn für alle i und j gilt: $A_{ij} \subset B_{ij}$. Ist speziell $\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \in M(\boldsymbol{R})$, so schreiben wir dafür $\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$. Gilt $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ dann erfüllen alle Matrizenverknüpfungen $* \in \{+, -, \cdot\}$ die Teilmengeneigenschaft: $\mathcal{A}_1 * \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}_2 * \mathcal{B}_2$. Unter der Durchmessermatrix einer Intervallmatrix $\mathcal{X} = (X_{ij})$ verstehen wir die nichtnegative Punktmatrix $d(\mathcal{X}) = (d(X_{ij})) = (d([x_{ij}^1, x_{ij}^2]))$ wobei $d(X_{ij}) = x_{ij}^2 - x_{ij}^1$ bedeutet. Weiter verstehen wir unter dem Betrag der Intervallmatrix $\mathcal{X} = ([x_{ij}^1, x_{ij}^2])$ die Punktmatrix $|\mathcal{X}| = (\max\{|x_{ij}^1|, |x_{ij}^2|\})$. Ist $\underset{\cdot}{\mathcal{Y}} \in M(\boldsymbol{R})$, so stimmt dies mit der üblichen Definition des Betrages einer Matrix überein. Damit gilt die Beziehung: $d(\mathcal{X} \cdot \underset{\cdot}{\mathcal{Y}}) = d(\mathcal{X}) \cdot |\underset{\cdot}{\mathcal{Y}}|$.

Gegeben sei eine Intervallmatrix $\mathcal{X} = (X_{ij})$ mit $X_{ij} = [x_{ij}^1, x_{ij}^2]$, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$m\colon M(I(\boldsymbol{R})) \ni \mathcal{X} \to m(\mathcal{X}) \in M(\boldsymbol{R}) \text{ mit } m(\mathcal{X})_{ij} := (x_{ij}^1 + x_{ij}^2)/2$$

als Mittelpunktsoperator (s. [2]). Es gelten die folgenden Eigenschaften:

a) m ist ein stetiger Operator,

b) $m(\underset{\cdot}{\mathcal{A}}) = \underset{\cdot}{\mathcal{A}}$ für alle $\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \in M(\boldsymbol{R})$,

c) $m(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = m(\mathcal{X}) + m(\mathcal{Y})$, $m(\mathcal{X} - \mathcal{Y}) = m(\mathcal{X}) - m(\mathcal{Y})$ für alle $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in M(I(\boldsymbol{R}))$,

d) $m(\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{X}) = \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathcal{X})$, $m(\mathcal{X} \cdot \underset{\cdot}{\mathcal{A}}) = m(\mathcal{X}) \cdot \underset{\cdot}{\mathcal{A}}$ für $\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \in M(\boldsymbol{R})$, $\mathcal{X} \in M(I(\boldsymbol{R}))$.

Die hier kurz angeführten Begriffe und Eigenschaften werden in den folgenden Sätzen verwendet.

2. Verfahren

Satz 1: Gegeben sei die nichtsinguläre Matrix $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}$ und eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{n+1} := {} & m(\mathfrak{X}_n) + m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots \\ & + m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-2} + \mathfrak{X}_n \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}, \quad k > 1 \qquad (1)\end{aligned}$$

die folgenden Aussagen:

I. Jedes Glied der Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ enthält $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$.

II. Die Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ genau dann, wenn der Spektralradius $\varrho\,(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_0))$ kleiner als 1 ist.

III. Für eine multiplikative und monotone Matrixnorm $\| \cdot \|$ gilt für die Folge der Durchmessermatrizen $(d(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$:

$$\| d(\mathfrak{X}_{n+1}) \| \leqslant C \cdot \| d(\mathfrak{X}_n) \|^k \ \text{mit}\ C = (1/2)^{k-1} \cdot \| \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \|^{k-1}.$$

Beweis:

Zu I. Wie man leicht nachprüft, gilt für beliebiges $m(\mathfrak{X}_n)$:

$$\begin{aligned}(\alpha)\quad & m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-2}) \\ & = \underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}.\end{aligned}$$

Behauptung I. ist für $n = 0$ nach Voraussetzung richtig; gilt nun $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathfrak{X}_n$, dann folgt unmittelbar mit Hilfe der eben angegebenen Beziehung (α) und aufgrund der Teilmengeneigenschaft:

$$\begin{aligned}\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} & = m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-2}) \\ & + \underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1} \in m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots \\ & + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-2}) + \mathfrak{X}_n \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1} = \mathfrak{X}_{n+1}.\end{aligned}$$

Zu II. Unter Anwendung der Rechenregeln für den Mittelpunktsoperator m gilt für die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}m(\mathfrak{X}_{n+1}) & = m(\mathfrak{X}_n) + m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots + m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1} \\ & = m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \dots + (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}).\end{aligned}$$

Die Mittelpunktsmatrizen $m(\mathfrak{X}_n)$ gehorchen also einer Iterationsvorschrift, die mit (5) aus [3] identisch ist. Wie dort gezeigt wurde, konvergiert die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ genau dann, wenn $\varrho\,(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$ ist.

Setzen wir nun beim Iterationsverfahren (1) $\varrho\,(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$ voraus, so konvergiert also die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$. Für die Folge der Durchmessermatrizen folgt aus (1) mit der in Abschnitt 1 angegebenen

Beziehung: $d(\mathfrak{X}_{n+1}) = d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}|$ und damit $d(\mathfrak{X}_n) \to \underset{\cdot}{O}$. Da die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))_{n=1}^{\infty}$ gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ konvergiert, so konvergiert damit auch $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen die Punktmatrix $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$. Konvergiert andrerseits die Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$, dann konvergiert notwendig die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ und aus obiger Rekursionsformel für $m(\mathfrak{X}_{n+1})$ folgt notwendig $\varrho\,(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$.

Zu III. Es gilt:

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{X}_{n+1}) &= d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}| = d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot \underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}| \\ &= d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(\underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} - m(\mathfrak{X}_n)))^{k-1}| \leqslant d(\mathfrak{X}_n) \cdot (|\underset{\cdot}{\mathcal{A}}| \cdot |\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} - m(\mathfrak{X}_n)|)^{k-1} \\ &\leqslant d(\mathfrak{X}_n) \cdot (1/2)^{k-1} \cdot (|\underset{\cdot}{\mathcal{A}}| \cdot d(\mathfrak{X}_n))^{k-1}\,. \end{aligned}$$

Bei Verwendung der Monotonie und Multiplikativität der Norm folgt weiter:

$$\| d(\mathfrak{X}_{n+1}) \| \leqslant (1/2)^{k-1} \cdot \|\underset{\cdot}{\mathcal{A}}\|^{k-1} \cdot \| d(\mathfrak{X}_n) \|^k\,.$$

Bemerkung 1: Wie man dem Beweis entnehmen kann, gilt die Aussage II. auch für eine beliebige Intervallmatrix mit $\varrho\,(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$. In diesem Falle schliessen jedoch die Iterierten $\mathfrak{X}_n$ im allgemeinen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ nicht mehr ein.

Satz 2: Gegeben sei die nichtsinguläre Matrix $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}$ und eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{Y}_{n+1} &:= m(\mathfrak{X}_n) + m(\mathfrak{X}_n) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n)) + \cdots + m(\mathfrak{X}_n) \\ &\quad \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-2} + \mathfrak{X}_n \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\mathfrak{X}_n))^{k-1}, \quad k > 1 \\ \mathfrak{X}_{n+1} &:= \mathcal{Y}_{n+1} \cap \mathfrak{X}_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

die folgenden Aussagen:

I. Jedes Glied der Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ enthält $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$.

II. Die Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$, wenn für alle $\underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}_0$ der Spektralradius $\varrho\,(|\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}}|)$ kleiner als 1 ist.

III. Ist $\|\cdot\|$ eine multiplikative und monotone Matrixnorm, dann gilt für die Folge der Durchmessermatrizen $(d(\mathfrak{X}_n))_{n=1}^{\infty}$:

$$\| d(\mathfrak{X}_{n+1}) \| \leqslant C \cdot \| d(\mathfrak{X}_n) \|^k \text{ mit } C = (1/2)^{k-1} \cdot \|\underset{\cdot}{\mathcal{A}}\|^{k-1}\,.$$

Beweis:

Zu I. Die Beziehung $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathcal{Y}_{n+1}$ folgt unter der Voraussetzung, dass $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ in $\mathfrak{X}_n$ liegt, wie im vorhergehenden Satz 1 unter I. Damit ist dann auch $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathfrak{X}_{n+1} = \mathfrak{X}_n \cap \mathcal{Y}_{n+1}$.

Zu II. Die Folge der Iterierten bildet eine monoton fallende Folge von (ineinandergeschachtelten) Intervallmatrizen und konvergiert daher. Es sei nun $\varrho\,(|\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}}|) < 1$ für alle $\underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}_0$; dann zeigen wir, dass dieser Fixpunkt eine Punktmatrix sein muss und daher wegen I. gleich $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1}$ ist. Nehmen wir an, $\hat{\mathfrak{X}}$ sei Fixpunkt von (2) mit $d(\hat{\mathfrak{X}}) \neq \underset{\cdot}{O}$. Dann gilt nach (2) für

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}} &:= m(\hat{\mathfrak{X}}) + m(\hat{\mathfrak{X}}) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}})) + \ldots + m(\hat{\mathfrak{X}}) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}))^{k-2} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{X}} \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}))^{k-1} \end{aligned}$$

die Gleichung $\hat{\mathfrak{X}} = \hat{\mathcal{Y}} \cap \hat{\mathfrak{X}}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\hat{\mathfrak{X}} \subset \hat{\mathcal{Y}}$ gilt, woraus dann $d(\hat{\mathcal{Y}}) \geqslant d(\hat{\mathfrak{X}})$ folgt. Mit Hilfe der Regeln für die Durchmessermatrizen erhalten wir:

$$d(\hat{\mathfrak{X}}) \cdot | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}) |^{k-1} \geqslant d(\hat{\mathfrak{X}}) \cdot | (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}))^{k-1} | = d(\hat{\mathcal{Y}}) \geqslant d(\hat{\mathfrak{X}}) \,,$$

woraus aber $d(\hat{\mathfrak{X}}) \cdot (\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}) |^{k-1}) \leqslant \underset{\cdot}{O}$ folgt. Wegen $\varrho\,(| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}) |) < 1$ existiert dann $(\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\hat{\mathfrak{X}}) |^{k-1})^{-1}$ und ist nichtnegativ[1]). Daraus folgt aber $d(\hat{\mathfrak{X}}) \leqslant \underset{\cdot}{O}$, also $d(\hat{\mathfrak{X}}) = \underset{\cdot}{O}$ im Widerspruch zur Annahme.

Zu III. Wie in Satz 1, III. folgt unmittelbar

$$d(\mathcal{Y}_{n+1}) \leqslant d(\mathfrak{X}_n) \cdot (1/2)^{k-1} \cdot (| \underset{\cdot}{A} | \cdot d(\mathfrak{X}_n))^{k-1} \,.$$

Für den nichtleeren Durchschnitt zweier Intervalle $X,\ Y \in I(\boldsymbol{R})$ gilt:

$$d(X \cap X) \leqslant \min\{d(X), d(Y)\}$$

was sich unmittelbar auf Durchmessermatrizen übertragen lässt. Wegen $\mathfrak{X}_{n+1} = \mathcal{Y}_{n+1} \cap \mathfrak{X}_n$ folgt daher $d(\mathfrak{X}_{n+1}) \leqslant d(\mathcal{Y}_{n+1}) \leqslant d(\mathfrak{X}_n) \cdot (1/2)^{k-1} \cdot (|\underset{\cdot}{A}| \cdot d(\mathfrak{X}_n))^{k-1}$. Wie in Satz 1, III. ergibt sich daraus die Behauptung.

Wir geben nun ein Kriterium an, mit dem sich die Konvergenzbedingung von Satz 2 leicht nachprüfen lässt.

Lemma: Sei $\mathfrak{X} \in M(I(\boldsymbol{R}))$ mit $\underset{\cdot}{A}^{-1} \in \mathfrak{X}$ und es gelte für eine monotone und multiplikative Matrixnorm $\| \cdot \|$ die Bedingung $\| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \| < 1$. Ist die Beziehung $\| d(\mathfrak{X}) \| < 2 \cdot (1 - \| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \|) / \| \underset{\cdot}{A} \|$ erfüllt, dann gilt für alle

$$\underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X} : \varrho\,(| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} |) < 1 \,.$$

Beweis: Für $\underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ gilt aufgrund der Teilmengeneigenschaft $\underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \in \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \mathfrak{X}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} | \leqslant | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \mathfrak{X} | = | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot (m(\mathfrak{X}) + ([-1/2 \cdot d(X_{ij}), 1/2 \\ &\cdot d(X_{ij})])) | \leqslant | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) | + | \underset{\cdot}{A} | \cdot | ([-1/2 \cdot d(X_{ij}), 1/2 \cdot d(X_{ij})]) | \\ &= | \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) | + | \underset{\cdot}{A} | \cdot 1/2 \cdot d(\mathfrak{X}) \,. \end{aligned}$$

Mit der Monotonie und Multiplikativität der Matrixnorm folgt weiter:

$$\| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \| \leqslant \| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \| + \| \underset{\cdot}{A} \| \cdot 1/2 \cdot \| d(\mathfrak{X}) \| \,.$$

Gilt nun

$$\| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \| + \| \underset{\cdot}{A} \| \cdot 1/2 \cdot \| d(\mathfrak{X}) \| < 1 \,,$$

was gleichbedeutend mit

$$\| d(\mathfrak{X}) \| < 2 \cdot (1 - \| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \|) \,/\, \| \underset{\cdot}{A} \|$$

ist, dann gilt aufgrund der letzten Ungleichung auch $\| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} \| < 1$. Daraus folgt aber $\varrho\,(| \underset{\cdot}{\mathcal{E}} - \underset{\cdot}{A} \cdot \underset{\cdot}{\mathfrak{X}} |) < 1$.

[1]) Siehe etwa [5], S. 83, Satz 3.8.

Bemerkung 2: Das folgende einfache Beispiel zeigt, wie stark die zusätzliche Durchschnittsbildung bei Verfahren (2) gegenüber (1) die Konvergenz der Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ beschleunigen kann:

Zu bestimmen sei das inverse Element zu $\underset{\cdot}{A} := a = 3$; es gilt:

$$\underset{\cdot}{A}^{-1} = 1/a \in [1/3, 3/5] = \mathfrak{X}_0 =: X_0 .$$

Damit lautet Iterationsverfahren (2) im Falle $k = 2$

$$Y_{n+1} := m(X_n) + X_n \cdot (1 - 3 \cdot m(X_n)) \qquad X_{n+1} := Y_{n+1} \cap X_n .$$

Somit erhalten wir: $Y_1 = [17/75, 1/3]$, $X_1 = [17/75, 1/3] \cap [1/3, 3/5] = 1/3$. Dagegen kann man mit obigem X_0 bei Verfahren (1) nicht nach endlich vielen Schritten die Lösung 1/3 erhalten.

3. Praktische Anwendung der Verfahren (1) und (2)

Die in Satz 1 angegebene notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung für die Iterationsvorschrift (1) ist für die Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ weniger einschränkend als das Kriterium für die Konvergenz des Iterationsverfahren (2). Insbesondere kann die Durchmessermatrix $d(\mathfrak{X}_0)$ bei (1) beliebig grosse Elemente haben, wenn nur $m(\mathfrak{X}_0)$ die geforderte Bedingung erfüllt. Dagegen bilden die Iterierten $\mathfrak{X}_n$ beim Verfahren (2) eine monoton absteigende Folge von ineinandergeschachtelten Intervallmatrizen. Dies hat den praktisch wichtigen Vorteil, dass bei der Durchführung der Rechnung auf einer Rechenanlage in jedem Fall nach endlich vielen Schritten das Iterationsverfahren zum Stillstand kommt. Das Auftreten von Periodizitätszyklen infolge von Rundungsunruhe wie bei Verfahren (1) ist hier nicht möglich. Praktisch kann man beide Iterationsvorschriften nun folgendermassen sinnvoll kombinieren:

a) Man verschaffe sich (etwa mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus) eine Näherung $m(\tilde{\mathfrak{X}}_0)$ für $\underset{\cdot}{A}^{-1}$. Gilt etwa für eine Norm $\| \underset{\cdot}{E} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\tilde{\mathfrak{X}}_0) \| < 1$, so lässt sich leicht eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\underset{\cdot}{A}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$ und $m(\mathfrak{X}_0) = m(\tilde{\mathfrak{X}}_0)$ angeben. Ist speziell die Zeilen- bzw. Spaltensummennorm kleiner als 1, so ergeben sich explizite Formeln dafür unmittelbar als eine Verallgemeinerung der in [1] zur Einschliessung der Lösung eines linearen Gleichungssystems angegebenen Beziehungen.

b) Man iteriere nach Vorschrift (1), bis die im Lemma angegebene Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens (2) erfüllt ist. (Die im Lemma gemachte Voraussetzung $\| \underset{\cdot}{E} - \underset{\cdot}{A} \cdot m(\mathfrak{X}) \| < 1$ ist für alle Iterierten $\mathfrak{X}_n$ des Verfahrens (1) erfüllt, falls dies schon für $\mathfrak{X}_0$ der Fall ist.)

c) Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Das Verfahren (2) kommt daher nach endlich vielen Schritten auf der Rechenanlage zum Stillstand.

4. Beispiel

Wir betrachten die Matrix $\underset{\cdot}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, für deren Inverse die Matrix

$$m(\tilde{\mathfrak{X}}_0) = \begin{pmatrix} -0{,}9 & 0 & 1{,}8 \\ 3{,}7 & 1 & -2 \\ 2{,}8 & 1.1 & -1{,}1 \end{pmatrix}$$

eine Näherung mit $\varrho\,(\mathcal{E} - \underset{\cdot}{\mathcal{A}} \cdot m(\tilde{\mathfrak{X}}_0)) < 1$ ist (siehe [3]). Zur Demonstration addieren wir zu jedem Element von $m(\tilde{\mathfrak{X}}_0)$ das symmetrische Intervall $[-D, D]$ ($D = 10^j$; $j = 1, 2, \ldots, 6$) und erhalten damit die Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $m(\mathfrak{X}_0) = m(\tilde{\mathfrak{X}}_0)$. Für diese Wahl von D gilt stets $\underset{\cdot}{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$. In der folgenden Tabelle ist in der ersten Zeile die Anzahl der nötigen Iterationsschritte nach Verfahren (1) für $k = 3$ zur Erfüllung der im Lemma angegebenen Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens (2) eingetragen. Zeile 2 enthält die dann noch nach Verfahren (2) für $k = 3$ nötigen Iterationsschritte bis zum Stillstand der Iteration.

Iterationsschritte	$D = 10$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
Verfahren (1), $k = 3$	3	3	3	3	4	4
Verfahren (2), $k = 3$	4	3	4	4	3	2

Die Rechnungen wurden auf der elektronischen Rechenanlage ZUSE Z23 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe unter Verwendung der dort vorhandenen Maschinenintervallarithmetik durchgeführt (Mantissenlänge: 30 bits). Dadurch wurden sämtliche Rundungsfehler miterfasst.

Wir geben abschliessend die Durchmessermatrix des Ergebnisses $\mathfrak{X}$ für $D = 10$ an:

$$d(\mathfrak{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8}\,.$$

Literatur:

[1] ALEFELD, G., *Über die aus monoton zerlegbaren Operatoren gebildeten Iterationsverfahren*, erscheint demnächst in Computing.

[2] ALEFELD, G. und HERZBERGER, J., *Über die Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Intervallrechnung*, erscheint in Elektronische Rechenanlagen, Heft 5, 1970.

[3] FORSTER, P., *Bemerkungen zum Iterationsverfahren von* SCHULZ *zur Bestimmung der Inversen einer Matrix*, Numerische Mathematik *12*, 211–214 (1968).

[4] KULISCH, U., *Grundzüge der Intervallrechnung*, in Überblicke 2, Bibliograph. Inst. Mannheim.

[5] VARGA, R. S., *Matrix Iterative Analysis* (Prentice-Hall, 1962).

Summary

Two iterative methods of order k for the calculation of the inverse matrix are given. The successive approximations of both methods are yielding simultaneously lower and upper bounds for the elements of the inverse matrix. Conditions for convergence are given. It is shown how to combine both methods practically.

(Eingegangen: 13. Dezember 1969; rev. 11. März 1970)