Über die Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Intervallrechnung

A note on inverting matrices by means of interval arithmetics

von G. ALEFELD und J. HERZBERGER
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe

Elektron. Rechenanl. 12 (1970), H. 5, S. 259–261
Manuskripteingang: 13. 8. 1970

In der Literatur sind verschiedene Iterationsverfahren zur Bestimmung der Inversen einer gegebenen Matrix bekannt (siehe [4–5]). Mit Hilfe der Intervallarithmetik für Matrizen (siehe [1]) werden in dieser Arbeit zwei Verfahren angegeben, welche in jedem Schritt die Inverse unter Erfassung aller Rundungsfehler einschließen. Es werden numerische Ergebnisse angegeben.

This paper is concerned with inverting matrices by means of interval arithmetics. Two iterative methods are given each of them producing a sequence of interval matrices containing the inverse matrix. Under appropriate conditions the sequences are converging ageinst the inverse. Some numerical examples are given.

1. Einführung

Berechnet man zu einer nichtsingulären Matrix $\mathfrak{A}$ die Inverse auf einer Rechenanlage, so wird das Resultat durch die unvermeidlichen Rundungsfehler verfälscht. Will man nun die Rundungsfehler mit berücksichtigen, so führt dies auf die Aufgabe, die Inverse möglichst gut in Schranken einzuschließen. Bei der Lösung dieser Aufgabe machen wir Gebrauch von den in [1] beschriebenen Verknüpfungen für Intervallmatrizen und deren Eigenschaften. Mit ihrer Hilfe lassen sich Folgen von Intervallmatrizen gewinnen, deren Elemente jeweils die Inverse einschließen. In dieser Arbeit werden Kriterien hergeleitet, welche die Konvergenz gegen die Inverse gewährleisten. Dazu ist es nötig, einige zusätzliche Eigenschaften der Intervallrechnung für Matrizen (siehe [1]) zu betrachten. Ausgehend von einer geeigneten Einschließung für die inverse Matrix erhält man auf diese Art in jedem Schritt obere und untere Schranken für die Elemente von $\mathfrak{A}^{-1}$. Es zeigt sich, daß die ursprüngliche Einschließung dabei Elemente von beliebig großem Durchmesser besitzen kann. Die angegebenen Rechenvorschriften lassen sich unmittelbar auf die in [3] angegebene Weise auf einer Rechenanlage durchführen. Man erhält damit stets Einschließungen für die Inverse unter Einschluß aller Rundungsfehler. Bei diesem Vorgehen handelt es sich also um eine Anwendung der Maschinenintervallarithmetik zur Erfassung von Rundungsfehlern bei der Invertierung von Matrizen.

2. Bezeichnungen und Vereinbarungen

In der Menge $I(\mathbb{R})$ der reellen, abgeschlossenen und beschränkten Intervalle sind für zwei Elemente $X = [x^1, x^2]$, $Y = [y^1, y^2]$ durch: $X * Y = \{x * y : x^1 \leq x \leq x^2, y^1 \leq y \leq y^2\}$, $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ vier Verknüpfungen definiert, welche sich auf die Verknüpfungen der Schranken zurückführen lassen. Matrizen, deren Elemente aus $I(\mathbb{R})$ sind, bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$ und fassen sie zur Menge $M(I(\mathbb{R}))$ zusammen. Dagegen bezeichnen wir Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind (‚Punktmatrizen') mit $\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \boldsymbol{\mathfrak{Y}}, \ldots$ und ihre Gesamtheit mit $M(\mathbb{R})$. Verknüpfungen von Elementen aus $M(I(\mathbb{R}))$ sind wie üblich definiert, z. B. $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} := (\Sigma A_{ij} \cdot B_{jk})$. Gilt für zwei Matrizen $\mathfrak{A} = (A_{ij})$ und $\mathfrak{B} = (B_{ij}) : A_{ij} \subset B_{ij}$ für alle i und j, dann sagen wir $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{B}$ enthalten i. Z. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$; ist $\mathfrak{A}$ speziell aus $M(\mathbb{R}) : \mathfrak{A} := \boldsymbol{\mathfrak{A}}$, so schreiben wir dafür auch $\boldsymbol{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ so gilt für alle Matrizenverknüpfungen die Teilmengeneigenschaft: $\mathfrak{A}_1 * \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 * \mathfrak{B}_2$. Bezeichnen wir weiter $d(X) := x^2 - x^1$ als Durchmesser des Intervalles $X = [x^1; x^2]$, so nennen wir entsprechend die Punktmatrix $d(\mathfrak{X}) := (d(X_{ij}))$ Durchmessermatrix der Intervallmatrix $\mathfrak{X}$. Mit $\boldsymbol{\mathfrak{Y}} \in M(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{X} \in M(I(\mathbb{R}))$ gilt: $d(\mathfrak{X} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{Y}}) = d(\mathfrak{X}) \cdot |\boldsymbol{\mathfrak{Y}}|$ wobei $|\boldsymbol{\mathfrak{Y}}|$ diejenige Punktmatrix bezeichnet, die man bei elementweiser Betragsbildung erhält.

3. Der Mittelpunktsoperator

Gegeben sei eine Intervallmatrix $\mathfrak{X} = (X_{ij})$ aus der Menge $M(I(\mathbb{R}))$ mit $X_{ij} = [x_{ij}^1, x_{ij}^2]$.

Definition: Die Abbildung $m: M(I(\mathbb{R})) \ni \mathfrak{X} \to m(\mathfrak{X}) \in M(\mathbb{R})$ mit $m(\mathfrak{X})_{ij} := (x_{ij}^1 + x_{ij}^2)/2$ heißt Mittelpunktsoperator.

Speziell folgt für Punktmatrizen: $m(\boldsymbol{\mathfrak{A}}) = \boldsymbol{\mathfrak{A}}$. Im folgenden werden einige Eigenschaften des Operators bei Anwendung auf das Ergebnis von Verknüpfungen von Intervallmatrizen angegeben.

a) m ist ein stetiger Operator

b) $m(\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}) = m(\mathfrak{X}) + m(\mathfrak{Y})$ für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in M(I(\mathbb{R}))$

c) $m(\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}) = m(\mathfrak{X}) - m(\mathfrak{Y})$ für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in M(I(\mathbb{R}))$

d) $m(\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{X}) = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot m(\mathfrak{X}), m(\mathfrak{X} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{A}}) = m(\mathfrak{X}) \cdot \boldsymbol{\mathfrak{A}}$ für $\boldsymbol{\mathfrak{A}} \in M(\mathbb{R})$, $\mathfrak{X} \in M(I(\mathbb{R}))$

Beweis: a) ist unmittelbar einzusehen;

b) wir betrachten die Komponente $m(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})_{ij}$:
$m(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})_{ij} = m([x_{ij}^1 + y_{ij}^1, x_{ij}^2 + y_{ij}^2]) =$
$= (x_{ij}^1 + y_{ij}^1 + x_{ij}^2 + y_{ij}^2)/2 =$
$= (x_{ij}^1 + x_{ij}^2)/2 + (y_{ij}^1 + y_{ij}^2)/2 = m(\mathfrak{X})_{ij} + m(\mathfrak{Y})_{ij}$;

c) folgt analog wie b) unter expliziter Verwendung der Rechenregeln für die Subtraktion von Intervallmatrizen;

d) wir betrachten hier wieder die Komponente $m(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X})_{ij}$; dann folgt unter Verwendung von b)

$$m(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X})_{ij} = m(\sum_k a_{ik}\cdot X_{kj}) = \sum_k m(a_{ik}\cdot X_{kj}) =$$
$$\sum_k 1/2\cdot(a_{ik}\cdot x_{kj}^1 + a_{ik}\cdot x_{kj}^2) =$$
$$= \sum_k a_{ik}\cdot 1/2\cdot(x_{kj}^1 + x_{kj}^2) = (\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}))_{ij}$$

Mit Hilfe der angegebenen Regeln lassen sich die Beweise der nachfolgenden Sätze übersichtlich durchführen.

4. Verfahren

Satz 1: Gegeben sei die nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{A}$ und eine Intervallmatrix $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}^{-1}\in\mathfrak{B}$. Dann gelten für das Iterationsverfahren:

$$\mathfrak{X}_{n+1} := m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}),\ n \geq 0 \tag{1}$$

und beliebiger Matrix $m(\mathfrak{X}_0)$ aus $M(\mathbb{R})$ die Aussagen:

I. jedes Glied der Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ enthält $\mathfrak{A}^{-1}$;

II. die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ konvergiert gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ genau dann, wenn der Spektralradius $\varrho(\mathfrak{E} - m(\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{A})$ kleiner als 1 ist.

Beweis: zu I. Wegen $\mathfrak{A}^{-1}\in\mathfrak{B}$ gilt aufgrund der Teilmengeneigenschaft für beliebiges $m(\mathfrak{X}_n)$:

$$\mathfrak{A}^{-1} = m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{A}^{-1}\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}) \in m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{B}\cdot$$
$$\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}) = \mathfrak{X}_{n+1}.$$

Zu II. Unter Anwendung der für den Mittelpunktsoperator m hergeleiteten Rechenregeln gilt für die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$:

$$m(\mathfrak{X}_{n+1}) = m(m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{A}\, m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E})) =$$
$$= (\mathfrak{E} - m(\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{A})\cdot m(\mathfrak{X}_n) + m(\mathfrak{B}) \tag{2}$$

Gilt nun $\varrho(\mathfrak{E} - m(\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{A}) < 1$, dann konvergiert die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$. Für die Folge der Durchmessermatrizen gilt:

$$d(\mathfrak{X}_{n+1}) = d(\mathfrak{B})\cdot|\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}| \text{ d. f. } d(\mathfrak{X}_n)\to\mathfrak{O}.$$

Damit konvergiert die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ gegen die Inverse $\mathfrak{A}^{-1}$. Konvergiert andererseits die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$, dann konvergiert notwendig die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ und aus (2) folgt dann notwendig $\varrho(\mathfrak{E} - m(\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{A}) < 1$.

Bemerkung 1: Wie dem Beweis des Satzes zu entnehmen ist, gilt II. für das Iterationsverfahren (1) auch für eine Intervallmatrix $\mathfrak{B}$, welche nicht notwendig $\mathfrak{A}^{-1}$ enthält. In diesem Fall bildet jedoch $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ i. A. keine Folge von Einschließungsmengen für $\mathfrak{A}^{-1}$ mehr. Deshalb ist dieser Fall praktisch kaum von Interesse.

Bemerkung 2: Obwohl das Iterationsverfahren (1) gleichzeitig obere und untere Schranken für die Inverse $\mathfrak{A}^{-1}$ liefert, ist die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung die gleiche wie für das bekannte Verfahren zur Bestimmung von $\mathfrak{A}^{-1}$: $\mathfrak{Y}_{n+1} := \mathfrak{Y}_n - m(\mathfrak{B})\cdot(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{Y}_n - \mathfrak{E})$ für $n\geq 0$ und $\mathfrak{Y}_0\in M(\mathbb{R})$. Im Gegensatz dazu liefert z. B. die intervallmäßige Durchführung des Gesamtschrittverfahrens zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems wesentlich schärfere Konvergenzbedingungen als bei Iteration mit Punktvektoren ([6]).

Satz 2: Gegeben sei die nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{A}$ und eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\mathfrak{A}^{-1}\in\mathfrak{X}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren:

$$\mathfrak{X}_{n+1} := m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{X}_n\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}),\ n\geq 0 \tag{3}$$

die Aussagen:

I. jedes Glied der Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ enthält $\mathfrak{A}^{-1}$;

II. die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ konvergiert gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ genau dann, wenn der Spektralradius $\varrho(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_0))$ kleiner als 1 ist.

Beweis: Zu I. Dies ist nach Voraussetzung für $n = 0$ richtig; gilt $\mathfrak{A}^{-1}\in\mathfrak{X}_n$, dann folgt unmittelbar:

$$\mathfrak{A}^{-1} = m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{A}^{-1}\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}) \in$$
$$\in m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{X}_n\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}) = \mathfrak{X}_{n+1}$$

Zu II. Unter Anwendung der Rechenregeln für den Mittelpunktsoperator m gilt für die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$:

$$m(\mathfrak{X}_{n+1}) = m(\mathfrak{X}_n) - m(\mathfrak{X}_n)\cdot(\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}) =$$
$$= m(\mathfrak{X}_n)\cdot(2\cdot\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n)) \tag{4}$$

Diese Iterationsvorschrift ist als *Schulz*sches Verfahren ([4]) bekannt und konvergiert genau dann, wenn $\varrho(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$ gilt. Setzen wir nun bei Iteration (3) $\varrho(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$ voraus, so konvergiert also die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$. Für die Folge der Durchmessermatrizen gilt die Gleichung:

$$d(\mathfrak{X}_{n+1}) = d(\mathfrak{X}_n)\cdot|\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}|.$$

Da $|\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}|$ gegen die Nullmatrix $\mathfrak{O}$ konvergiert, folgt damit: $d(\mathfrak{X}_n)\to\mathfrak{O}$. Somit konvergiert auch die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$. Konvergiert umgekehrt die Folge $(\mathfrak{X}_n)^\infty{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$, dann konvergiert auch notwendig die Folge der Mittelpunktsmatrizen $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ und wegen (4) folgt dann notwendig $\varrho(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_0)) < 1$.

Bemerkung 3: Analog wie in Bemerkung 1 gilt Satz 2II auch für Intervallmatrizen $\mathfrak{X}_0$, die nicht notwendig $\mathfrak{A}^{-1}$ enthalten.

In (2) bzw. (4) konvergiert bekanntlich die Folge $(m(\mathfrak{X}_n))^\infty{}_{n=1}$ linear bzw. quadratisch gegen die Inverse $\mathfrak{A}^{-1}$. Eine entsprechende Aussage für (1) bzw. (3) liefert der folgende

Satz 3: Sei $\|\cdot\|$ eine multiplikative und monotone Matrixnorm, dann gilt für die Durchmessermatrizen der Iterierten von (1) bzw. (3):

$$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\| \leq C_1\cdot\|d(\mathfrak{X}_n)\| \text{ mit } C_1 = 1/2\cdot\|\mathfrak{A}\|\cdot\|d(\mathfrak{B})\|$$
bzw. $$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\| \leq C_2\cdot\|d(\mathfrak{X}_n)\|^2 \text{ mit } C_2 = 1/2\cdot\|\mathfrak{A}\|.$$

Beweis: Es gilt: $d(\mathfrak{X}_{n+1}) = d(\mathfrak{B})\cdot|\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{E}| = d(\mathfrak{B})\cdot$ $\cdot|\mathfrak{A}\cdot m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}^{-1}| = d(\mathfrak{B})\cdot|\mathfrak{A}\cdot(m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{A}^{-1})|$; mit Hilfe der Monotonie und Multiplikativität der Norm folgt daraus:

$$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\| \leq \|d(\mathfrak{B})\|\cdot\|\mathfrak{A}\|\cdot\|m(\mathfrak{X}_n) - \mathfrak{A}^{-1}\| \leq$$
$$\leq 1/2\cdot\|d(\mathfrak{B})\|\cdot\|\mathfrak{A}\|\cdot\|d(\mathfrak{X}_n)\|$$

Die zweite Abschätzung folgt analog.

5. Beispiel

Zur Erläuterung bestimmen wir die Inverse der schon in [4] betrachteten Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ mit } m(\widetilde{\mathfrak{X}_0}) = \begin{pmatrix} -0{,}9 & 0 & 1{,}8 \\ 3{,}7 & 1 & -2 \\ 2{,}8 & 1{,}1 & -1{,}1 \end{pmatrix}$$

ist $\varrho(\mathfrak{A} \cdot m(\widetilde{\mathfrak{X}_0}) - \mathfrak{E}) < 1$ und $\varrho(\mathfrak{E} - m(\widetilde{\mathfrak{X}_0}) \cdot \mathfrak{A}) < 1$, so daß die in Satz 1 und Satz 2 angegebenen Iterationsverfahren konvergieren. Mit Hilfe einer Normabschätzung läßt sich leicht eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\mathfrak{A}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$ und $m(\mathfrak{X}_0) = m(\widetilde{\mathfrak{X}_0})$ angeben. Aus Demonstrationsgründen addieren wir hier zu allen Elementen der Matrix $m(\widetilde{\mathfrak{X}_0})$ das Intervall $[-D, D]$ (d. h. die Elemente der Matrix $d(\widetilde{\mathfrak{X}_0})$ sind alle gleich $2 \cdot D$).

In der Tabelle sind die maximalen Zeilensummen für aufeinanderfolgende Durchmessermatrizen $d(\mathfrak{X}_n)$ für verschiedene Werte von D bei Verfahren (3) angegeben.

Iterations-schritt	$D = 10$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1	$0{,}28_{10}2$	$0{,}28_{10}3$	$0{,}28_{10}4$	$0{,}28_{10}5$	$0{,}28_{10}6$	$0{,}28_{10}7$
2	$0{,}10_{10}2$	$0{,}10_{10}3$	$0{,}10_{10}4$	$0{,}10_{10}5$	$0{,}10_{10}6$	$0{,}10_{10}7$
3	$0{,}14_{10}1$	$0{,}14_{10}2$	$0{,}14_{10}3$	$0{,}14_{10}4$	$0{,}14_{10}5$	$0{,}14_{10}6$
4	$0{,}26_{10}-1$	$0{,}26$	$0{,}26_{10}1$	$0{,}26_{10}2$	$0{,}26_{10}3$	$0{,}25_{10}4$
5	$0{,}82_{10}-5$	$0{,}80_{10}-4$	$0{,}80_{10}-3$	$0{,}80_{10}-2$	$0{,}80_{10}-1$	$0{,}74$
6	$0{,}19_{10}-6$	$0{,}18_{10}-6$	$0{,}13_{10}-6$	$0{,}17_{10}-6$	$0{,}13_{10}-6$	$0{,}15_{10}-6$
7	$0{,}19_{10}-6$	$0{,}15_{10}-6$	$0{,}76_{10}-7$	$0{,}18_{10}-6$	$0{,}50_{10}-6$	$0{,}11_{10}-6$
8	$0{,}16_{10}-6$	$0{,}16_{10}-6$	$0{,}35_{10}-7$	$0{,}17_{10}-6$	$0{,}54_{10}-7$	$0{,}85_{10}-7$

Die Beispiele wurden an der elektronischen Rechenanlage ZUSE Z23 des Rechenzentrums der Universität Karlsruhe gerechnet.

Praktisch wird man die in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren so anwenden, daß man sich zunächst — etwa mit Hilfe des *Gauß*-Algorithmus — eine Näherung $m(\widetilde{\mathfrak{X}_0})$ für die Inverse $\mathfrak{A}^{-1}$ der gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ verschafft. Gilt für eine Norm z. B. $\|\mathfrak{A} \cdot m(\widetilde{\mathfrak{X}_0}) - \mathfrak{E}\| < 1$, so ist auch $\varrho(\mathfrak{A} \cdot m(\widetilde{\mathfrak{X}_0}) - \mathfrak{E}) < 1$. Mit Hilfe einer Normabschätzung läßt sich dann einfach eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $\mathfrak{A}^{-1} \in \mathfrak{X}_0$ und $m(\mathfrak{X}_0) = m(\widetilde{\mathfrak{X}_0})$ angeben, was die Konvergenz der Folge $(\mathfrak{X}_n)^{\infty}{}_{n=1}$ gegen $\mathfrak{A}^{-1}$ und die Einschließung $\mathfrak{A}^{-1} \in \mathfrak{X}_n$ für alle n sichert. Wegen seiner quadratischen Konvergenz gemäß Satz 3 ist dabei das Iterationsverfahren (3) dem Verfahren (1) vorzuziehen.

Literatur

[1] *Apostolatos, N.* und *Kulisch, U.*, Grundzüge einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen. Elektron. Rechenanl. 10 (1968), H. 2, 73—83.

[2] *Kulisch, U.*, Editorial zu Heft 5 (1968), 203—204, Elektron. Rechenanl.

[3] *Christ, H.*, Realisierung einer Maschinenintervallarithmetik mit beliebigen Algol-60 Compilern. Elektron. Rechenanl. 10 (1968), H. 5, 217—222.

[4] *Schulz, G.*, Iterative Berechnung der reziproken Matrix. ZAMM 13, 57—59, (1933).

[5] *Dück, W.*, Fehlerabschätzungen für das Iterationsverfahren von *Schulz* zur Berechnung der Inversen einer Matrix. ZAMM 40, 192—194 (1960).

[6] *Kulisch, U.*, Grundzüge der Intervallrechnung. Überblicke 2, 51—98, Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.