

Zusammenfassung: Zu einer nichtsingulären $n \times n$ -Matrix soll die Inverse durch iterative Einschließung mit Hilfe von Intervallmatrizen angenähert werden. Hierzu werden, ausgehend von einer geeigneten Näherung für die Inverse, Folgen von einschließenden Intervallmatrizen gebildet, welche von k -ter Ordnung gegen die Inverse konvergieren. Nach einer kurzen Herleitung der wichtigsten Grundbegriffe und Regeln im Zusammenhang mit Intervallmatrizen wird die Aufgabenstellung genau umrissen. In Satz I wird dann ein erstes Verfahren mit einem notwendigen und hinreichenden Konvergenzkriterium angegeben. Daran anschließend wird untersucht, in welchem Zusammenhang die Konvergenzgeschwindigkeit und der Rechenaufwand bei diesen Verfahren stehen. Satz II gibt dann für eine Modifikation dieser Verfahren, welche jeweils monotone Folgen von Intervallmatrizen liefern, eine Konvergenzbedingung an. Die in beiden Sätzen angeführten Verfahren können als Verallgemeinerungen des bekannten SCHULZschen Iterationsverfahren angesehen werden. Der letzte Teil dieser Arbeit enthält Algol-60-Prozeduren zur Durchführung eines aus beiden Sätzen kombinierten Algorithmus unter Berücksichtigung der Rundungsfehler. Abschließend werden dazu einige numerische Beispiele angegeben.

Summary: Given a nonsingular $n \times n$ -matrix A , we are looking for bounds for the elements of A^{-1} . In doing so, we construct sequences of interval matrices which converge against A^{-1} . After discussing some aspects of interval arithmetic we give two methods which are yielding simultaneously lower and upper bounds for the elements of A^{-1} . Both methods are combined under practical aspects in an ALGOL-60 procedure "invmat". For special matrices another procedure "einschliessungsmenge" gives us an interval matrix for starting the procedure "invmat".

1. Grundbegriffe, Hilfsmittel, Problemstellung

In dieser Arbeit bezeichnen wir reelle $n \times n$ -Matrizen mit $\mathcal{X} = (x_{ij})$, $\mathcal{Y} = (y_{ij})$ usw.; daneben betrachten wir noch $n \times n$ -Intervallmatrizen $\mathcal{X} = (X_{ij})$, $\mathcal{Y} = (Y_{ij})$ usw., das sind solche Matrizen, deren Elemente reelle, abgeschlossene Intervalle sind. Für zwei Intervalle $A = [a^1, a^2]$, $B = [b^1, b^2]$ aus $I(\mathbb{R})$ sind bekanntlich die vier Verknüpfungen $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ definiert als $A * B := \{a * b : a^1 \leq a \leq a^2, b^1 \leq b \leq b^2\}$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, :\}$, und durch einfache Verknüpfungen der Intervallschranken erklärt (siehe [6]). Identifiziert man die reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit den Punktintervallen $A = [a, a] \in I(\mathbb{R})$, dann erklärt man $a * B = B * a := B * [a, a]$, $*$ $\in \{+, -, \cdot, :\}$.

Die eingangs erwähnten reellen Matrizen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$ sind dann ebenfalls spezielle Intervallmatrizen. Verknüpfungen von Intervallmatrizen sind komponentenweise über die Verknüpfungen von Intervallen wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = (Z_{ij}) &= \mathcal{X} + \mathcal{Y} = (X_{ij}) + (Y_{ij}) := (X_{ij} + Y_{ij}) \\ \mathcal{Z} = (Z_{ij}) &= \mathcal{X} \mathcal{Y} = (X_{ij})(Y_{ij}) := \left(\sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj} \right) \end{aligned}$$

sowie $a \cdot \mathcal{X} = a \cdot (X_{ij}) := (a \cdot X_{ij})$, $a \in \mathbb{R}$.

Dabei kann jede der Matrizen $\mathcal{X}$ oder $\mathcal{Y}$ auch eine reelle Matrix sein; kommen nur reelle Matrizen vor, so gehen diese Verknüpfungen in die gewöhnlichen Verknüpfungen von Matrizen über. Unter dem Betrag $|A|$ eines Intervalles $A = [a^1, a^2]$ versteht man die nichtnegative Zahl $|A| := \max\{|a^1|, |a^2|\}$; dementsprechend wird die nichtnegative Matrix $|\mathcal{A}|$ zu einer Intervallmatrix $\mathcal{A}$ komponentenweise gebildet als $|\mathcal{A}| = (|A_{ij}|) := (|A_{ij}|)$. Hierfür gelten bekanntlich die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sigma \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \sigma \quad (\sigma = \text{Nullmatrix}) & (1.1) \\ |\mathcal{A} + \mathcal{Z}| &\leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{Z}| & (1.2) \\ |a \cdot \mathcal{Z}| &= |a| \cdot |\mathcal{Z}|, \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{siehe [5]}). & (1.3) \end{aligned}$$

Daneben ist zu einem Intervall $A = [a^1, a^2]$ noch der Durchmesser $d(A) := a^2 - a^1$ erklärt. Entsprechend ordnet man jeder Intervallmatrix $\mathcal{A}$ die nichtnegative

Durchmesser matrix $d(\mathcal{A}) := (d(A_{ij}))$ zu. Dafür lassen sich folgende einfache Regeln beweisen:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{A} + \mathcal{Z}) &= d(\mathcal{A}) + d(\mathcal{Z}) & (1.4) \\ d(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) &= d(\mathcal{A}) \cdot |\mathcal{Z}|, \quad d(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) = |\mathcal{A}| \cdot d(\mathcal{Z}) & (1.5) \\ d(\mathcal{A}) &= \sigma \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A} & (1.6) \end{aligned}$$

Beweis von (1.5):

Im eindimensionalen Falle, d. h. für Intervalle, sind (1.4) und (1.5) trivial. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) &= d\left(\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} b_{kj}\right)\right) = \left(d\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} b_{kj}\right)\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n d(A_{ik} b_{kj})\right) = \left(\sum_{k=1}^n d(A_{ik}) |b_{kj}|\right) = d(\mathcal{A}) \cdot |\mathcal{Z}|. \end{aligned}$$

Ein weiterer Begriff ist der Mittelpunkt $m(A) := (a^1 + a^2)/2$ eines Intervalles $A = [a^1, a^2]$. Analog bildet man zur Intervallmatrix $\mathcal{A}$ die Matrix $m(\mathcal{A}) := (m(A_{ij}))$. Für diese Mittelpunktsmatrix lassen sich die später benötigten Rechenregeln

$$\begin{aligned} m(\mathcal{A} + \mathcal{Z}) &= m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{Z}) & (1.7) \\ m(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) &= m(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{Z}, \quad m(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) = \mathcal{A} m(\mathcal{Z}) & (1.8) \\ m(\mathcal{A}) &= \mathcal{A} & (1.9) \end{aligned}$$

beweisen.

Beweis von (1.8):

Die Aussagen (1.7) und (1.8) ergeben sich für Intervalle sofort aus der Definition des Mittelpunktes. Damit gilt:

$$\begin{aligned} m(\mathcal{A} \cdot \mathcal{Z}) &= m\left(\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} b_{kj}\right)\right) = \left(m\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} b_{kj}\right)\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m(A_{ik} b_{kj})\right) = \left(\sum_{k=1}^n m(A_{ik}) b_{kj}\right) = m(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Für Folgen von Intervallmatrizen $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^\infty$ läßt sich eine Konvergenz erklären. Bekanntlich konvergiert die Folge

von Intervallen $(X_n)_{n=1}^{\infty} = ([x_n^1, x_n^2])_{n=1}^{\infty}$ gegen das Intervall $X = [x^1, x^2]$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i, i = 1, 2$ gilt. Die Folge von Intervallmatrizen $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen die Intervallmatrix $\mathcal{X}$, i. Z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, genau dann, wenn dies komponentenweise gilt. Ist für zwei Intervallmatrizen $\mathcal{X} = (X_{ij}), \mathcal{Y} = (Y_{ij})$ für jede Komponente $X_{ij} \subset Y_{ij}$ erfüllt, so schreiben wir kurz $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$; ist dabei $\mathcal{X}$ eine reelle Matrix $\mathcal{X}$, so schreiben wir dafür auch $\mathcal{X} \in \mathcal{Y}$. Die eingangs aufgeführten Verknüpfungen von Intervallmatrizen besitzen dann die beiden wichtigen Eigenschaften:

$$\mathcal{X} \in \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X} * \mathcal{Y} \in \mathcal{X} * \mathcal{Y} \text{ (Einschließungseigenschaft)}$$

oder allgemein

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}, \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X}_1 * \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{X} * \mathcal{Y} \text{ (wobei } * \in \{+, -, \cdot\} \text{)}$$

sei (Inklusionsmonotonie).

Liegt eine Folge $\mathcal{X}_1 \supset \mathcal{X}_2 \supset \mathcal{X}_3 \supset \dots$ von Intervallmatrizen vor, so konvergiert diese stets gegen eine Intervallmatrix $\mathcal{X}$. Sie konvergiert gegen eine Punktmatrix genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{X}_n) = \sigma$ gilt. Ist eine Folge

$(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$ vorgelegt, und gilt stets $\mathcal{X} \in \mathcal{X}_n$, dann ist die Ordnung der Konvergenz von $(d(\mathcal{X}_n))_{n=1}^{\infty}$ gegen σ ein natürliches Maß für die Konvergenz von $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $\mathcal{X}$.

Für zwei Intervallmatrizen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ definiert man den Durchschnitt $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} := (X_{ij} \cap Y_{ij})$, und der Durchschnitt ist leer, falls ein Paar (r, k) existiert, so daß $X_{rk} \cap Y_{rk} = \emptyset$ ist. Man beweist für den Durchschnitt zweier Intervallmatrizen sofort die Beziehung:

$$d(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \leq \inf \{d(\mathcal{X}), d(\mathcal{Y})\} = (\min \{d(X_{ij}), d(Y_{ij})\}).$$

Damit sind die wichtigsten Hilfsmittel für unsere späteren Überlegungen bereitgestellt.

Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit nun die Aufgabe, zu einer nichtsingulären, reellen Matrix $\mathcal{A}$ eine Folge von Intervallmatrizen $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ derart zu bestimmen, daß gilt:

$$\text{jedes Glied der Folge enthält die Inverse von } \mathcal{A}, \text{ d. h. } \mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_n, n \geq 1; \quad (1.11)$$

$$\text{die Folge } (\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert gegen die Inverse von } \mathcal{A}, \text{ d. h. } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{A}^{-1}. \quad (1.12)$$

Eine einfache Möglichkeit zur Konstruktion einer solchen Folge $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ ist die nun folgende. Ausgehend von einer Intervallmatrix $\mathcal{X}_0$, welche $\mathcal{A}^{-1}$ enthält, iteriert man gemäß der Vorschrift:

$$\mathcal{X}_{n+1} := (\mathcal{E} - \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}) \mathcal{X}_n + \mathcal{J}^{-1}$$

($\mathcal{E}$ ist die Einheitsmatrix; $\mathcal{J}$ die Matrix der hier durchweg als von Null verschieden vorausgesetzten Diagonalelemente von $\mathcal{A}$). Man erhält dadurch eine Folge

$(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ von Intervallmatrizen, für welche $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_n, n \geq 1$ gilt. Ferner erhält man die Aussage:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{A}^{-1} \iff \rho(\|\mathcal{E} - \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}\|) < 1$$

(ρ = Spektralradius), (vergleiche dazu [5]). Über das Konvergenzverhalten dieser Iterationsfolge läßt sich nun beweisen, daß für die Folge der Durchmessermatrizen gilt:

$$d(\mathcal{X}_{n+1}) \leq \|\mathcal{E} - \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}\| \cdot d(\mathcal{X}_n) \text{ mit } \|\mathcal{E} - \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}\| < 1 \text{ für eine Norm } \|\cdot\|.$$

Im nun folgenden Abschnitt 2 geben wir Verfahren an, welche nicht nur ein schwächeres Konvergenzkriterium als das obige erfordern, sondern dazu noch von k-ter Ordnung gegen die Inverse $\mathcal{A}^{-1}$ konvergieren.

2. Verfahren

Als ein erstes derartiges Verfahren bringen wir den folgenden

Satz I: Gegeben sei die nichtsinguläre Matrix $\mathcal{A}$ und eine Intervallmatrix $\mathcal{X}_0$ mit $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren

$$\mathcal{X}_{n+1} := \left[\begin{array}{c} \dots [\mathcal{X}_n (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n)] \dots \\ (k-2) \end{array} \right] \cdot (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n) \quad (2.1)$$

(für $k > 1$) die folgenden Aussagen:

$$\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_n \text{ für } n \geq 0. \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{A}^{-1} \iff \rho(\|\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_0)\|) < 1. \quad (2.3)$$

Mit einer monotonen und multiplikativen Matrixnorm

$$\|\cdot\| \text{ gilt: a) } \|d(\mathcal{X}_{n+1})\| \leq c \cdot \|d(\mathcal{X}_n)\|^k \\ \text{b) } \|d(\mathcal{X}_{n+1})\| \leq \|d(\mathcal{X}_0)\| \cdot \|\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_0)\|^{k^{n+1}-1} \quad (2.4)$$

Beweis:

(2.2): Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_0$. Ist nun $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}_n$, so folgt aufgrund der Teilmengeneigenschaft

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n))^{k-1} + m(\mathcal{X}_n) \{ \mathcal{E} + (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + \dots + (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n))^{k-2} \} = \\ = [\dots [\mathcal{A}^{-1} (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n)] \dots] (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n) \\ \in [\dots [\mathcal{X}_n (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n)] \dots] (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n) = \mathcal{X}_{n+1}.$$

Also enthalten alle Glieder der Folge $(\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ die Inverse $\mathcal{A}^{-1}$.

(2.3): Mit Hilfe der Regeln (1.7), (1.8) und (1.9) für die Mittelpunktmatrix $m(\mathcal{X})$ einer Intervallmatrix $\mathcal{X}$ erhalten wir aus der Iterationsvorschrift (2.1):

$$m(\mathcal{X}_{n+1}) = [\dots [m(\mathcal{X}_n) (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n)] \dots] \cdot (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n)) + m(\mathcal{X}_n)$$

oder kurz

$$(2.1)^* \quad m(\mathcal{X}_{n+1}) = m(\mathcal{X}_n) \sum_{v=0}^{k-1} (\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_n))^v.$$

Die Mittelpunktmatrizen $m(\mathcal{X}_n)$ der Iterierten gehören also einer Iterationsvorschrift, für welche bekannt ist, daß die Folge $(m(\mathcal{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ genau dann gegen $\mathcal{A}^{-1}$ konvergiert, wenn für den Spektralradius $\rho(\mathcal{E} - \mathcal{A} m(\mathcal{X}_0)) < 1$ gilt (siehe dazu [2]). Mit Hilfe dieser Tatsache soll nun (2.3) bewiesen werden.

Sei zunächst $\rho(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)) < 1$, dann folgt bei Anwendung der Regeln (1.4), (1.5) und (1.6) für den Durchmesser $d(\mathcal{H})$ einer Intervallmatrix $\mathcal{H}$ aus der Vorschrift (2.1):

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}_1) &= d(\mathcal{H}_0) |\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)|^{k-1} \\ d(\mathcal{H}_2) &= d(\mathcal{H}_1) |\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_1)|^{k-1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich aus der Gleichung für $d(\mathcal{H}_1)$ und mit Hilfe (2.1)* bei $n = 0$:

$$d(\mathcal{H}_2) = d(\mathcal{H}_0) |\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)|^{k-1} |(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^k|^{k-1}.$$

Eine wiederholte Durchführung dieser Schlußweise führt schließlich auf

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) = d(\mathcal{H}_0) \prod_{v=0}^n |(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_v))|^{k-1}.$$

Wegen $\rho(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)) < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^n = \sigma$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^{kn} = \sigma$. Damit sind aber auch $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^{kn}|^{k-1} = \sigma$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} ||(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^{kn}|^{k-1}| = 0$ (für beliebige Norm $|\cdot|$).

In dem Produkt für $d(\mathcal{H}_{n+1})$ sind also für ein bestimmtes N und alle $n > N$ alle Faktoren in der Norm kleiner als eine Größe $\alpha < 1$. Daraus schließt man aber $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{H}_n) = 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{H}_n) = \sigma$. Da die Folge $(m(\mathcal{H}_n))_{n=0}^\infty$ wegen der gemachten Voraussetzung gegen $\mathcal{A}^{-1}$ konvergiert und stets $m(\mathcal{H}_n) \in \mathcal{H}_n$ gilt, folgert man mit Hilfe (1.6) dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n = \mathcal{A}^{-1}$.

Konvergiert andererseits $(\mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ stets gegen $\mathcal{A}^{-1}$, dann konvergiert auch die Folge $(m(\mathcal{H}_n))_{n=0}^\infty$ notwendig stets gegen $\mathcal{A}^{-1}$. Da wir gezeigt haben, daß letztere Folge der Vorschrift (2.1) genügt, folgt deshalb nach dem oben Erwähnten, daß notwendig $\rho(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)) < 1$ gilt.

(2.4) a): Aus (2.1) folgt bei Anwendung der Regeln (1.4), (1.5) und (1.6): $d(\mathcal{H}_{n+1}) = d(\mathcal{H}_n) |\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n)|^{k-1}$.

Hieraus folgert man:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}_{n+1}) &= d(\mathcal{H}_n) |\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1} - m(\mathcal{H}_n))|^{k-1} \\ &\leq d(\mathcal{H}_n) \{|\mathcal{A}| |\mathcal{A}^{-1} - m(\mathcal{H}_n)|\}^{k-1} \\ &\leq d(\mathcal{H}_n) |\mathcal{A}| \cdot \frac{1}{2} \cdot d(\mathcal{H}_n)^{k-1}. \end{aligned}$$

Wendet man darauf eine monotone und multiplikative Matrixnorm an, dann folgt schließlich

$$\|d(\mathcal{H}_{n+1})\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \|\mathcal{A}\|^{k-1} \|d(\mathcal{H}_n)\|^k.$$

(Die Durchmessermatrizen konvergieren also von k -ter Ordnung gegen die Nullmatrix!)

(2.4) b): Aus der im Beweis von (2.3) hergeleiteten Produktformel für $d(\mathcal{H}_n)$ folgt durch Anwendung einer multiplikativen Norm

$$\|d(\mathcal{H}_{n+1})\| \leq \left\{ \prod_{v=0}^n \|(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_v))\|^{k-1} \right\} \|d(\mathcal{H}_0)\|.$$

Weiter folgt aus der Multiplikativität und Monotonie der Norm $|\cdot|$ noch:

$$\|(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))\|^{kv} = \|(\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0))^{kv}\| \leq \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\|^{kv}.$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \|d(\mathcal{H}_{n+1})\| &\leq \|d(\mathcal{H}_0)\| \left\{ \prod_{v=0}^n \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_v)\|^{kv} \right\}^{k-1} \\ &= \|d(\mathcal{H}_0)\| \cdot \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\|^{1+k^2+\dots+k^n}^{k-1} \\ &= \|d(\mathcal{H}_0)\| \cdot \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\|^{\frac{k^{n+1}-1}{k-1}}^{k-1} \\ &= \|d(\mathcal{H}_0)\| \cdot \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\|^{k^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

Somit ist der Satz 2.4 bewiesen.

Mit Hilfe der Formel (2.4) b) läßt sich für ein festes k und für vorgegebenes $\mathcal{H}_0$ eine Schranke n_0 für die maximale Anzahl von nötigen Iterationsschritten angeben, die zur Erzielung einer gewünschten Genauigkeit durchzuführen sind, falls für eine monotone und multiplikative Matrixnorm $\|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\| < 1$ gilt. Das zu (2.1) ähnliche Iterationsverfahren

$$(2.1)^{**} \mathcal{H}_{n+1} := m(\mathcal{H}_n) \sum_{v=0}^{k-2} (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))^v + \mathcal{H}_n (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))^{k-1}$$

liefert, ausgehend von derselben Intervallmatrix $\mathcal{H}_0$, im allgemeinen eine andere Folge als (2.1). Dies sieht man folgendermaßen ein: Multipliziert man in (2.1) aus (vgl. dazu [4]), so erhält man

$$\mathcal{H}_{n+1} = m(\mathcal{H}_n) \sum_{v=0}^{k-2} (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))^v + [\dots [\mathcal{H}_n (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n)) \cdot m(\mathcal{H}_n)] \cdot (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))] \dots (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n)).$$

Da schon beim Auftreten einer Intervallmatrix die Matrizenmultiplikation nicht mehr assoziativ ist (vgl. [4]), gilt also i. a.

$$\mathcal{H}_n (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))^{k-1} \neq [\dots [\mathcal{H}_n (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))] \dots (\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_n))].$$

Das Verfahren (2.1)** wurde in [1] beschrieben. Es lassen sich ähnliche Ergebnisse wie für (2.1) beweisen. Beim Rechnen auf einer Rechenanlage müssen in (2.1) bzw. (2.1)** auch die Terme, welche keine echten Intervalle enthalten, intervallmäßig berechnet werden, wenn man die Einschließung noch sichern will. Unter diesen Voraussetzungen überlegt man sich leicht, daß pro Iterationsschritt für das Verfahren (2.1) bzw. (2.1)** die folgende Anzahl von Operationen erforderlich ist ($\mathcal{A}$ sei eine $m \times m$ -Matrix):

	Verfahren (2.1)	Verfahren (2.1)**
Multiplikationen	$k \cdot m^3$	$2 \cdot (k-1) \cdot m^3$
Additionen	$km^3 - m^2 + m$	$2(k-1)m^3 + (3-2k)m^2 + (k-1)m$

Unter Vernachlässigung niedriger Potenzen ist also der Rechenaufwand beim Vorgehen nach (2.1) proportional zu k , beim Verfahren (2.1)** dagegen proportional zu $2(k-1)$. Für $k > 2$ ist also Verfahren (2.1) vorzuziehen.

Nun sind wir in der Lage, aufgrund der eben angestellten Überlegungen und mit Hilfe der Aussagen von Satz I, ein optimales Verfahren der Art von (2.1) angeben zu können. Hierbei erhebt sich die Frage, wie man $k > 1$ zu wählen hat, um mit einem vorgegebenen Rechenaufwand eine möglichst gute Genauigkeit zu erzielen. Um dies zu beantworten, gehen wir von der Beziehung

$$\|d(\mathcal{H}_n)\| \leq \|d(\mathcal{H}_0)\| \cdot \|\xi - \mathcal{A} m(\mathcal{H}_0)\|^{k^{n+1}-1}$$

von Satz I aus. Es sei hier $\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_0)\| < 1$, und es seien ferner $k_1 > 1$ und $k_2 > 1$ zwei verschiedene ganze positive Zahlen. Mit (V_{k_1}) bzw. (V_{k_2}) bezeichnen wir die beiden Verfahren, welche man aus (2.1) erhält, wenn man jeweils $k = k_1$ bzw. $k = k_2$ setzt. Der Rechenaufwand für die Durchführung eines Iterationsschrittes ist bei (V_{k_1}) proportional zu k_1 und bei (V_{k_2}) proportional zu k_2 . Nach einer gewissen Anzahl von Iterationsschritten p_1 bzw. p_2 gelte $k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2$, d. h. der Rechenaufwand ist beide Male der gleiche. Mit Hilfe der Formel für $\|d(\mathcal{H}_n)\|$ kann die dann jeweils erreichte Genauigkeit mit Hilfe von $k_1^{p_1} - 1$ bzw. $k_2^{p_2} - 1$ abgeschätzt werden. Wir fordern, daß für jedes k_1 die Beziehung $k_1^{p_1} - 1 > k_2^{p_2} - 1$ bzw. $k_1^{p_1} > k_2^{p_2}$ für alle p_1, p_2 und k_2 gilt; dann folgt wegen $p_2 = \frac{k_1 \cdot p_1}{k_2}$ daraus $k_1^{p_1} > k_2^{\frac{k_1 p_1}{k_2}}$, also $k_1^{1/k_2} > k_2^{1/k_2}$.

Da die Funktion $k^{1/k}$ für ganzzahliges k ihr Maximum bei $k = 3$ annimmt, folgt notwendig $k_1 = 3$. Für $k = 3$ haben wir in diesem Sinne ein optimales Verfahren der Art von (2.1) vorliegen.

In Satz I wurde bewiesen, daß unter der Voraussetzung $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_0$ auch alle Iterierten $\mathcal{H}_n$ die Inverse $\mathcal{A}^{-1}$ enthalten. Mit $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_n$ gilt auch $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_{n+1}$ und damit $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_{n+1} \cap \mathcal{H}_n$. Wegen $d(\mathcal{H}_{n+1} \cap \mathcal{H}_n) \leq \inf\{d(\mathcal{H}_n), d(\mathcal{H}_{n+1})\}$ ist also $\mathcal{H}_{n+1} \cap \mathcal{H}_n$ eine Intervallmatrix, welche $\mathcal{A}^{-1}$ nicht schlechter einschließt als $\mathcal{H}_{n+1}$. Es liegt daher nahe, nach jedem Iterationsschritt in (2.1) den Durchschnitt zu bilden und mit der so erhaltenen Intervallmatrix die Iteration fortzusetzen. Dieses Vorgehen beschreibt der nächste Satz.

Satz II: Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $\mathcal{A}$ und die Intervallmatrix $\mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{n+1} := [\dots [\mathcal{H}_n(\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_n)) + m(\mathcal{H}_n)](\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_n)) + m(\mathcal{H}_n)] \dots (\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_n)) + m(\mathcal{H}_n) \\ \mathcal{H}_{n+1} := \mathcal{H}_{n+1} \cap \mathcal{H}_n \end{cases} \quad (2.5)$$

(für $k > 1$) die folgenden Aussagen:

Es ist $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_n$ für $n \geq 0$. (2.6)

$(\mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gegen $\mathcal{A}^{-1}$, falls für alle $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_0$

$\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H})\|) < 1$ ist. (2.7)

Für eine monotone und multiplikative Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|d(\mathcal{H}_{n+1})\| \leq C \cdot \|d(\mathcal{H}_n)\|^k. \quad (2.8)$$

Beweis:

(2.6) Wie in Satz I bei (2.2) folgt $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_{n+1}$, falls $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_n$ gilt. Damit ist aber $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \cap \mathcal{H}_{n+1}$.

(2.7): Da für die Folge $(\mathcal{H}_n)_{n=0}^\infty$ stets $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots$

gilt, besitzt sie einen Grenzwert $\hat{\mathcal{H}}$. Wir zeigen nun: Aus $d(\hat{\mathcal{H}}) \neq \sigma$ folgt die Existenz einer Matrix $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_0$ mit $\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H})\|) \geq 1$ (im Widerspruch zur Voraussetzung).

Aus (2.5) folgt für

$\hat{\mathcal{H}} := [\dots [\mathcal{H}(\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})) + m(\hat{\mathcal{H}})] \dots (\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})) + m(\hat{\mathcal{H}})]$ die Gleichung $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} \cap \hat{\mathcal{H}}$. Daraus folgt $\hat{\mathcal{H}} \subset \hat{\mathcal{H}}$, also $d(\hat{\mathcal{H}}) \leq d(\hat{\mathcal{H}})$. Für die Durchmesser-matrizen gilt aber:

$$d(\hat{\mathcal{H}}) \leq d(\hat{\mathcal{H}}) = d(\hat{\mathcal{H}}) \|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|^{k-1} \quad \text{oder} \\ d(\hat{\mathcal{H}}) \{\xi - \|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|^{k-1}\} \leq \sigma.$$

Wäre $\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|) < 1$, so wäre auch $\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|^{k-1}) < 1$. Dann würde $(\xi - \|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|^{k-1})^{-1}$ existieren und nichtnegativ sein. Hieraus folgte $d(\hat{\mathcal{H}}) \leq \sigma$, also $d(\hat{\mathcal{H}}) = \sigma$ im Widerspruch zur obigen Annahme $d(\hat{\mathcal{H}}) \neq \sigma$. Also müßte $\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\hat{\mathcal{H}})\|) \geq 1$ sein.

(2.8): Die Behauptung folgt wie in Satz I, (2.4) unter Berücksichtigung von $d(\mathcal{H}_{n+1}) \leq d(\mathcal{H}_{n+1})$.

Das Verfahren (2.5) hat gegenüber (2.1) den Vorteil, daß man eine ineinander geschachtelte Folge von Intervall-matrizen erhält. Damit besitzt man beim Rechnen auf einer Rechenanlage ein einfaches Abbruchkriterium. Dagegen hat Verfahren (2.1) den Vorteil, daß man an die Startmatrix $\mathcal{H}_0$ weniger einschränkende Forderungen für die Konvergenz der Iterationsfolge gegen $\mathcal{A}^{-1}$ stellen muß. Insbesondere kann die Durchmesser-matrix $d(\mathcal{H}_0)$ beliebig große Elemente haben, wenn nur für die Mittelpunkts-matrix $m(\mathcal{H}_0)$ die Konvergenzbedingung erfüllt ist. Das für die Konvergenz von (2.5) in (2.7) angegebene Kriterium ist für das praktische Rechnen wertlos. Man kann jedoch die folgende hinreichende Bedingung dafür angeben.

Satz III: Sei $\mathcal{H}_0$ eine Intervallmatrix mit $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_0$, und es gelte für eine monotone und multiplikative Matrix-norm $\|\cdot\|$ die Beziehung $\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_0)\| < 1$. Ist die Ungleichung

$$\|d(\mathcal{H}_0)\| < 2 \frac{1 - \|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_0)\|}{\|\mathcal{A}\|}$$

erfüllt, so gilt für alle $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_0$: $\rho(\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H})\|) < 1$.

Dieser Satz III gestattet also, mit Hilfe von bekannten Größen die Anwendbarkeit von Verfahren (2.5) nachzu-prüfen.

Zum Abschluß dieser Untersuchungen betrachten wir noch kurz ein Beispiel, welches zeigt, daß Verfahren (2.5) nicht notwendig gegen $\mathcal{A}^{-1}$ konvergiert, wenn dies bei Verfahren (2.1) der Fall ist.

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \xi - \mathcal{L}$, wobei speziell

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,6 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}; \text{ wegen } \rho(\mathcal{L}) < 1 \text{ existiert dann } \mathcal{A}^{-1}.$$

Wählen wir in (2.1) $k = 2$, $m(\mathcal{H}_0) = \xi$, dann konvergiert das Verfahren wegen $\rho(\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_0)) = \rho(\mathcal{L}) < 1$ gegen $\mathcal{A}^{-1}$.

Setzt man dagegen in (2.5) $k = 2$, $m(\mathcal{H}_0) = \xi$ und $d(\mathcal{H}_0) = 2 \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit z. B. $D = 3$, dann bleibt die Iteration (wie eine einfache Durchmesser-berechnung zeigt) auf der Ausgangsmatrix $\mathcal{H}_0$ stehen. Es liegt also keine Kon-vergenz gegen $\mathcal{A}^{-1}$ vor.

3. Algorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir nun die in den Sätzen I und II hergeleiteten Verfahren zur praktischen Anwen-dung kombinieren. Dabei gehen wir aus von einer Matrix $\mathcal{A} = \xi - \mathcal{L}$ mit $\|\mathcal{L}\| < 1$. Mit $m(\mathcal{H}_0) = \xi$ ist $\|\xi - \mathcal{A}m(\mathcal{H}_0)\| = \|\mathcal{L}\| < 1$, und das Verfahren (2.1) konvergiert daher für eine beliebige Intervallmatrix $\mathcal{H}_0$ mit $m(\mathcal{H}_0) = \xi$. Um die Einschließung $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{H}_0$ zu sichern, bestimmen wir $\mathcal{H}_0$ folgendermaßen: Aus $\mathcal{A}\mathcal{H} = (\xi - \mathcal{L})\mathcal{H} = \xi$ folgt $\mathcal{H} = \mathcal{L}\mathcal{H} + \xi$ und damit unter Verwendung einer multipli-kativen und einer Vektornorm zugeordneten Matrixnorm $\|\mathcal{H}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathcal{L}\|} =: c$. Bei Verwendung der Spaltensummen-

bzw. Zeilensummennorm gilt dann für alle Elemente von $\mathcal{X} = (x_{ij})$: $-c \leq x_{ij} \leq c$. Es sei $\mathcal{X} = (X_{ij})$ mit

$$X_{ij} = \begin{cases} [-c, c] & \text{für } i \neq j \\ [-c, 2+c] & \text{für } i = j \end{cases}; \text{ dann sind mit } \mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \text{ die}$$

Voraussetzungen für die Konvergenz von Verfahren (2.1) erfüllt. Die Bestimmung dieser Matrix $\mathcal{X}_0$ wird in der Prozedur "einschliessungsmenge" durchgeführt.

Nach Verfahren (2.1) wird solange iteriert, bis die in Satz III angegebene Bedingung für die Konvergenz von Verfahren (2.5) erfüllt ist. In der angegebenen Prozedur "matinv" wird diese Bedingung mit Hilfe der Norm $\|\mathcal{X}\| = \max_{i,j} |x_{ij}|$ nachgeprüft. Da die Vorschrift (2.5) eine ineinandergeschachtelte Folge von Intervallmatrizen liefert, kann die Iteration abgebrochen werden, wenn auf der Maschine zwei aufeinanderfolgende Näherungen übereinstimmen.

In den nachfolgenden Prozeduren werden die Matrizen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{L}$ als Intervallmatrizen behandelt. Dadurch ist es möglich, eventuell beim Einlesen entstehende Rundungsfehler bei der Iteration mit zu berücksichtigen.

Die angegebenen Prozeduren verwenden als globale Größen die Algol-Prozeduren low, add und mul, welche auf beliebigen Algol-60-Compilern die Intervallverknüpfungen unter Einschluss der Rundungsfehler realisieren. Eine ausführliche Beschreibung dafür findet sich in [2].

A) Die Prozedur "einschliessungsmenge"

Liste der formalen Parameter:

integer n n ist die Ordnung der zu invertierenden Matrix.

array b b steht für eine nxn-Intervallmatrix $\mathcal{L} = ([b_{ij}^1, b_{ij}^2])$; die Feldkomponenten $b[i, j, 1]$ bzw. $b[i, j, 2]$ entsprechen dabei den Intervallschranken b_{ij}^1 bzw. b_{ij}^2 .

array x x steht für die nxn-Intervallmatrix $\mathcal{X}_0$.

label l Die Marke l wird angesprungen, falls keine der beiden betrachteten Normen von $\mathcal{L}$ kleiner als 1 ist

procedure einschliessungsmenge (b, n, x, l);

value n;
integer n;
array b, x;
label l;

begin integer i, j;
real nor, a1, a2, hi;
nor := 0;

comment zeilennorm;

for i:=1 step 1 until n do
begin hi:=0;
for j:=1 step 1 until n do
begin a1 := abs(b[i, j, 1]); a2 := abs(b[i, j, 2]);
hi := - low(-hi - (if a1 greater a2 then a1 else a2))

end j;
if hi greater nor then nor := hi;
if nor notless 1 then goto spaltennorm

end i, zeilennorm;

goto einschl;
spaltennorm: nor := 0;
for j:=1 step 1 until n do

begin hi:=0;
for i:=1 step 1 until n do
begin a1 := abs(b[i, j, 1]); a2 := abs(b[i, j, 2]);
hi := - low(-hi - (if a1 greater a2 then a1 else a2))

end i;
if hi greater nor then nor := hi;
if nor notless 1 then goto l
end j, spaltennorm;

einschl:

a1 := low(1-nor);
a1 := - low(-1/a1);
for i:=1 step 1 until n do
begin for j:=1 step 1 until i-1, i+1 step 1 until n do
begin x[i, j, 1] := - a1;
x[i, j, 2] := a1
end j;
x[i, i, 1] := - a1;
x[i, i, 2] := - low(-2-a1)
end i
end;

B) Die Prozedur "matinv"

Liste der formalen Parameter:

integer n n ist die Ordnung der zu invertierenden Matrix.

array a a steht für eine nxn-Intervallmatrix $\mathcal{A} = ([a_{ij}^1, a_{ij}^2])$; die Feldkomponenten $a[i, j, 1]$ bzw. $a[i, j, 2]$ entsprechen dabei den Intervallschranken a_{ij}^1 bzw. a_{ij}^2 .

array x x steht für eine nxn-Intervallmatrix und ist Durchlaufparameter; beim Aufruf der Prozedur wird vorausgesetzt, daß $\|\mathcal{L} - \mathcal{A} \cdot m(\mathcal{X})\| < 1$ ist und daß für $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ stets $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{X}$ gilt. Nach Verlassen der Prozedur stellt $\mathcal{X}$ die nach Verfahren (2.1) und (2.5) iterativ berechnete Einschließungsmenge für die Inverse dar.

procedure matinv (a, n, x);

value n;
integer n;
array a, x;
begin integer i, j, k;
real u, v, w, na, ndx, ndr, h;
boolean b1, b2;
array s, h1, h2[1:2], y[1:n, 1:2], m[1:n, 1:n],
z, r[1:n, 1:2];
u := low(1/n);
b1 := b2 := false;

comment norm a;

na:=0;
for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
begin v := abs(a[i, j, 1]); w := abs(a[i, j, 2]);
if w less v then w:=v;
if w greater na then na:=w;
z[i, j, 1] := x[i, j, 1]; z[i, j, 2] := x[i, j, 2]
end norm a;

l1:b1:=false;

comment berechnung des mittelpunktes;

```
for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
m[i,j] := (x[i,j,1] + x[i,j,2])/2;
```

comment residuum;

```
for i:=1 step 1 until n do
begin for j:=1 step 1 until n do
begin s[1] := s[2] := 0;
for k:=1 step 1 until n do
begin h1[1] := a[i,k,1]; h1[2] := a[i,k,2];
h2[1] := h2[2] := m[k,j];
mul(h1,h2,h1); add(s,h1,s)
end k;
r[i,j,1] := -s[2]; r[i,j,2] := -s[1]
end j;
r[i,i,1] := low(1 + r[i,i,1]);
r[i,i,2] := -low(-1 - r[i,i,2])
end residuum;
```

comment iterationsschleife;

```
if b2 then for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
begin z[i,j,1] := x[i,j,1];
z[i,j,2] := x[i,j,2]
end;
for i:=1 step 1 until n do
begin for j:=1 step 1 until n do
begin s[1] := s[2] := 0;
for k:=1 step 1 until n do
begin h1[1] := z[i,k,1]; h1[2] := z[i,k,2];
h2[1] := r[k,j,1]; h2[2] := r[k,j,2];
mul(h1,h2,h1); add(s,h1,s)
end k;
h1[1] := h1[2] := m[i,j]; add(s,h1,s);
y[j,1] := s[1]; y[j,2] := s[2]
end j;
for j:=1 step 1 until n do
begin z[i,j,1] := y[j,1];
z[i,j,2] := y[j,2]
end j
end i;
end;
```

comment durchschnitt;

```
if b2 then
l2: begin for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
begin if x[i,j,1] less z[i,j,1] then
begin x[i,j,1] := z[i,j,1]; b1 := true end
if x[i,j,2] greater z[i,j,2] then
begin x[i,j,2] := z[i,j,2]; b1 := true end
end i,j;
goto if b1 then l1 else l3
end;
```

comment durchmesserabfrage;

```
ndr := ndx := 0;
for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
begin v := abs(r[i,j,1]); w := abs(r[i,j,2]);
if w less v then w := v;
if w greater ndr then ndr := w;
h := -low(x[i,j,1] - x[i,j,2]);
if h greater ndr then ndr := h
```

end norm-residuum, norm-durchmesser;

```
w := low(u-ndr);
w := low(w/na);
if ndx less w then begin b2 := true;
goto l2
end
else
begin for i:=1 step 1 until n do
for j:=1 step 1 until n do
begin x[i,j,1] := z[i,j,1];
x[i,j,2] := z[i,j,2]
end;
goto l1
end durchmesserabfrage
```

iterationsschleife;

l3: end prozedurrumpf;

Die Prozedur "matinv" beinhaltet die oben beschriebene Kombination der Verfahren (2.1) und (2.5) für den Fall $k = 2$. Diese Wahl von k hat sich bei diesem Vorgehen bezüglich des Rechenaufwandes in vielen Fällen als am günstigsten erwiesen. Es sei darauf hingewiesen, daß die Einschließungsmenge $\mathcal{X}$ in der Prozedur "matinv" nicht notwendigerweise mit Hilfe der Prozedur "einschliessungsmenge" bestimmt werden muß.

4. Numerische Beispiele

Wir geben abschließend einige der gerechneten Beispiele an. Es sind jeweils die untere Schranke für das betreffende Element von $\mathcal{A}^{-1}$ und darunter die davon verschiedenen Ziffern der oberen Schranke angegeben. z_1 bezeichnet die Anzahl der nach dem in Satz I angegebenen Verfahren bis zum Erfülltsein des in Satz III angegebenen Kriteriums notwendigen Iterationsschritte. z_2 bezeichnet die dann noch nach dem in Satz II angegebenen Verfahren bis zum Stillstand der Iteration notwendigen Schritte.

Diese Beispiele wurden auf der Rechenanlage EL X8 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe durchgerechnet.

$$a) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1.022727272719 & 0.1136363636353 & -0.1136363636373 \\ & 35 & 75 & 55 \\ 0.1136363636351 & 1.022727272721 & -0.1136363636371 \\ & 77 & 33 & 57 \\ -0.1136363636377 & -0.1136363636375 & 1.022727272722 \\ & 51 & 55 & 32 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 6; z_2 = 4;$$

$$b) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.09 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 & -0.09 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.09 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.99 \\ -0.9999 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1.232967025955 & 0.3945494483060 & -0.2465934052008 & -0.4709934039347 & 0.3908258878851 \\ 6006 & 223 & 1914 & 165 & 9060 \\ -0.9987143877670 & 0.6804113959097 & 0.1997428775454 & 0.3815088961123 & -0.2265724866367 \\ 261 & 297 & 536 & 278 & 196 \\ -0.7766558057492 & -0.3485298578421 & 1.155331161135 & 0.2066825177822 & -0.1660843573087 \\ 119 & 266 & 57 & 968 & 2932 \\ -1.220515292027 & -0.3905648934478 & 0.2441030583901 & 1.466236841521 & -1.376878937277 \\ 1943 & 233 & 4036 & 57 & 30 \\ 1.232843729242 & 0.3945099933585 & -0.2465687458618 & -0.4709463045970 & 1.390786805288 \\ 314 & 803 & 494 & 733 & 325 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 11; z_2 = 5$$

$$c) n = 10; a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0.1 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1(1)n \quad (A = (a_{ij}));$$

$$\mathcal{X} = (X_{ij});$$

$$X_{ii} = [1.052631578939, 1.052631578956] \quad i = 1(1)n;$$

$$X_{ij} = [-0.5847953216517, -0.5847953216235] \quad i, j = 1(1)n, \\ i \neq j;$$

$$z_1 = 13; z_2 = 7.$$

Literatur

- [1] G. Alefeld, J. Herzberger: Verfahren höherer Ordnung zur iterativen Einschließung der inversen Matrix. Erscheint in ZAMP, 6/70
- [2] H. Christ: Realisierung einer Maschinenintervallarithmetik mit beliebigen Algol-60-Compilern. Elektron. Rechenanlagen 10 (1968), H. 5, 217-222
- [3] P. Forster; Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schulz zur Bestimmung einer inversen Matrix. Numerische Mathematik 12, 211-214 (1968)
- [4] U. Kulisch: Grundzüge der Intervallrechnung. Erschienen in Überblicke Mathematik 2 (1969) Bibliographisches Institut Mannheim
- [5] O. Mayer: Algebraische und metrische Strukturen in der Intervallrechnung und einige Anwendungen. Computing 5, 144-162 (1970)
- [6] R. E. Moore: Interval Analysis. Prentice Hall Inc. 1966