ZAMM 50, 455–465 (1970)

Über Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten einer komplexen Intervallarithmetik*)

Von G. Alefeld

In der folgenden Arbeit wird eine Intervallrechnung über den komplexen Zahlen eingeführt. Im ersten Abschnitt werden die Eigenschaften der eingeführten Arithmetik untersucht und erläutert. Anschließend werden verschiedene komplexe Matrizenmengen betrachtet und Verknüpfungen in ihnen definiert. Mit diesen Hilfsmitteln wird im letzten Abschnitt die Aufgabe formuliert, die Lösungsmenge eines komplexen Gleichungssystems, dessen Koeffizienten variabel sind, in Intervalle einzuschließen. Die Lösung dieser Aufgabe wird in einer späteren Arbeit behandelt.

Over the field of complex numbers an interval arithmetic is defined. In the first section of this paper the properties of the arithmetic are discussed and explained. Subsequently we consider various sets of complex matrices. By this means it is easy to formulate the problem of solving a system of simultaneous linear or nonlinear equations, the coefficients of which are known to vary in given complex intervals. The solution of this problem is given in a following paper.

В предлагаемой работе распространяется метод интервального расчёта на комплексные числа. В первом разделе исследуются и излагаются свойства введенной арифметики. Затем рассматриваются разные формы комплексных множеств матриц и определяются существующие между ними связи. С помощью этих вспомогательных средств формулируется в последнем разделе задача, заключающаяся в запирании в интервалы множеств решений комплексной системы уравнений с переменными коэффициентами. Решение этой задачи будет изложено в позднейшей работе.

I. Grundzüge des Rechnens mit komplexen Zahlenmengen

1. Grundlegende Begriffe und Eigenschaften der Potenzmenge der komplexen Zahlen

Im folgenden sollen „komplexe Intervalle" eingeführt und Verknüpfungen zwischen solchen definiert werden. Außerdem wird die Struktur dieser Menge untersucht. Dabei wird das Rechnen mit reellen und komplexen Zahlenmengen vorausgesetzt. Es sollen daher hier kurz die wichtigsten Eigenschaften des Rechnens mit solchen Mengen aufgeführt werden (Siehe [4]).

Definition 1: Eine reelle oder komplexe Zahlenmenge A bezeichnen wir als (reellen oder komplexen) „*Komplex*".

Es ist $A \in P(\mathsf{R})$ bzw. $A \in P(\mathsf{C})$ (Potenzmenge der reellen bzw. komplexen Zahlen) und $P(\mathsf{R}) \subset P(\mathsf{C})$. In der Menge der reellen und komplexen Zahlen sind vier Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) erklärt. Wir erklären die entsprechenden Operationen in $P(\mathsf{C})$ (und damit in $P(\mathsf{R})$) durch die

Definition 2: Es seien A und B aus $P(\mathsf{C})$. Dann verstehen wir unter $A * B$ die Zahlenmenge

$$A * B := \{z = a * b \mid a \in A \wedge b \in B\} \in P(\mathsf{C}) \tag{1}$$

(dabei bezeichnet $*$ eine der Verknüpfungen $+, -, \cdot, :$).

Aus dieser Definition folgt, daß die Komplexe der Form $\{a\} \in P(\mathsf{C})$ isomorph sind den komplexen Zahlen $a \in \mathsf{C}$. Wir schreiben dafür einfach $\{a\} = a$. Damit gilt $\mathsf{C} \in P(\mathsf{C})$. Entsprechend erhält man $\mathsf{R} \in P(\mathsf{R})$. Die Menge C bildet bekanntlich einen Körper. Für die Menge $P(\mathsf{C})$ hingegen ist dies nicht der Fall. Es gelten jedoch die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

1. Addition und Multiplikation sind sowohl kommutativ als auch assoziativ.
2. $\{0\}$ ist das eindeutig bestimmte neutrale Element der Addition.
3. $\{1\}$ ist das eindeutig bestimmte neutrale Element der Multiplikation.
4. Inverse Elemente existieren nur für die Elemente $\{c\} = c \in \mathsf{C}$.
5. Es gilt das Subdistributive Gesetz

   $$A\,(B + C) \subseteqq A\,B + A\,C\,.$$

   Für $A = \{a\} = a$ gilt

   $$a\,(B + C) = a\,B + a\,C$$

6. Es gilt die Teilmengeneigenschaft, d. h., ist $A_i \subseteqq B_i$, $i = 1, 2$, so gilt $A_1 * A_2 \subseteqq B_1 * B_2$ für alle eingeführten Rechenoperationen.

*) Auszug aus dem ersten Kapitel der von der Fakultät für Naturwissenschaften I der Universität Karlsruhe genehmigten Dissertation des Verfassers. (Referent: Prof. Dr. U. Kulisch; Korreferent: Prof. Dr. K. Nickel).

Eine Teilmenge von $P(\mathsf{R})$ sind die *reellen abgeschlossenen Intervalle* $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, ... Wir bezeichnen diese Menge mit $I(\mathsf{R})$. Für diese Menge läßt sich die Definition 2 in explizite Regeln für die vier Grundrechenoperationen umschreiben:

1. $A + B = [a + c, b + d]$.
2. $A - B = [a - d, b - c]$.
3. $A \cdot B = [\min(a\,c, a\,d, b\,c, b\,d), \max(a\,c, a\,d, b\,c, b\,d)]$.
4. $A : B = [a, b] \cdot [1/d, 1/c] \quad (0 \notin B)$.

Die Menge $I(\mathsf{R})$ ist also bezüglich der vier Grundrechenoperationen abgeschlossen.

2. Die Mengen $I(\mathsf{C})$ und $T(\mathsf{C})$

Komplexe aus $P(\mathsf{C})$ lassen sich nicht einfach beschreiben. Bei praktischen Problemen ist es meistens einfacher, die Lösungsmenge eines gegebenen Problems durch komplexe Zahlenmengen zu beschreiben, die von achsenparallelen Geraden, d. h. von Rechtecken begrenzt werden. Wir geben daher folgende

Definition 3: a) Unter einem *komplexen Intervall* A verstehen wir die Menge aller komplexen Zahlen

$$A = \{z = x_1 + i\,x_2 \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\}\,, \qquad A_1, A_2 \in I(\mathsf{R})\,.$$

b) Sind A_1 und A_2 Komplexe aus $P(\mathsf{R})$, so heißt die Menge

$$A = \{z = x_1 + i\,x_2 \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} \quad T\text{-}Komplex$$

(siehe Bild 1).

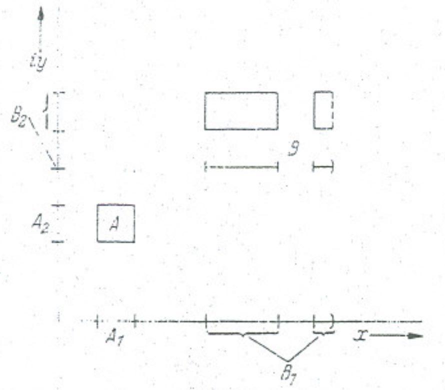

Bild 1

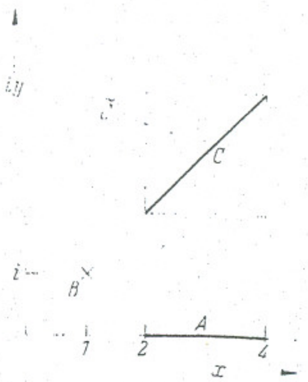

Bild 2

Es gilt: Jedes komplexe Intervall ist T-Komplex. Die Menge der komplexen Intervalle bezeichnen wir mit $I(\mathsf{C})$, die Menge der T-Komplexe mit $T(\mathsf{C})$. Es gilt: $I(\mathsf{C}) \subset T(\mathsf{C}) \subset P(\mathsf{C})$. Die komplexen Intervalle sind eine direkte Verallgemeinerung der reellen Intervalle. Da die komplexen Intervalle und die T-Komplexe Teilmengen von $P(\mathsf{C})$ sind, ist für Elemente aus diesen Mengen nach Definition 2 eine Arithmetik erklärt. Diese hat jedoch den entscheidenden Nachteil, daß die Mengen $I(\mathsf{C})$ und $T(\mathsf{C})$ bezüglich dieser Arithmetik nicht abgeschlossen sind.

Wir erläutern dies an einem einfachen Beispiel: Es sei (s. Bild 2)

$$A = \{z = x_1 + i\,x_2 \mid x_1 \in [2, 4]\,,\ x_2 = 0\} \in I(\mathsf{C})\,,$$
$$B = \{z = x_1 + i\,x_2 \mid x_1 = 1\,,\ x_2 = 1\} \in I(\mathsf{C})\,.$$

Nach Definition 2 besteht dann das Produkt $A \cdot B$ aus allen komplexen Zahlen, die auf der im Bild 2 eingezeichneten Strecke C liegen. C ist nicht aus $I(\mathsf{C})$ oder $T(\mathsf{C})$! Es gilt: C ist aus $P(\mathsf{C})$.

Bemerkung: Es liegt nahe, ähnlich wie in der Funktionentheorie üblich, die Menge aller komplexen Zahlen der Form

$$z = a + r\,e^{i\varphi}\,, \qquad 0 \leqq r \leqq R\,, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,, \qquad a \in \mathsf{C}\,,$$

als komplexe Intervalle einzuführen. Verknüpft man zwei solche Intervalle nach Definition 2, so läßt sich das Ergebnis im allgemeinen nicht in der Form $z = a + r\,e^{i\varphi}$ beschreiben. Die oben angeführte Schwierigkeit läßt sich also dadurch nicht beheben. Im folgenden soll mit Hilfe reeller Komplexe für die durch Definition 2 gegebene Arithmetik eine Ersatzarithmetik in $T(\mathsf{C})$ eingeführt werden. Dabei zeigt sich, daß die Einführung von komplexen Intervallen und T-Komplexen als rechteckig begrenzte Zahlenmengen vorteilhaft ist.

Wollen wir in unserem obigem Beispiel die Menge C durch ein Element aus $I(\mathsf{C})$ oder $T(\mathsf{C})$ möglichst gut beschreiben, so kommt dafür das kleinste C umschriebene Element $\widetilde{C}$ aus $I(\mathsf{C})$ in Frage. Wir geben jetzt allgemein die

Definition 4: Unter der *T-Hülle* eines Elementes $A \in P(\mathsf{C})$ verstehen wir den Durchschnitt aller Elemente aus $T(\mathsf{C})$, welche A enthalten. Wir schreiben dafür einfach $\widetilde{A}$.

Es gilt für alle $A \in P(\mathbf{C})$: $A \subseteq \widetilde{A}$. Ist $A \in T(\mathbf{C})$, so gilt $\widetilde{A} = A$.

Im folgenden soll unser Ziel sein, die durch Definition 2 festgelegte Verknüpfung von Elementen aus $T(\mathbf{C})$ durch eine Ersatzarithmetik zu approximieren. Unser Ziel ist dabei natürlich die T-Hülle $\widetilde{A * B}$ durch eine möglichst kleine Obermenge aus $T(\mathbf{C})$ zu beschreiben.

Für die Elemente $A = \{z = x_1 + i\, x_2 \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} \in T(\mathbf{C})$, $A_1, A_2 \in P(\mathbf{R})$, führen wir jetzt die Schreibweise $A = A_1 + i\, A_2$ ein und bezeichnen A_1 bzw. A_2 als Real- bzw. Imaginärteil von A. Damit geben wir die folgende

Definition 5: Zwei Elemente $A = A_1 + i\, A_2$ und $B = B_1 + i\, B_2$ aus $T(\mathbf{C})$ heißen gleich, i. Z. $A = B$, genau dann, wenn gilt

$$A_1 = B_1 \quad \text{und} \quad A_2 = B_2 .$$

Definition 6: Seien $A = A_1 + i\, A_2$ und $B = B_1 + i\, B_2$ Elemente aus $T(\mathbf{C})$. Dann verstehen wir unter Summe, Differenz, Produkt und Quotient von A und B die folgenden Elemente aus $T(\mathbf{C})$:

$$A \boxed{+} B = (A_1 + B_1) + i\,(A_2 + B_2)\,,$$
$$A \boxed{-} B = (A_1 - B_1) + i\,(A_2 - B_2)\,,$$
$$A \boxed{\cdot} B = (A_1\, B_1 - A_2\, B_2) + i\,(A_1\, B_2 + A_2\, B_1)\,,$$
$$A \boxed{:} B = (A_1\, B_1 + A_2\, B_2) : (B_1^2 + B_2^2) + i\,(A_2\, B_1 - A_1\, B_2) : (B_1^2 + B_2^2)\,.$$

Bei der Definition der Division ist vorausgesetzt, daß 0 nicht aus $B_1^2 + B_2^2$ ist. Faßt man die Potenzen B_1^2 und B_2^2 auf als $B_1^2 = B_1 \cdot B_1$ bzw. $B_2^2 = B_2 \cdot B_2$, wobei die Produkte nach Definition 2 zu bilden sind, so ist es möglich, daß $0 \in B_1^2 + B_2^2$ gilt, obwohl $0 \notin B = B_1 + i\, B_2$, d. h., die Division ist nicht definiert.

Wir betrachten dazu das einfache

Beispiel: Sei $B = [-1, 1] + i\,[1, 3]$. Dann ist

$$B_1 \cdot B_1 + B_2 \cdot B_2 = [-1, 1] + [1, 9] = [0, 10] \ni 0.$$

Wir vereinbaren daher, daß der Ausdruck $B_1^2 + B_2^2$ nach der Vorschrift

$$B_1^2 + B_2^2 := \{b_1^2 \mid b_1 \in B_1\} + \{b_2^2 \mid b_2 \in B_2\}$$

zu berechnen ist. In unserem Beispiel erhalten wir damit

$$B_1^2 + B_2^2 = [0, 1] + [1, 9] = [1, 10]\,.$$

Durch die Definition 6 sind die vier Grundrechenoperationen $\boxed{*}$ für Elemente aus $T(\mathbf{C})$ auf die Grundrechenoperationen $*$ für reelle Komplexe zurückgeführt. Die komplexen Zahlen $a = a_1 + i\, a_2$ sind isomorph bezüglich der eingeführten Verknüpfungen den Elementen der Form $A = [a_1, a_1] + i\,[a_2, a_2]$. Wir können daher diese beiden Mengen miteinander identifizieren und schreiben im folgenden kurz $A = [a_1, a_1] + i\,[a_2, a_2] = a_1 + i\, a_2 = a$. Es gilt damit also $\mathbf{C} \subset T(\mathbf{C})$.

Es soll nun die der Menge $T(\mathbf{C})$ durch die Definition der Grundrechenoperationen $\boxed{*}$ auferlegte Struktur untersucht werden:

1. Die Addition und Multiplikation von Elementen aus $T(\mathbf{C})$ sind kommutativ:

$$A \boxed{+} B = B \boxed{+} A\,, \qquad A \boxed{\cdot} B = B \boxed{\cdot} A\,.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen dieser Verknüpfungen und der Tatsache, daß für reelle Komplexe diese Gesetze richtig sind.

2. Die Addition ist assoziativ:

$$A \boxed{+} (B \boxed{+} C) = (A \boxed{+} B) \boxed{+} C\,.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Definition der Addition und der Tatsache, daß dieses Gesetz für reelle Komplexe richtig ist.

3. Im Gegensatz zur Verknüpfung „·" nach Definition 2 ist die Multiplikation $\boxed{\cdot}$ nicht assoziativ. Jedoch gilt stets

$$\left.\begin{matrix}(A \boxed{\cdot} B) \boxed{\cdot} C \\ A \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} C)\end{matrix}\right\} \subseteq m(A, B, C)\,.$$

Dabei ist

$$m(A, B, C) := A_1\, B_1\, C_1 - A_1\, B_2\, C_2 - A_2\, B_1\, C_2 - A_2\, B_2\, C_1 + i(A_1\, B_1\, C_2 + A_1\, B_2\, C_1 +$$
$$+ A_2\, B_1\, C_1 - A_2\, B_2\, C_2)\,.$$

Wir bezeichnen diese Eigenschaft als *Subassoziativität.*

Beweis: Es seien $A = A_1 + i\, A_1$, $B = B_1 + i\, B_2$ und $C = C_1 + i\, C_2$ aus $T(\mathbf{C})$. Dann ist

$$(A \boxed{\cdot} B) \boxed{\cdot} C = C_1\,(A_1\, B_1 - A_2\, B_2) - C_2\,(A_1\, B_2 + A_2\, B_1) + i\,\{C_1\,(A_1\, B_2 + A_2\, B_1) + C_2\,(A_1\, B_1 - A_2\, B_2)\}\,.$$
$$A \boxed{\cdot} (B \boxed{\cdot} C) = A_1\,(B_1\, C_1 - B_2\, C_2) - A_2\,(B_2\, C_1 + B_1\, C_2) + i\,\{A_1\,(B_2\, C_1 + B_1\, C_2) + A_2\,(B_1\, C_1 - B_2\, C_2)\}\,.$$

Daraus ist ersichtlich, daß im allgemeinen nicht Gleichheit zwischen diesen beiden Ausdrücken besteht. Auf Grund des Subdistributiven Gesetzes und der Teilmengeneigenschaft für reelle Komplexe folgt die Behauptung des Subassoziativen Gesetzes.

Ist $C = c = c_1 + i\,c_2$ so gilt

(a) $\quad (A \boxdot B) \boxdot c = m(A, B, c)$.

Ist $A = a = a_1 + i\,a_2$ so gilt

(b) $\quad a \boxdot (B \boxdot C) = m(a, B, C)$.

Ist gleichzeitig $A = a_1 + i\,a_2$ und $C = c_1 + i\,c_2$ so gilt

(c) $\quad (a \boxdot B) \boxdot c = a \boxdot (B \boxdot c) = m(a, B, c)$.

Wir bezeichnen die Eigenschaften (a), (b) und (c) als *Semiassoziative Gesetze*.

4. Es gilt das *Subdistributive Gesetz*:

$$A \boxdot (B \boxplus C) \subseteq A \boxdot B \boxplus A \boxdot C\,.$$

Beweis: Seien $A = A_1 + i\,A_2$, $B = B_1 + i\,B_2$ und $C = C_1 + i\,C_2$ aus $T(\mathbf{C})$. Dann ist

$$\begin{aligned} A \boxdot (B \boxplus C) &= A_1\,(B_1 + C_1) - A_2\,(B_2 + C_2) + i\,\{A_2\,(B_1 + C_1) + A_1\,(B_2 + C_2)\} \\ &\subseteq A_1\,B_1 + A_1\,C_1 - A_2\,B_2 - A_2\,C_2 + i\,\{A_2\,B_1 + A_2\,C_1 + A_1\,B_2 + A_1\,C_2\} \\ &= A \boxdot B \boxplus A \boxdot C\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Das $\subseteq$-Zeichen gilt auf Grund des Subdistributiven Gesetzes und der Teilmengeneigenschaft für reelle Komplexe. Ist $A = a$, so gilt das Gleichheitszeichen:

$$a \boxdot (B \boxplus C) = a \boxdot B \boxplus a \boxdot C\,.$$

Wir bezeichnen diese Eigenschaft als *Semidistributives Gesetz*. Der Beweis folgt aus (3) mit der Tatsache, daß dieses Gesetz für reelle Komplexe richtig ist.

5. Die Zahl 0 ist das eindeutig bestimmte neutrale Element der Addition, d. h.,

$$A \boxplus N = N \boxplus A = A\,,$$

gilt genau dann, wenn $N = 0$ ist.

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen gilt auf Grund des kommutativen Gesetzes der Addition. Daß $N = 0$ die Gleichung $A \boxplus N = A$ erfüllt, ist sofort ersichtlich. Die Eindeutigkeit folgt durch einen einfachen Widerspruchsbeweis.

6. Die Zahl 1 ist das eindeutig bestimmte neutrale Element der Multiplikation, d. h.,

$$A \boxdot E = E \boxdot A = A\,,$$

gilt genau dann, wenn $E = 1$ ist.

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen gilt auf Grund des kommutativen Gesetzes der Multiplikation. Daß $E = 1$ die Gleichung $A \boxdot E = A$ erfüllt, folgt durch Nachrechnen. Die Eindeutigkeit folgt durch einen Widerspruchsbeweis.

7. Inverse Elemente bezüglich der Addition existieren nur für die Elemente $A = a \in \mathbf{C} \subset T(\mathbf{C})$.

Beweis: Es sei $A = A_1 + i\,A_2$ und $B = B_1 + i\,B_2$. Ist $A - B = 0$, so folgt nach Definition 5 $A_1 - B_1 = 0$ und $A_2 - B_2 = 0$. Da für reelle Komplexe Inverse der Addition nur für die Elemente aus $\mathbf{R} \subset P(\mathbf{R})$ existieren, folgt $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$, also $A = a = a_1 + i\,a_2$ und damit $B = a$.

8. Inverse Elemente der Multiplikation existieren nur für die Elemente $A = a = a_1 + i\,a_2 \neq 0$ aus $\mathbf{C}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

a) Sind X und Y reelle Komplexe, so gilt $X - Y = z \in \mathbf{R}$ genau dann, wenn $X = x$ und $Y = y$ ist.

Beweis: Ist $X = x$ und $Y = y$, so ist $X - Y = x - y = z \in \mathbf{R}$. Sei nun $X - Y = \{z = x - y \mid x \in X \wedge y \in Y\} = z$. Dann ist für festes $x_1 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$: $z = x_1 - y_1$ und $z = x_1 - y_2$. Daraus folgt $y_1 = y_2$, d. h., Y besteht nur aus einem einzigen Element y. Mit $x_1, x_2 \in X$ gilt dann $z = x_1 - y$ und $z = x_2 - y$. Daraus folgt $x_1 = x_2$, d. h., X besteht nur aus einem einzigen Element x.

b) Sind X und Y reelle Komplexe, so gilt $X \cdot Y = z \in \mathbf{R}$ genau dann, wenn $X = x$ und $Y = y$ ist $(z \neq 0)$.

Der Beweis ergibt sich wie unter a).

Wir beweisen jetzt die Behauptung 8.: Es seien $A = A_1 + i\,A_2$ und $B = B_1 + i\,B_2$ aus $T(\mathbf{C})$. Dann folgt nach Definition 5 aus der Gleichung

$$A \boxdot B = A_1\,B_1 - A_2\,B_2 + i\,(A_1\,B_2 + A_1\,B_2) = 1\,,$$

$$A_1\,B_1 - A_2\,B_2 = 1 \quad \text{und} \quad A_1\,B_2 + A_2\,B_1 = 0\,.$$

Auf Grund der Aussagen a) und b) folgt $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$, $B_1 = b_1$ und $B_2 = b_2$, d. h. $A = a$ und $B = 1/a$, falls $a \neq 0$ ist.

9. Für die Grundrechenoperationen $\boxdot$ für Elemente aus $T(\mathbf{C})$ gilt die *Teilmengeneigenschaft*:

$$\text{Aus } A_i \subseteq B_i\,, \qquad i = 1, 2, \qquad \text{folgt} \qquad A_1 \boxast A_2 \subseteq B_1 \boxast B_2\,.$$

Der Beweis ergibt sich unter Verwendung der Tatsache, daß dieses Gesetz für reelle Komplexe richtig ist.

Durch vollständige Induktion beweist man, daß diese Eigenschaft auch für rationale Ausdrücke, die mit Elementen aus $T(\mathbf{C})$ gebildet werden und in denen die Reihenfolge der Operationen eindeutig durch Klammerstruktur festgelegt ist, Gültigkeit besitzt.

Auf Grund der aufgezeigten Struktur der Menge $T(\mathsf{C})$ mit den Verknüpfungen $\boxed{*}$ folgt, daß $T(\mathsf{C})$ keinen Körper bildet. Bei der Ausführung von mehreren Rechenoperationen muß also eindeutig die Reihenfolge, in der die Rechenoperationen auszuführen sind, festgelegt sein.

Bemerkung: Bei der Einführung der komplexen Zahlen C als geordnete Paare (x, y) von reellen Zahlen x und y zeigt sich, daß die reelle Zahl x bezüglich der eingeführten Verknüpfungen isomorph ist dem Paar $(x, 0)$. Man identifiziert daher die reellen Zahlen mit diesen Paaren, und es ist dann $\mathsf{R} \subset \mathsf{C}$. — Die Elemente aus $T(\mathsf{C})$ können aufgefaßt werden als geordnete Paare $A = (A_1, A_2)$ mit $A_1, A_2 \in P(\mathsf{R})$. Die Elemente der Form $(A_1, 0)$ aus $T(\mathsf{C})$ sind jedoch nicht bezüglich aller in $T(\mathsf{C})$ eingeführten Rechenoperationen $\boxed{*}$ isomorph den reellen Komplexen. Aus Definition 6 ist zwar ersichtlich, daß das Ergebnis von Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier T-Komplexe der Form $A = (A_1, 0)$ und $B = (B_1, 0)$ mit der entsprechenden Verknüpfung der reellen Komplexe $A = A_1$ und $B = B_1$ übereinstimmt. Für die Division erhalten wir hingegen $A \boxed{:} B = (A_1 \cdot B_1) : B_1^2$. Bei der Ausführung der Division in $P(\mathsf{R})$ erhalten wir $A : B = A_1 : B_1$. Im allgemeinen sind diese beiden Größen verschieden. Wir zeigen jetzt, daß stets gilt:

$$A_1 : B_1 \subseteqq (A_1 \cdot B_1) : B_1^2 .$$

Zunächst erinnern wir daran, daß wir bei der Division von T-Komplexen vorausgesetzt haben, daß $0 \notin B = B_1 + i\, B_2$ ist. Außerdem erinnern wir an die Vorschrift (2) zur Bildung von $B_1^2 + B_2^2$. Ist nun $B = B_1 + i\,0$, so folgt: $0 \notin B_1$, d. h. $B_1 > 0$ oder $B_2 < 0$. In diesen beiden Fällen ist aber

$$B_1^2 + B_2^2 = B_1^2 = \{b_1^2 \mid b_1 \in B\} = B_1 \cdot B_1 ,$$

wobei das letzte Produkt nach Definition 2 zu bilden ist. Daher können wir schreiben

$$(A_1 \cdot B_1) : B_1^2 = A_1 \cdot B_1 \cdot \frac{1}{B_1^2} = A_1 \cdot B_1 \cdot \frac{1}{B_1} \cdot \frac{1}{B_1} = A_1 \cdot \frac{1}{B_1} \cdot \left(B_1 \cdot \frac{1}{B_1}\right).$$

Da stets $1 \in B_1 : B_1$ ist, folgt auf Grund der Teilmengeneigenschaft für reelle Komplexe die Behauptung.

Wir werden weiter unten sehen, daß die Division $\boxed{:}$ von T-Komplexen noch andere unangenehme Eigenschaften im Vergleich mit den drei anderen eingeführten Rechenoperationen besitzt.

Auf den Nachweis, wie gut die eingeführte Arithmetik $\boxed{*}$ die oben aufgestellte Forderung erfüllt, daß die Verknüpfung $A \boxed{*} B$ die T-Hülle $\widetilde{A * B}$ möglichst gut approximieren soll, kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

3. Funktionen und durch sie erzeugte Komplexe aus $P(\mathsf{C})$

Um die qualitativen Eigenschaften der in $T(\mathsf{C})$ eingeführten Arithmetik einfach studieren zu können, zitieren wir hier die wichtigsten Definitionen und Sätze über Funktionen und der durch sie erzeugten Komplexe, wie sie in [4] aufgeführt wurden. Die Formulierung wurde dort für reelle Komplexe und reelle Funktionen abgefaßt. Alle Definitionen und Sätze lassen sich unmittelbar ins Komplexe übertragen.

Mit C^n bezeichnen wir die Menge der n-Tupel komplexer Zahlen. Es sei $A \subseteqq \mathsf{C}^n$. Die eindeutige Abbildung

$$f_A : A \to \mathsf{C} ,$$

welche jedem $t := (t_1, \ldots, t_n) \in A$ einen Wert $f_A(t) \in \mathsf{C}$ zuordnet, heißt n-dimensionale Funktion, i. Z. f_A. A heißt Definitionsbereich von f_A. Die Menge aller auf A erklärten beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit (A, C). Die Abbildung der Menge (A, C) in die Menge $P(\mathsf{C})$, welche jeder Funktion $f_A \in (A, \mathsf{C})$ den Bildbereich $\{f_A\} := \{f_A(t) \mid t \in A\} \in P(\mathsf{C})$ zuordnet, bezeichnen wir als „Komplexbildung". $\{f_A\}$ heißt Komplex von f_A. Zwei Funktionen heißen gleich, wenn ihre Werte für alle $t \in A$ übereinstimmen. Für Elemente x_A, $y_A \in (A, \mathsf{C})$ werden die Grundrechenoperationen eingeführt durch

$$(x_A * y_A)\,(t) := x_A(t) * y_A(t) \qquad \text{für alle } t \in A .$$

(A, C) bildet eine kommutative Algebra mit Einselement. Ist A abgeschlossen und beschränkt, so bildet die Menge der auf A erklärten komplexwertigen Funktionen $(A, \mathsf{C})_c$ eine Teilalgebra.

Es gilt der

Einschließungssatz: *Sei $A \subseteqq \mathsf{C}^n$, x_A, $y_A \in (A, \mathsf{C})$. Dann gilt für alle Grundrechenoperationen*

$$\{x_A * y_A\} \subseteqq \{x_A\} * \{y_A\} .$$

Ist $r(s)$ eine rationale beschränkte Funktion: $r(s) := r(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, die auf der Produktmenge $\overset{m}{\underset{i=1}{\times}} \{x_A^i\}$ erklärt ist, wobei $x_A^i \in (A, \mathsf{C})$ ist, so gilt

$$\{r(x_A^i)\} \subseteqq r(\{x_A^i\}) .$$

Korollar 1: Sei $t := (t_1, \ldots, t_n)$, $A_i \in P(\mathsf{C})$, $i = 1(1)\,n$ und $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sowie $x_A^i := t_i \in (A, \mathsf{C})$, $t_i \in A$, $i = 1(1)\,n$. Dann gilt für jede auf A beschränkte rationale Funktion $r(t) = r(t_1, \ldots, t_n)$:

$$\{r|A\} \subseteqq r(A_1, \ldots, A_n) .$$

Tritt in $r(t)$ jede der Variablen t_i nur ein einziges Mal als Operand auf, so gilt das Gleichheitszeichen. Diese Bedingung ist jedoch nicht notwendig.

Wir geben jetzt noch folgende

Definition 7: Gegeben sei ein Komplex $A \in P(\mathbf{C})$. Dann bezeichnen wir die reellen Komplexe

$$A_R := \{x \mid z = x + i\,y \in A\} \in P(\mathbf{R}) \quad \text{bzw.} \quad A_I := \{y \mid z = x + i\,y \in A\} \in P(\mathbf{R})$$

als Real- bzw. Imaginärteil des Komplexes A.

Offensichtlich gilt für einen beliebigen Komplex $A \in P(\mathbf{C})$

$$\widetilde{A} = A_R + i\,A_I\,. \tag{1}$$

Mit diesen Mitteln untersuchen wir jetzt die Approximation der Arithmetik $*$ durch $\boxed{*}$ in $T(\mathbf{C})$. Wir schreiben zunächst die Verknüpfungen $*$ für zwei Elemente $A = A_1 + i\,A_2$ und $B = B_1 + i\,B_2$ explizit an:

a) Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} A \pm B &= \{z = a \pm b \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{z = (a_1 \pm b_1) + i\,(a_2 \pm b_2) \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_1 \in B_1\,,\ \ b_2 \in B_2\}\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(A \pm B)_R = \{x = a_1 \pm b_1 \mid a_1 \in A_1 \wedge b_1 \in B_1\}\,, \qquad (A \pm B)_I = \{y = a_2 \pm b_2 \mid a_2 \in A_2 \wedge b_2 \in B_2\}\,.$$

b) Multiplikation:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \{z = a \cdot b \mid a \in A \wedge b \in B\} = \\ &= \{z = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i\,(a_2 b_1 + a_1 b_2) \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_1 \in B_1\,,\ \ b_2 \in B_2\}\,, \\ (A \cdot B)_R &= \{x = a_1 b_1 - a_2 b_2 \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_1 \in B_1\,,\ \ b_2 \in B_2\}\,, \\ (A \cdot B)_I &= \{y = a_2 b_1 + a_1 b_2 \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_2 \in B_1\,,\ \ b_2 \in B_2\}\,. \end{aligned}$$

c) Division:

$$\begin{aligned} (A : B) &= \{z = a : b \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{z = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)] : (b_1^2 + b_2^2) \mid a_1 \in A_1\,,\ a_2 \in A_2\,,\ b_1 \in B_1\,,\ b_2 \in B_2\}\,, \\ (A : B)_R &= \{x = (a_1 b_1 + a_2 b_2) : (b_1^2 + b_2^2) \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_1 \in B_1\,,\ b_2 \in B_2\}\,, \\ (A : B)_I &= \{y = (a_2 b_1 - a_1 b_2) : (b_1^2 + b_2^2) \mid a_1 \in A_1\,,\ \ a_2 \in A_2\,,\ \ b_1 \in B_1\,,\ \ b_2 \in B_2\}\,. \end{aligned}$$

Die bei der Bildung von Realteil bzw. Imaginärteil der einzelnen Komplexe $A * B$ links vom senkrechten Strich stehenden Ausdrücke x bzw. y können aufgefaßt werden als reelle Funktionen der vier reellen Veränderlichen a_1, a_2, b_1 und b_2. Da bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation jede der vier Variablen in den Funktionen höchstens einmal vorkommt, gilt nach dem Korollar 1:

$$\begin{aligned} (A \pm B)_R &= A_1 \pm B_1\,; \qquad & (A \pm B)_I &= A_2 \pm B_2\,; \\ (A \cdot B)_R &= A_1 B_1 - A_2 B_2\,; \qquad & (A \cdot B)_I &= A_2 B_1 + A_1 B_2\,. \end{aligned}$$

Für die Division gilt hingegen nach dem Einschließungssatz:

$$\begin{aligned} (A : B)_R &\subseteq (A_1 B_1 + A_2 B_2) : (B_1^2 + B_2^2)\,; \\ (A : B)_I &\subseteq (A_2 B_1 - A_1 B_2) : (B_1^2 + B_2^2)\,; \end{aligned}$$

Auf Grund von (1) haben wir damit also

$$\widetilde{A \pm B} = A \boxed{\pm} B\,, \tag{2}$$

$$\widetilde{A \cdot B} = A \boxed{\cdot} B\,, \tag{3}$$

$$\widetilde{A : B} \subseteq A \boxed{:} B\,. \tag{4}$$

Das Ergebnis besagt: Die Verknüpfung $\boxed{*}$ für zwei Elemente $A, B \in T(\mathbf{C})$ liefert im Falle der Addition, Subtraktion und Multiplikation die T-Hülle der Verknüpfung $A * B$. Jedoch ist im allgemeinen $A \boxed{:} B$ eine Obermenge von $\widetilde{A : B}$.

Korollar 2: Für zwei beliebige Elemente A und B aus $P(\mathbf{C})$ gilt:

$$A * B \subseteq \widetilde{A} * \widetilde{B} \subseteq \widetilde{\widetilde{A} * \widetilde{B}} \subseteq \widetilde{A} \boxed{*} \widetilde{B}\,. \tag{5}$$

Beweis: Nach Definition ist $A \subseteq \widetilde{A}$ und $B \subseteq \widetilde{B}$. Auf Grund der Teilmengeneigenschaft folgt $A * B \subseteq \widetilde{A} * \widetilde{B}$. Nach Definition gilt $\widetilde{A} * \widetilde{B} \subseteq \widetilde{\widetilde{A} * \widetilde{B}}$. Nach den letzten Ergebnissen (2), (3), (4) gilt $\widetilde{\widetilde{A} * \widetilde{B}} \subseteq \widetilde{A} \boxed{*} \widetilde{B}$. Damit ist die Kette bewiesen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei Addition, Subtraktion und Multiplikation das dritte $\subseteq$-Zeichen in (5) wegen (2), (3) stets durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden kann.

Wir geben jetzt noch folgende

Erweiterung des Einschließungssatzes: *Sei $A \subseteq \mathbb{C}^n$, x_A, $y_A \in (A, \mathbb{C})$. Dann gilt für alle Grundrechenoperationen*

$$\{x_A * x_A\} \subseteq \{x_A\} * \{y_A\} \subseteq \widetilde{\{x_A\}} * \widetilde{\{y_A\}} \subseteq \widetilde{\widetilde{\{x_A\}} * \widetilde{\{y_A\}}} \subseteq \widetilde{\{x_A\}} \boxed{*} \widetilde{\{y_A\}} .$$

Sind ferner $x_A^i \in (A, \mathbb{C})$, $i = 1(1)\, m$, so gilt für jede auf der Produktmenge $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \{x_A^i\}$ beschränkte rationale Funktion $r(s) := r(s_i) := r(s_1, s_2, \ldots, s_m)$:

$$\{r(x_A^i)\} \subseteq r(\{x_A^i\}) \subseteq r(\widetilde{\{x_A^i\}}) \subseteq r(\widetilde{\widetilde{\{x_A^i\}}}) \subseteq r_{\boxed{*}}(\widetilde{\{x_A^i\}}) .$$

(Der Index $\boxed{*}$ soll andeuten, daß alle Operationen in der Arithmetik $\boxed{*}$ auszuführen sind.)

Beweis: Das erste $\subseteq$-Zeichen gilt auf Grund des Einschließungssatzes. Der übrige Teil ergibt sich durch Anwendung von Korollar 2. Die Verallgemeinerung auf rationale Funktionen ergibt sich durch wiederholte Anwendung der eben bewiesenen Aussage.

Als Verallgemeinerung von Korollar 1 erhalten wir

Korollar 3: Sei $t := (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $A_i \in P(\mathbb{C})$, $i = 1(1)\, n$ und $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sowie $x_A^i := t_i \in (A, \mathbb{C})$, $t_i \in A_i$, $i = 1(1)\, n$. Dann gilt für jede auf A beschränkte rationale Funktion $r(t) := r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$:

$$\{r|A\} \subseteq r(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subseteq r(\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, \ldots, \widetilde{A_n}) \subseteq$$
$$\subseteq r(\widetilde{\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, \ldots, \widetilde{A_n}}) \subseteq r_{\boxed{*}}(\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_n}) .$$

Tritt jede Variable t_i in $r(t)$ nur ein einziges Mal auf, so steht an Stelle des ersten $\subseteq$-Zeichens ein $=$-Zeichen.

Der verallgemeinerte Einschließungssatz und Korollar 3 geben also eine Möglichkeit an, den Komplex $\{r(x_A^i)\} \in P(\mathbb{C})$ einer beschränkten rationalen Funktion durch das Element $r_{\boxed{*}}(\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, \ldots, \widetilde{A_n}) \in T(\mathbb{C})$ von außen zu approximieren. Dabei wird die praktisch leicht auszuführende Verknüpfung $\boxed{*}$ verwendet.

Wir wollen jetzt noch den Zusammenhang zwischen den Verknüpfungen $*$ und $\boxed{*}$ herstellen.

Es seien $A = A_1 + i\, A_2$, $B = B_1 + i\, B_2$ aus $T(\mathbb{C})$. Dann ist

$$A \pm B = \{z = a \pm b | a \in A \wedge b \in B\} =$$
$$= \{z = (a_1 \pm b_1) + i\,(a_2 \pm b_2) |\, a_1 \in A_1\,,\ a_2 \in A_2\,,\ b_1 \in B_1\,,\ b_2 \in B_2\} .$$

$z = a_1 \pm b_1 + i\,(a_2 \pm b_2)$ ist eine rationale Funktion von $t = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ mit $t \in A_1 \times A_2 \times B_1 \times B_2$. Da jede der Variablen nur einmal vorkommt, gilt nach Korollar 1

$$A \pm B = (A_1 \pm B_1) + i\,(A_2 \pm B_2) = A \boxed{\pm} B .$$

Durch die entsprechenden Überlegungen und mit Hilfe des Einschließungssatzes erhält man für die Multiplikation und Division

$$A \cdot B \subseteq A \boxed{\cdot} B \qquad \text{und} \qquad A : B \subseteq A \boxed{:} B .$$

Damit haben wir den

Satz 1.1: *Die Verknüpfungen $\boxed{\pm}$ für zwei Elemente A, B aus $T(\mathbb{C})$ stimmen mit den Verknüpfungen $\pm$ überein. Hingegen liefern die Verknüpfungen $\boxed{\cdot}$ und $\boxed{:}$ im allgemeinen Obermengen der Verknüpfungen $\cdot$ und $:$.*

Wir führen jetzt noch einen weiteren Begriff ein durch die

Definition 8: Sei $A = A_1 + i\, A_2 \in T(\mathbb{C})$. ($A_1$ und A_2 beschränkte Elemente aus $P(\mathbb{R})$,) Dann heißt

$$\widehat{A} := \Big[\inf_{a_1 \in A_1} a_1\,,\ \ \sup_{a_1 \in A_1} a_1\Big] + i\,\Big[\inf_{a_2 \in A_2} a_2\,,\ \ \sup_{a_2 \in A_2} a_2\Big] \in I(\mathbb{C}) .$$

I-Hülle von A.

II. Veschiedene Matrizenmengen

1. Vektoren und Matrizen mit Elementen aus C bzw. P(C)

Im folgenden sei $M(\mathbb{C})$ bzw. $M(P(\mathbb{C}))$ die Menge der Matrizen, deren Elemente aus $\mathbb{C}$ bzw. $P(\mathbb{C})$ sind. Wir bezeichnen die Matrizen aus $M(P(\mathbb{C}))$ mit großen gotischen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, …, Vektoren mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, …. Die Matrizen aus $M(\mathbb{C})$ bezeichnen wir mit $\underset{\cdot}{\mathfrak{A}}$, $\underset{\cdot}{\mathfrak{B}}$, …, Vektoren mit $\underset{\cdot}{\mathfrak{a}}$, $\underset{\cdot}{\mathfrak{b}}$, ….

Definition 9: Es seien $\mathfrak{A} = (A_{ij})$, $\mathfrak{B} = (B_{ij})$ $n \times n$-Matrizen aus $M(P(\mathbb{C}))$. Wir sagen $\mathfrak{A}$ ist in $\mathfrak{B}$ enthalten, i. Z. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, genau dann, wenn $A_{ij} \subseteq B_{ij}$, $i, j = 1(1)\, n$.

Jede Matrix $\mathfrak{A} = (A_{ij}) \in M(P(\mathbb{C}))$ läßt sich auffassen als $\mathfrak{A} = (A_{ij}) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in A_{ij}$ für alle $i, j\} \in P(M(\mathbb{C}))$, d. h., jede Matrix $\mathfrak{A} \in M(P(\mathbb{C}))$ kann als ein Element der Potenzmenge $P(M(\mathbb{C}))$ der komplexen Matrizen aufgefaßt werden. Die Potenzmenge $P(M(\mathbb{C}))$ ist jedoch nicht identisch mit der Menge $M(P(\mathbb{C}))$ (siehe [4]). Vielmehr gilt

$$M(\mathbb{C}) \subset M(P(\mathbb{C})) \subset P(M(\mathbb{C})) .$$

In der Menge $P(M(\mathbb{C}))$ führen wir eine Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein durch die

Definition 10:

$$\mathfrak{A} \circledast \mathfrak{B} := \{\mathfrak{A}' * \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{A}' \in \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}' \in \mathfrak{B}\} \in P(M(\mathbb{C})) .$$

Da $M(P(\mathbb{C})) \subset P(M(\mathbb{C}))$, ist auch für Elemente aus $M(P(\mathbb{C}))$ diese Definition gültig.
In $M(P(\mathbb{C}))$ führen wir nun drei weitere Verknüpfungen ein durch die

Definition 11: Sind $\mathfrak{A} = (A_{ij})$, $\mathfrak{B} = (B_{ij})$ Elemente aus $M(P(\mathbb{C}))$, so ist

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} := (A_{ij} \pm B_{ij}) \in M(P(\mathbb{C})) ,$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} := \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} \cdot B_{\nu j}\right) \in M(P(\mathbb{C})) .$$

Wie im Reellen läßt sich zeigen, daß die in $M(P(\mathbb{C}))$ erklärten Verknüpfungen $+$ und $-$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\ominus$ übereinstimmen:

$$\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} , \qquad \mathfrak{A} \ominus \mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} .$$

Für die Multiplikation gilt hingegen

$$\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$$

(siehe [4]).

2. Matrizen mit Elementen aus $I(\mathbb{C})$ bzw. $T(\mathbb{C})$

Wir führen jetzt weitere Mengen von Matrizen ein. Früher schon haben wir darauf hingewiesen, daß sich krummlinig begrenzte komplexe Zahlenmengen nicht einfach handhaben lassen. Die Verknüpfung von Matrizen aus $P(M(\mathbb{C}))$ nach Definition 10 ist praktisch nicht durchführbar. Die praktische Durchführung der Verknüpfung für Matrizen aus $M(P(\mathbb{C}))$ wird zwar auf die Verknüpfung der Elemente zurückgeführt. Diese hat nach Definition 2 zu geschehen und ist damit auch kaum durchführbar. Geeigneter als die Mengen $P(M(\mathbb{C}))$ und $M(P(\mathbb{C}))$ scheinen für die Anwendungen Matrizen zu sein, deren Elemente aus Komplexen A_{ij} bestehen, die von achsenparallelen Geraden begrenzt sind, d. h. aus $T(\mathbb{C})$ sind. Wir bezeichnen daher jetzt mit $M(T(\mathbb{C}))$ bzw. $M(I(\mathbb{C}))$ die Mengen von Matrizen, deren Elemente aus $T(\mathbb{C}))$ bzw. $I(\mathbb{C})$ sind. Es besteht folgender Zusammenhang:

$$M(\mathbb{C}) \subset M(I(\mathbb{C})) \subset M(T(\mathbb{C})) \subset M(P(\mathbb{C})) \subset P(M(\mathbb{C})) .$$

Da $M(I(\mathbb{C}))$ bzw. $M(T(\mathbb{C}))$ Teilmengen von $M(P(\mathbb{C}))$ sind, so sind auch für Elemente aus diesen Mengen die durch Definition 10 bzw. Definition 11 gegebenen Verknüpfungen gültig. Neben der Schwierigkeit, diese Verknüpfungen praktisch auszuführen, tritt der Nachteil hinzu, daß die Mengen $M(I(\mathbb{C})$ bzw. $M(T(\mathbb{C}))$ nicht bezüglich aller dieser Verknüpfungen abgeschlossen sind. Wir führen daher in $M(T(\mathbb{C}))$ (und damit in $M(I(\mathbb{C})))$ drei weitere Verknüpfungen ein durch die

Definition 12: Sind $\mathfrak{A} = (A_{ij})$, $\mathfrak{B} = (B_{ij})$ aus $M(T(\mathbb{C}))$, so verstehen wir unter

$$\mathfrak{A} \boxed{\pm} \mathfrak{B} := (A_{ij} \boxed{\pm} B_{ij}) \in M(T(\mathbb{C})) ,$$

$$\mathfrak{A} \boxdot \mathfrak{B} := \left(\sum_{\nu=1}^{n}{}_{\boxplus} A_{i\nu} \boxdot B_{\nu j}\right) \in M(T(\mathbb{C})) .$$

Der Index $\boxplus$ hinter dem Summenzeichen soll dabei andeuten, daß die Summation im Sinne von Definition 6 auszuführen ist.

Es gilt der

Satz 2.1: *Die in der Teilmenge $M(T(\mathbb{C})) \subset M(P(\mathbb{C}))$ erklärten Verknüpfungen $\boxplus$ und $\boxminus$ stimmen mit den Verknüpfungen $+$ und $-$ (und damit mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\ominus$) überein. Die Verknüpfungen $\boxdot$ und $\cdot$ sind verschieden. Es gilt*

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \boxdot \mathfrak{B} .$$

Beweis: Nach Satz 1.1 ist für $A_{ij}, B_{ij} \in T(\mathbb{C})$: $A_{ij} \boxed{\pm} B_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$. Daraus folgt $\mathfrak{A} \boxed{\pm} \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}$ nach Definition der Gleichheit. Weiter ist nach Korollar 2 aus dem letzten Abschnitt für beliebige Komplexe $A_{i\nu}$ und $B_{\nu j}$ aus $P(\mathbb{C})$: $A_{i\nu} \cdot B_{\nu j} \subseteq \widetilde{A}_{i\nu} \boxdot \widetilde{B}_{\nu j}$. Da $A_{i\nu}, B_{\nu j}$ aus $T(\mathbb{C})$ sind, gilt $\widetilde{A}_{i\nu} = A_{i\nu}$ und $\widetilde{B}_{\nu j} = B_{\nu j}$, also gilt $A_{i\nu} \cdot B_{\nu j} \subseteq A_{i\nu} \boxdot B_{\nu j}$. Daher haben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} \cdot B_{\nu j} \subseteq \sum_{\nu=1}^{n}{}_{\boxplus} A_{i\nu} \boxdot B_{\nu j}$$

für alle i und j. Daher folgt nach Definition 9 die Behauptung für die Multiplikation.

Um die Operationen $+$, $-$, $\cdot$ für Elemente aus $M(P(\mathbb{C}))$ durch die Verknüpfungen $\boxplus$, $\boxminus$, $\boxdot$ zu approximieren, geben wir die folgende

Definition 13: Gegeben sei eine Matrix $\mathfrak{A} = (A_{ij}) \in M(P(\mathbb{C}))$. Dann verstehen wir unter der T-Hülle von $\mathfrak{A}$ die Matrix

$$\widetilde{\mathfrak{A}} := (\widetilde{A}_{ij}) \in M(T(\mathbb{C})) .$$

$\widetilde{\mathfrak{A}}$ entsteht also aus $\mathfrak{A}$, indem man elementweise nach Definition 4 die T-Hülle $\widetilde{A}_{ij} \in T(\mathsf{C})$ der Elemente $A_{ij} \in P(\mathsf{C})$ bildet. Ist $\mathfrak{A} \in M(T(\mathsf{C}))$, so gilt $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$. Nach Definition der T-Hüllenbildung ist $A_{ij} \subseteq \widetilde{A}_{ij}$ für alle i und j. Nach Definition 9 gilt daher für $\mathfrak{A} \in M(P(\mathsf{C})) : \mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$. Aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \in M(P(\mathsf{C}))$ folgt $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}$. Es gilt der

Satz 2.2: *Seien* $\mathfrak{A} = (A_{ij})$, $\mathfrak{B} = (B_{ij}) \in M(P(\mathsf{C}))$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}}} = \widetilde{\mathfrak{A}} \boxed{\pm} \widetilde{\mathfrak{B}} \in M(T(\mathsf{C}))\,,$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}} \subseteq \widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}} \boxed{\cdot} \widetilde{\mathfrak{B}} \in M(T(\mathsf{C}))\,.$$

Beweis: Nach Definition 9 ist $\mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \widetilde{\mathfrak{B}}$. Auf Grund der Teilmengeneigenschaft gilt daher das erste $\subseteq$-Zeichen in beiden Zeilen. Nun ist nach Definition 11 $\widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}} = (\widetilde{A}_{ij} \pm \widetilde{B}_{ij})$. Da $(\widetilde{A}_{ij} \pm \widetilde{B}_{ij}) \in M(T(\mathsf{C}))$ ist, gilt $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}}} = \widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}}$. Nach Satz 1.1 ist $\widetilde{\mathfrak{A}} \boxed{\pm} \widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{A}} \pm \widetilde{\mathfrak{B}}$. Damit ist die erste Zeile bewiesen. Jedes Element der Matrix $\widetilde{\mathfrak{A}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} \cdot B_{\nu j}\right)$ kann als rationale Funktion der $A_{i\nu}$ und $B_{\nu j}$ aufgefaßt werden. Daher gilt auf Grund einer Teilaussage von Korollar 3 aus dem ersten Kapitel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \widetilde{A}_{i\nu} \cdot \widetilde{B}_{j\nu} \subseteq \widetilde{\sum_{\nu=1}^{n} \widetilde{A}_{i\nu} \cdot \widetilde{B}_{\nu j}} \subseteq \sum_{\nu=1}^{n}\!{}_{\boxed{+}}\, \widetilde{A}_{i\nu} \boxed{\cdot} \widetilde{B}_{\nu j}\,,$$

d. h.

$$\widetilde{\mathfrak{A}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}} \subseteq \widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}} \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}} \boxed{\cdot} \widetilde{\mathfrak{B}}\,.$$

3. Vektoren und Matrizen mit Elementen aus (A, C)

Mit $M(A, \mathsf{C})$ bezeichnen wir die Menge der Matrizen, deren Elemente aus (A, C) sind: $\mathfrak{X}_A, \mathfrak{Y}_A, \ldots, \in M(A, \mathsf{C})$. Mit $\mathfrak{x}_A, \mathfrak{y}_A, \ldots$ bezeichnen wir Vektoren aus $V(A, \mathsf{C})$. Die Definition der Gleichheit geschieht elementweise. Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen aus $M(A, \mathsf{C})$ erklären wir durch

$$\mathfrak{X}_A \pm \mathfrak{Y}_A = (x_A^{ij} \pm y_A^{ij})\,, \qquad \mathfrak{X}_A \cdot \mathfrak{Y}_A = \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_A^{i\nu} \cdot y_A^{\nu j}\right),$$

wobei $\mathfrak{X}_A = (x_A^{ij})$, $\mathfrak{Y}_A = (y_A^{ij})$.

Für spätere Anwendungen führen wir zwei neue Begriffe ein durch die

Definition 14: Ist $\mathfrak{X}_A = (x_A^{ij}) \in M(A, \mathsf{C})$, so verstehen wir unter dem *Komplex der Matrix* $\mathfrak{X}_A$ die Menge

$$\{\mathfrak{X}_A\} := \{(x_A^{ij}(t)) \mid t \in A\} \in P(M(\mathsf{C}))\,.$$

Die Matrix $\overline{\mathfrak{X}}_A := (\{x_A^{ij}(t) \mid t \in A\}) \in M(P(\mathsf{C}))$ heißt *Hülle der Matrix* $\mathfrak{X}_A$. Mit $\widetilde{\mathfrak{X}}_A$ bezeichnen wir im folgenden die T-Hülle von $\overline{\mathfrak{X}}_A$: $\widetilde{\mathfrak{X}}_A := \widetilde{\overline{\mathfrak{X}}}_A$.

Es gilt der

Verallgemeinerte Einschließungssatz: *Es seien* $\mathfrak{X}_A$, $\mathfrak{Y}_A$ *aus* $M(A, \mathsf{C})$, $\mathfrak{x}_A, \mathfrak{y}_A$ *aus* $V(A, \mathsf{C})$. *Dann gilt*

$$\{\mathfrak{X}_A\} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}_A \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_A \qquad \text{bzw.} \qquad \{\mathfrak{x}_A\} \subseteq \overline{\mathfrak{x}}_A \subseteq \widetilde{\mathfrak{x}}_A\,, \tag{1}$$

$$\{\mathfrak{X}_A * \mathfrak{Y}_A\} \subseteq \{\mathfrak{X}_A\} \circledast \{\mathfrak{Y}_A\}\,, \tag{2}$$

$$\overline{\mathfrak{X}_A * \mathfrak{Y}_A} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}_A * \overline{\mathfrak{Y}}_A \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_A * \widetilde{\mathfrak{Y}}_A \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_A \boxed{*} \widetilde{\mathfrak{Y}}_A\,, \tag{3}$$

$$\{\mathfrak{X}_A\} \circledast \{\mathfrak{Y}_A\} \subseteq \overline{\mathfrak{X}}_A \circledast \overline{\mathfrak{Y}}_A \subseteq \overline{\mathfrak{X}}_A * \overline{\mathfrak{Y}}_A\,, \tag{4}$$

$$\widetilde{\overline{\mathfrak{X}_A * \mathfrak{Y}_A}} \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_A \boxed{*} \widetilde{\mathfrak{Y}}_A\,. \tag{5}$$

Beweis: (1) gilt nach Definition von $\{\mathfrak{X}_A\}$, $\overline{\mathfrak{X}}_A$ und $\widetilde{\mathfrak{X}}_A$. (Entsprechend für Vektoren). (2) folgt aus der Definition der Verknüpfungen in $M(A, \mathsf{C})$ bzw. $M(P(\mathsf{C}))$. (3) folgt aus dem Einschließungssatz für Funktionen aus (A, C) und Satz 2.2. (4) folgt aus der Teilmengeneigenschaft für Matrizen aus $P(M(\mathsf{C}))$. Nach (3) gilt

$$\overline{\mathfrak{X}_A * \mathfrak{Y}_A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{X}}_A * \widetilde{\mathfrak{Y}}_A$$

und daher

$$\widetilde{\overline{\mathfrak{X}_A * \mathfrak{Y}_A}} \subseteq \widetilde{\widetilde{\mathfrak{X}}_A * \widetilde{\mathfrak{Y}}_A} = \widetilde{\mathfrak{X}}_A \boxed{*} \widetilde{\mathfrak{Y}}_A\,.$$

Das ist (5).

Bei den Anwendungen wird man immer gezwungen sein, den Komplex $\{\mathfrak{X}_A\}$ einer gesuchten Matrix (bzw. eines gesuchten Vektors) durch die Hülle zu beschreiben. Da aber $\overline{\mathfrak{X}}_A$ im allgemeinen Elemente aus $P(\mathsf{C})$ besitzt, wird man versuchen, $\overline{\mathfrak{X}}_A$ durch die Matrix $\widetilde{\mathfrak{X}}_A$ einzuschließen. Die Elemente der Matrix $\widetilde{\mathfrak{X}}_A$ sind aus $T(\mathsf{C})$ und damit einfacher beschreibbar als die Elemente der Matrix $\overline{\mathfrak{X}}_A$.

Für die praktische Bestimmung von Einschließungsmengen für den Komplex einer gesuchten Matrix führen wir noch einen weiteren Begriff ein:

Definition 15: Es sei $\mathfrak{A} = (A_{ij}) \in M(T(\mathbf{C}))$. Dann heißt die Matrix $\hat{\mathfrak{A}} = (\hat{A}_{ij})$ I-Hülle von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A} \in M(I(\mathbf{C}))$, so gilt $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}}_{ij}$. Die I-Hülle der T-Hülle einer Matrix $\mathfrak{X}_A \in M(A, \mathbf{C})$ bezeichnen wir mit $\hat{\mathfrak{X}}_A := \hat{\tilde{\mathfrak{X}}}_A := \hat{\tilde{\overline{\mathfrak{X}}}}_A$. Es gilt für $\mathfrak{X}_A \in M(A(\mathbf{C})$: $\{\mathfrak{X}_A\} \subseteqq \overline{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \tilde{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \hat{\mathfrak{X}}_A$.

III. Bestimmung von Einschließungsmengen für die Lösung von Gleichungen

1. Allgemeiner Zusammenhang bei linearen Gleichungen

Wir kommen jetzt zu der Aufgabe, die als eindeutig vorhanden vorausgesetzte Lösung einer Gleichung der Form

$$\mathfrak{X}_A(t) = \mathfrak{A}_A(t) \cdot \mathfrak{X}_A(t) + \mathfrak{B}_A(t) \tag{1}$$

praktisch zu bestimmen. Dabei seien $\mathfrak{A}_A(t)$, $\mathfrak{B}_A(t) \in M(A, \mathbf{C})$ gegeben. Gesucht ist $\mathfrak{X}_A(t) \in M(A, \mathbf{C})$.

Spezialfälle dieser Aufgabe sind:

a) $\mathfrak{A}_A(t) \in M(A, \mathbf{C})$, $\mathfrak{b}_A(t) \in V(A, \mathbf{C})$, $\mathfrak{x}_A(t) = \mathfrak{A}_A(t) \cdot \mathfrak{x}_A(t) + \mathfrak{b}(t)$ (Lineares Gleichungssystem),

b) $\mathfrak{A}_A(t) \in M(A, \mathbf{C})$, $\mathfrak{B}_A(t) = \mathfrak{E}$ (Einheitsmatrix)
$\mathfrak{X}_A(t) = \mathfrak{A}_A(t) \cdot \mathfrak{X}_A(t) + \mathfrak{E}$ (Bestimmung der Inversen von $\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_A(t)$).

Die Lösung von (1) läßt sich bei größeren Problemen praktisch kaum explizit angeben. Insbesondere ist kein (einfacher) Algorithmus bekannt, welcher es gestattet, die Lösung mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage zu bestimmen. Die einzigen auf einer Rechenanlage ausführbaren mathematischen Operationen sind die vier Grundrechenoperationen für reelle Zahlen. (Von der dabei notwendigen Rundung sei hier abgesehen.) Die Verknüpfungen für reelle Intervalle sind auf die Verknüpfungen von reellen Zahlen zurückgeführt worden. (Siehe Abschnitt I.) Die Lösung von (1) läßt sich in der Form

$$\mathfrak{X}_A(t) = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_A(t))^{-1} \mathfrak{B}_A(t)$$

schreiben. Im folgenden wollen wir eine Menge von Matrizen bestimmen, so daß $\mathfrak{X}_A(t)$ für jedes $t \in A$ in dieser Menge enthalten ist. Diese Menge soll sich auf einer Rechenanlage bestimmen lassen, und muß daher einfach zu beschreiben sein.

Für den Komplex der Lösung von (1) gilt

$$\{\mathfrak{X}_A\} \subseteqq \{\mathfrak{A}_A\} \odot \{\mathfrak{X}_A\} \oplus \{\mathfrak{B}_A\} =: \mathfrak{W}_1 . \tag{2}$$

Konvergiert das Iterationsverfahren

$$\mathfrak{W}_{m+1} = \{\mathfrak{A}_A\} \odot \mathfrak{W}_m \oplus \{\mathfrak{B}_A\}$$

für jedes beliebige $\mathfrak{W}_0$ aus $P(M(\mathbf{C}))$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\mathfrak{W}$, so gilt $\{\mathfrak{A}_A\} \subseteqq \mathfrak{W}$. Dies folgt aus (2) mit $\mathfrak{W}_0 = \{\mathfrak{X}_A\}$ und vollständiger Induktion. Da die Operationen $\circledast$ praktisch nicht durchführbar sind, läßt sich $\mathfrak{W}$ nicht einfach bestimmen.

Für die Hülle der Lösung von (1) gilt

$$\overline{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \overline{\mathfrak{A}}_A \cdot \overline{\mathfrak{X}}_A + \overline{\mathfrak{B}}_A =: \mathfrak{Y}_1 . \tag{3}$$

Konvergiert das Iterationsverfahren

$$\mathfrak{Y}_{m+1} = \overline{\mathfrak{A}}_A \cdot \mathfrak{Y}_m + \overline{\mathfrak{B}}_A$$

für jedes beliebige $\mathfrak{Y}_0 \in M(P(\mathbf{C}))$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\mathfrak{Y}$, so gilt $\overline{\mathfrak{X}}_A \subseteq \mathfrak{Y}$. Dies folgt aus (3) mit $\mathfrak{Y}_0 = \overline{\mathfrak{X}}_A$ und vollständiger Induktion. Da die Operationen $*$ praktisch nicht einfach durchführbar sind, läßt sich $\mathfrak{Y}$ nicht bestimmen.

Für die T-Hülle der Lösung von (1) gilt

$$\tilde{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \tilde{\mathfrak{A}}_A \boxdot \tilde{\mathfrak{X}}_A \boxplus \tilde{\mathfrak{B}}_A =: \mathfrak{Z}_1 . \tag{4}$$

Konvergiert das Iterationsverfahren

$$\mathfrak{Z}_{m+1} = \tilde{\mathfrak{A}}_A \boxdot \mathfrak{Z}_m \boxplus \tilde{\mathfrak{B}}_A$$

für jedes $\mathfrak{Z}_0 \in M(T(\mathbf{C}))$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathfrak{Z}$, so gilt $\tilde{\mathfrak{X}}_A \subseteq \mathfrak{Z}$. Dies folgt aus (4) mit $\mathfrak{Z}_0 = \tilde{\mathfrak{X}}_A$. Die Verknüpfungen $\boxed{*}$ sind zwar auf die Verknüpfungen reeller Komplexe zurückgeführt. Die Verknüpfungen reeller Komplexe sind jedoch nur in Spezialfällen praktisch durchführbar. Daher läßt sich $\mathfrak{Z}$ nicht einfach bestimmen.

Für die I-Hülle der Lösung von (1) gilt

$$\hat{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \hat{\mathfrak{A}}_A \boxdot \hat{\mathfrak{X}}_A \boxplus \hat{\mathfrak{B}}_A =: \mathfrak{X}_1 . \tag{5}$$

Konvergiert das Iterationsverfahren

$$\mathfrak{X}_{m+1} = \hat{\mathfrak{A}}_A \boxdot \mathfrak{X}_m \boxplus \hat{\mathfrak{B}}_A$$

für jedes $\mathfrak{X}_0 \in M(I(\mathbf{C}))$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\mathfrak{X}$, so gilt $\hat{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \mathfrak{X}$. Dies folgt aus (5) mit $\mathfrak{X}_0 = \hat{\mathfrak{X}}_A$ und vollständiger Induktion. Die Verknüpfungen $\boxed{*}$ für Elemente aus $M(I(\mathbf{C}))$ sind auf die Verknüpfungen reeller Intervalle zurückgeführt und lassen sich daher praktisch einfach durchführen. Da für $\mathfrak{X}_A \in M(A,\mathbf{C})$ allgemein gilt

$$\{\mathfrak{X}_A\} \subseteqq \overline{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \widetilde{\mathfrak{X}}_A \subseteqq \hat{\mathfrak{X}}_A ,$$

folgt daher $\{\mathfrak{X}_A\} \subseteqq \mathfrak{X}$, d. h., faßt man den Fixpunkt $\mathfrak{X} \in M(I(\mathbf{C}))$ als Menge von Matrizen auf, so ist $\mathfrak{X}_A(t)$ für jedes $t \in A$ in dieser Menge enthalten.

Unsere Aufgabe lautet daher:

Gegeben sei die Gleichung

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \boxed{\cdot} \mathfrak{X} \boxed{+} \mathfrak{B}; \qquad \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M(I(\mathbf{C})) .$$

(Wir schreiben hier und im folgenden $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ statt $\hat{\mathfrak{A}}_A$ bzw. $\hat{\mathfrak{B}}_A$, da es im weiteren Verlauf der Untersuchungen nicht darauf ankommt, wie man die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhalten hat.) Man bestimme durch Iteration das eindeutig bestimmte Element $\mathfrak{X} \in M(I(\mathbf{C}))$.

Dabei stellt sich natürlich sofort die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein eindeutiger Fixpunkt existiert, bzw. sich für beliebiges $\mathfrak{X}_0$ Konvergenz einstellt.

Dieser Fragenkreis wird in einer anschließenden Arbeit ausführlich behandelt werden.

2. Bestimmung von Einschließungsmengen bei nichtlinearen Gleichungen

Wir betrachten jetzt das nichtlineare System

$$\mathfrak{x}_A(t) = \mathfrak{g}_A(\mathfrak{a}_A(t), \mathfrak{x}_A(t))$$

mit

$$\mathfrak{x}_A(t) := (x_A^1(t), x_A^2(t), \ldots, x_A^n(t)), \; \mathfrak{g}_A(\mathfrak{a}_A(t), \mathfrak{x}_A(t)) := (g_A^1(\mathfrak{a}_A(t), \mathfrak{x}_A(t)), \ldots, g_A^n(\mathfrak{a}_A(t), \mathfrak{x}_A(t)))$$

und $\mathfrak{a}_A(t) := (a_A^1(t), a_A^2(t), \ldots, a_A^r(t))$. Dabei seien die $g_A^i(\mathfrak{a}_A(t), \mathfrak{x}_A(t))$ $i = 1(1)n$, rationale Funktionen der fest vorgegebenen Funktionen $a_A^i(t)$, $i = 1(1)\,r$, und der gesuchten Funktionen $x_A^i(t)$, $i = 1(1)\,n$.

Ein solches System ist praktisch in den wenigsten Fällen einfach auflösbar. Wir beschränken uns deshalb darauf, eine Einschließungsmenge für den Komplex $\{\mathfrak{x}_A\}$ einer Lösung zu bestimmen. Dies führt wie bei den linearen Gleichungen auf die Aufgabe, einen Vektor $\mathfrak{x} \in V(I(\mathbf{C}))$ zu finden, so daß

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{g}_{A\,\boxed{*}}(\hat{\mathfrak{a}}_A, \mathfrak{x})$$

gilt ($\hat{\mathfrak{a}}_A$ ist die I-Hülle von $\mathfrak{a}_A(t)$; der Index $\boxed{*}$ deutet an, daß alle Rechenoperationen in der Arithmetik $\boxed{*}$ auszuführen sind; siehe Definition 6).

Auch diese Aufgabe, einen Vektor $\mathfrak{x} \in V(I(\mathbf{C}))$, der den Komplex $\{\mathfrak{x}_A\}$ enthält, zu finden, wird in einer folgenden Arbeit behandelt.

Literatur

1 G. ALEFELD, Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einige Anwendungen, Diss., Universität Karlsruhe 1968.
2 N. APOSTOLATOS und U. KULISCH, Grundlagen einer Intervallrechnung für Matrizen und einige Anwendungen, Elektronische Rechenanlagen 10, H. 2, S. 73–83 (1968).
3 J. HERZBERGER, Über metrische Eigenschaften von Mengensystemen und einige Anwendungen, Diss., Universität Karlsruhe 1969.
4 U. KULISCH, Grundzüge der Intervallrechnung, Auszug einer im W. S. 1967/68 an der Universität Karlsruhe gehaltenen Vorlesung, erscheint als Taschenbuch im Bibliographischen Institut Mannheim.
5 O. MAYER, Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen, Diss., Universität Karlsruhe 1968.

Manuskripteingang: 7. 6. 1969

Anschrift: Dr. G. ALEFELD, Institut für Angewandte Mathematik und Rechenzentrum der Universität, 75 Karlsruhe, Englerstraße 2