Computing 3, 258—267 (1968)

Über die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit des allgemeinen Relaxationsverfahrens bei nichtnegativen Matrizen[1]

Von

G. Alefeld, Karlsruhe

(Eingegangen am 22. Januar 1968)

Zusammenfassung. In der folgenden Arbeit wird zunächst (Satz 3) ein Konvergenzintervall für das Relaxationsverfahren bei einer nichtnegativen Gesamtschrittmatrix mit *positiven* Diagonalelementen angegeben. Außerdem wird die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit des Relaxationsverfahrens mit der des Einzelschrittverfahrens verglichen, und der optimale Relaxationsfaktor in diesem Intervall angegeben. Es wird ein weiteres Iterationsverfahren betrachtet, welches eine Verbesserung der asymptotischen Konvergenzgeschwindigkeit des Relaxationsverfahrens liefern kann. Der Beweis dieser Aussagen beruht u. a. im wesentlichen auf Lemma 1, welches besagt, daß bei einer nichtnegativen konvergenten Matrix die Diagonalglieder notwendig kleiner als Eins sind. — Die weiteren Sätze enthalten ähnliche Aussagen bei allgemeineren Matrizen.

Summary. At first, an interval of convergence is obtained for the relaxation method with a non-negative Jacobi-matrix with *positive* diagonal elements (Theorem 3). The asymptotic speed of convergence of the relaxation method is compared to that of the "Einzelschrittverfahren" and the optimal relaxation factor in the interval is given. A further iterative method is considered which may lead to an improved asymptotic convergence speed of the relaxation method. The proof of the assertions rests mainly on Lemma 1 which states that a non-negative convergent matrix has diagonal elements smaller than 1. Further theorems contain similar assertions for more general matrices.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$x = B\,x + b,$$

$$B = (b_{ij}),\ i, j = 1\ (1)\ n,\ b = (b_i),\ x = (x_i),\ i = 1\ (1)\ n,$$

mit der nichtsingulären Matrix $I - B$ (I bezeichnet die Einheitsmatrix). Zerlegt man die Matrix B in $B = L + D + R$ mit

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ b_{21} & 0 & & 0 & \\ b_{31} & b_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots\ b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & 0 & \\ & & b_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & b_{nn} \end{bmatrix},$$

[1] Erweiterte Fassung eines auf der GAMM-Jahrestagung 1968 in Prag gehaltenen Kurzvortrages.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \dots b_{1n} \\ & 0 & b_{23} \dots b_{2n} \\ & & \ddots \quad \dots\dots \\ & 0 & \quad b_{n-1,n} \\ & & \quad 0 \end{bmatrix},$$

so bezeichnet man bekanntlich die Iterationsvorschriften

a) $x^{(m+1)} := (L + D + R)\, x^{(m)} + b$ als Gesamtschrittverfahren,

b) $(I - L)\, x^{(m+1)} := (D + R)\, x^{(m)} + b$ als Einzelschrittverfahren,

c) $(I - \omega\, L)\, x^{(m+1)} := [(1 - \omega)\, I + \omega\, (D + R)]\, x^{(m)} + \omega\, b$ als allgemeines Relaxationsverfahren. Ist $D = 0$, so erhält man die üblicherweise als JAKOBI-Verfahren, GAUSS-SEIDEL-Verfahren und Relaxationsverfahren bezeichneten Iterationsvorschriften.

Definition 1. Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix A. Eine Zerlegung $A = M - N$ von A heißt regulär, wenn M nichtsingulär ist. Die Matrix $M^{-1}N$ heißt Matrix der Zerlegung. Eine reguläre Zerlegung heißt konvergent, wenn der Spektralradius ihrer Matrix kleiner als Eins ist.

Definition 2. Eine reguläre Zerlegung heißt positiv, wenn $M^{-1} \geqslant 0$ und $N \geqslant 0$ ist.

Satz 1. *Die Matrix $M^{-1}\, N$ einer positiven Zerlegung $A = M - N$ ist konvergent, wenn $A^{-1} \geqslant 0$ gilt.* Siehe [3].

Satz 2. *Es seien $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ zwei positive Zerlegungen von A und $A^{-1} \geqslant 0$. Ist $N_2 - N_1$ nicht die Nullmatrix und $N_2 \geqslant N_1$, so gilt*

$$\varrho\, (M_1^{-1}\, N_1) \leqslant \varrho\, (M_2^{-1}\, N_2) < 1.$$

Ist $A^{-1} > 0$, so gilt anstelle des $\leqslant$-Zeichens das $<$-Zeichen. Siehe [2], [3].

Lemma 1. Sei $B = L + D + R$ eine nichtnegative Matrix und $\varrho\, (B) < 1$. Dann gilt $0 \leqslant b_{ii} < 1$, $i = 1\, (1)\, n$.

Beweis.

a) Sei B irreduzibel. Dann besitzt B einen positiven Eigenwert λ, der gleich ihrem Spektralradius $\varrho\, (B)$ ist. Der zugehörige Eigenvektor x ist ebenfalls positiv. Aus $B\, x = \lambda\, x$ folgt daher

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}\, x_j}{x_i} + b_{ii} + \frac{\sum\limits_{j=1+i}^{n} b_{ij}\, x_j}{x_i} = \lambda = \varrho\, (B) < 1.$$

Daraus folgt sofort ein Widerspruch, falls irgendein $b_{ii} \geqslant 1$ ist.

b) Ist B reduzibel, so besitzt B einen nichtnegativen Eigenwert $\lambda \geqslant 0$, der gleich $\varrho\, (B)$ ist. Der zugehörige Eigenvektor x ist ebenfalls nichtnegativ: $x \geqslant 0$. Ist $\lambda = \varrho\, (B) = 0$, so sind alle Eigenwerte gleich Null.

Die Summe der Eigenwerte ist andererseits gleich der Spur der Matrix B, d. h.

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Da die b_{ii} nichtnegativ sind, folgt $b_{ii} = 0$, $i = 1\,(1)\,n$. Ist $\lambda = \varrho\,(B) > 0$, so folgt für diejenigen Indizes i_r, für die $x_{i_r} > 0$ wie im irreduziblen Fall $0 \leqslant b_{i_r i_r} < 1$. Sei nun irgendeine Komponente von x, nämlich x_l, gleich Null. Sind in der l-ten Spalte der Matrix B alle Elemente außer b_{ll} gleich Null. so ist b_{ll} Eigenwert von B, und daher $0 \leqslant b_{ll} \leqslant \varrho\,(B) < 1$. (Ist auch $b_{ll} = 0$, so ist nichts zu zeigen.) Sei nun außer b_{ll} noch mindestens ein Element der Matrix B in der l-ten Spalte von Null verschieden. Dann betrachten wir die Matrix $\hat{B}$, wobei $\hat{B}$ aus B entsteht, indem man in der l-ten Spalte alle Elemente bis auf b_{ll} zu Null setzt. Offensichtlich ist dann $\mu := b_{ll}$ ein Eigenwert von $\hat{B}$, und es gilt $0 \leqslant \hat{B} \leqslant B$. Daraus folgt $\varrho\,(\hat{B}) \leqslant \varrho\,(B) < 1$. Da $\varrho\,(\hat{B}) = \max_i |\mu_i|$, gilt auch $b_{ll} \leqslant \varrho\,(\hat{B}) \leqslant \varrho\,(B) < 1$. Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. Ist $B = L + D + R$ nichtnegativ und $\varrho\,(B) < 1$, so ist $(I - B)^{-1} \geqslant 0$. Ist B irreduzibel und $D > 0$, so gilt $(I - B)^{-1} > 0$.

Beweis.

Da $\varrho\,(B) < 1$, konvergiert die Reihe

$$I + B + B^2 + \ldots$$

und ihr Wert ist gleich $(I - B)^{-1}$. Da $B \geqslant 0$, sind alle Glieder der Reihe nichtnegativ. Damit folgt der erste Teil der Behauptung. Ist B eine irreduzible $n \times n$-Matrix und $D > 0$, so gilt $B^{n-1} > 0$ und damit aufgrund der Reihendarstellung $(I - B)^{-1} > 0$.

Satz 3. Es sei das lineare Gleichungssystem

$$x = B\,x + b \text{ mit } B = L + D + R \geqslant 0,\ D > 0 \tag{I}$$

und $\varrho\,(B) < 1$ gegeben.

1. Dann konvergiert das zur Matrix B gehörige Relaxationsverfahren

$$\text{(c)} \qquad (I - \omega\,L)\,x^{(m+1)} := [(1 - \omega)\,I + \omega\,(D + R)]\,x^{(m)} + \omega\,b$$

für $0 < \omega \leqslant \dfrac{1}{1 - \min_i b_{ii}} < \infty$ *gegen die eindeutige Lösung von* (I).

2. Die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit des Relaxationsverfahrens (c) *ist für* $0 < \omega < 1$ *nicht besser als die des zur Matrix B gehörigen Einzelschrittverfahrens, für* $1 < \omega \leqslant \dfrac{1}{1 - \min_i b_{ii}}$ *mindestens ebensogut wie die des zur Matrix B gehörigen Einzelschrittverfahrens. Ist die Matrix B*

irreduzibel, so konvergiert das Relaxationsverfahren für $0 < \omega < 1$ *asymptotisch schlechter, für* $1 < \omega \leqslant \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ *asymptotisch besser als das Einzelschrittverfahren.*

3. Die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit des Relaxationsverfahrens ist im angegebenen Bereich (neben anderen eventuell möglichen Werten von ω*) am größten für* $\omega = \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$*. Ist die Matrix* B *irreduzibel, so ist die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit des Relaxationsverfahrens genau für* $\omega = \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ *am größten.*

4. Das Iterationsverfahren

$$\text{(d)} \qquad (I - \Omega\, L)\, x^{(m+1)} := [I - \Omega + \Omega\, (D + R)]\, x^{(m)} + \Omega\, b,$$

wobei

$$\Omega := (\omega_{ij}) \ \textit{mit}\ \omega_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{1 - b_{ii}} & i = j, \end{cases}$$

konvergiert asymptotisch mindestens ebensogut wie das Relaxationsverfahren (c) *für* $\omega = \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$*. Ist* B *irreduzibel, so konvergiert es asymptotisch besser, falls nicht alle* b_{ii} *gleich sind.*

Beweis.

Aus $\varrho\,(B) < 1$ folgt

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \ldots,$$

d. h. das Gleichungssystem (I) besitzt eine eindeutige Lösung. Wir betrachten jetzt die Zerlegung

$$(\gamma) \qquad A := I - B = M - N \ \text{mit}$$

$$M := \frac{1}{\omega}\,(I - \omega\, L) \ \text{und} \ N := \frac{1}{\omega}\,[(1 - \omega)\, I + \omega\, (D + R)].$$

Für $\omega > 0$ ist

$$M^{-1} = \omega\, (I + \omega\, L + \ldots \omega^{n-1}\, L^{n-1}) \geqslant 0$$

und damit die Zerlegung (γ) regulär.

Für $1 - \omega + \omega \cdot b_{ii} \geqslant 0$, $i = 1\,(1)\,n$, also insbesondere für $1 - \omega + \omega \cdot \min\limits_i b_{ii} \geqslant 0$, ist $N \geqslant 0$ und damit die Zerlegung (γ) positiv. Daraus folgt, da nach Lemma 1 alle $b_{ii} < 1$ sind, $0 < \omega \leqslant \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$.

Nach Lemma 2 ist $(I - B)^{-1} \geqslant 0$. Daraus folgt nach Satz 1

$$\varrho (M^{-1} N) = \varrho ((I - \omega L)^{-1} [(1 - \omega) I + \omega (D + R)]) < 1$$

für $0 < \omega \leqslant \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$. Damit ist (*1.*) gezeigt.

Wir betrachten jetzt die Zerlegung (γ) für zwei verschiedene Werte ω_1 und ω_2, $0 < \omega_1 < \omega_2 \leqslant \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$:

(γ_1) $A = I - B = M_{\omega_1} - N_{\omega_1}$ mit

$$M_{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} (I - \omega_1 L) \text{ und } N_{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1} [(1 - \omega_1) I + \omega_1 (D + R)].$$

(γ_2) $A = I - B = M_{\omega_2} - N_{\omega_2}$ mit

$$M_{\omega_2} = \frac{1}{\omega_2} (I - \omega_2 L) \text{ und } N_{\omega_2} = \frac{1}{\omega_2} [(1 - \omega_2) I + \omega_2 (D + R)].$$

Es ist $\frac{1 - \omega_1}{\omega_1} > \frac{1 - \omega_2}{\omega_2}$ für $\omega_1 < \omega_2$ und damit $N_{\omega_1} \geqslant N_{\omega_2}$, $N_{\omega_1} - N_{\omega_2}$ nicht die Nullmatrix. Daraus folgt nach Satz 2

$$\varrho (M_{\omega_2}^{-1} N_{\omega_2}) \leqslant \varrho (M_{\omega_1}^{-1} N_{\omega_1}) < 1,$$

d. h. der Spektralradius $\varrho (L_\omega)$ ist im Intervall $0 < \omega \leqslant \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ eine monoton fallende Funktion von ω. Ist B irreduzibel, so gilt das strenge $<$-Zeichen, d. h. $\varrho (L_\omega)$ ist streng monoton fallend. Aus diesen Feststellungen und der Tatsache, daß das Relaxationsverfahren für $\omega = 1$ in das Einzelschrittverfahren übergeht, folgen die Aussagen der Behauptungen (*2.*) und (*3.*).

Neben der Zerlegung (γ) betrachten wir die Zerlegung

(δ) $A = I - B = M_1 - N_1$ mit

$$M_1 = \Omega^{-1} (I - \Omega L) \text{ und } N_1 = \Omega^{-1} [I - \Omega + \Omega (D + R)].$$

Nach Lemma 1 sind alle $b_{ii} < 1$, $i = 1\,(1)\,n$. Also ist $\Omega \geqslant 0$ und damit $\Omega^{-1} \geqslant 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} M_1^{-1} &= [\Omega^{-1} (I - \Omega L)]^{-1} = (I - \Omega L)^{-1} \Omega = \\ &= (I + \Omega L + \ldots + (\Omega L)^{n-1}) \Omega \geqslant 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist mit der obigen Wahl von $\Omega I - \Omega + \Omega D = 0$ (Nullmatrix), und damit $N_1 = R \geqslant 0$, d. h. die Zerlegung (δ) ist regulär und positiv. Außerdem ist $N \geqslant N_1$ und $N - N_1$ nicht die Nullmatrix, falls nicht alle b_{ii} gleich sind. Daraus folgt nach Satz 2

$$\begin{aligned} \varrho (M_1^{-1} N_1) &= \varrho ((I - \Omega L)^{-1} [I - \Omega + \Omega (D + R)]) \leqslant \varrho (M^{-1} N) = \\ &= \varrho ((I - \omega L)^{-1} [(1 - \omega) I + \omega (D + R)]) < 1. \end{aligned}$$

Ist B irreduzibel, so gilt in der letzten Ungleichung das strenge $<$-Zeichen. Sind jedoch alle b_{ii} gleich, so sind beide Zerlegungen identisch und damit beide Iterationsvorschriften gleich. Damit ist dieser Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Es ist bekannt, daß für eine nichtnegative Matrix B mit $\varrho(B) < 1$ das Relaxationsverfahren (c) für $0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(B)}$ konvergiert. Es gibt offensichtlich Beispiele, für die $\frac{2}{1 + \varrho(B)} \leqslant \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ ist. Da nach dem eben bewiesenen Satz die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit für $\omega = \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ am größten ist, kann man in diesen Fällen für diesen Wert von ω eine Verbesserung der asymptotischen Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber einem Wert von ω aus dem Intervall $0 < \omega < \frac{2}{1 + \varrho(B)}$ erwarten, insbesondere falls B irreduzibel ist. Außerdem ist $\varrho(B)$ im allgemeinen nicht bekannt und kann nur durch eine Norm (im allgemeinen zu groß) abgeschätzt werden. Wir erläutern dies an einem *Beispiel:*

Es sei $B = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$. Es ist $D > 0$, $\varrho(B) = 0.9$; außerdem ist B irreduzibel. Weiter ist $\frac{20}{19} = \frac{2}{1 + \varrho(B)} < \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}} = \frac{10}{3}$. Für die Matrix L_ω des Relaxationsverfahrens erhält man

$$L = \begin{bmatrix} 1 - 0{,}2\,\omega & 0{,}1\,\omega \\ 0{,}2\,\omega\,(1 - 0{,}2\,\omega) & 0{,}02\,\omega^2 - 0{,}3\,\omega + 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich für $\omega = 1$ der Spektralradius des Einzelschrittverfahrens zu $\varrho(L_1) = 0{,}893 < \varrho(B)$. Für $\omega = \frac{10}{3}$ erhält man $\varrho\left(\frac{L_{10}}{3}\right) = 0{,}556$. Für den Spektralradius des Iterationsverfahrens (d) erhält man in diesem Beispiel $\varrho(L_\Omega) = 0{,}333$.

Bemerkung 2. Nach einem Satz von KAHAN kann das Relaxationsverfahren nur für $0 < \omega < 2$ konvergieren, falls $D = 0$ ist. Der bewiesene Satz zeigt, daß dies im Falle $D \neq 0$ nicht richtig ist, da $\frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ größer als 2 werden kann.

Bemerkung 3. Geht in Satz 3 $\min\limits_i b_{ii} \to 0$, so erhält man die Aussage, daß das allgemeine Relaxationsverfahren (c) für $0 < \omega < 1$ konvergiert. Die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit ist für diese Werte von ω nicht größer als die des Einzelschrittverfahrens. Im Spezialfall $D = 0$ wurde diese Aussage bereits in [3] für den irreduziblen Fall bewiesen.

Bemerkung 4. Es sei darauf hingewiesen, daß das in Satz 3 angegebene Konvergenzintervall $0 < \omega \leqslant \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ nicht den absolut besten

Relaxationsfaktor ω_b enthalten muß. So ist z. B. im obigen Beispiel für $\omega = 5 > \frac{10}{3} = \frac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ der Spektralradius $\varrho(L_\omega)$ sogar gleich Null.

Es ist, wie oben gezeigt, $I - \Omega + \Omega D = 0$. Damit lautet das Iterationsverfahren (d)

$$(I - \Omega L)\, x^{(m+1)} := \Omega R\, x^{(m)} + \Omega b.$$

Dies kann jedoch aufgefaßt werden als GAUSS-SEIDEL-Verfahren zur Matrix $\tilde{B} = \tilde{L} + \tilde{R}$, wobei $\tilde{L}$ bzw. $\tilde{R}$ strenge untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind: $\tilde{L} := \Omega L$ und $\tilde{R} := \Omega R$.

Offensichtlich ist $\tilde{B} \geqslant 0$, und nach einem Satz von STEIN und ROSENBERG folgt dann aus $\varrho((I - \tilde{L})^{-1} \tilde{R}) < 1$ auch $\varrho(\tilde{B}) < 1$, d. h. das JAKOBI-Verfahren mit der Matrix $\tilde{B}$ ist ebenfalls konvergent. Man kann nun noch zum zur Matrix $\tilde{B}$ gehörigen Relaxationsverfahren übergehen und erhält dadurch eventuell eine weitere Verbesserung der asymptotischen Konvergenzgeschwindigkeit. — In unserem Beispiel ergibt sich für den optimalen Relaxationsfaktor $\tilde{\omega}_b = \frac{6}{7}(3 - \sqrt{2})$ der Spektralradius $\varrho(\tilde{L}_{\tilde{\omega}_b}) = 0{,}216$.

Es sei jetzt allgemeiner $D \geqq 0$, $D \neq 0$ vorausgesetzt. Dann gilt folgender

Satz 4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$x = B x + b,$$

$$\text{mit } B = L + D + R \geqq 0,\ D \neq 0 \text{ und } \varrho(B) < 1.$$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$\text{(d)} \qquad (I - \Omega L)\, x^{(m+1)} := [I - \Omega + \Omega (D + R)]\, x^{(m)} + \Omega b,$$

wobei

$$\Omega := (\omega_{ij}) \text{ mit } \omega_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{1 - b_{ii}} & i = j \end{cases}$$

asymptotisch mindestens ebensogut wie das zur Matrix B gehörige Einzelschrittverfahren, ist B irreduzibel, so konvergiert es asymptotisch besser.

Beweis.

Der Beweis ergibt sich ähnlich wie Behauptung (*4.*) von Satz 3.

Um die bisherigen Ergebnisse auf allgemeinere Matrizen zu übertragen, geben wir die

Definition 3. Eine nichtnegative Matrix $P = 0$ heißt Majorante der Matrix einer Zerlegung $A = M - N$, wenn gilt $|M^{-1} N| \leqq P$ (siehe [2]). Es gilt der

Satz 5. *Eine reguläre Zerlegung ist konvergent, wenn ihre Matrix eine konvergente Majorante besitzt* (siehe [2]).

Damit beweisen wir den

Satz 6. Es sei das lineare Gleichungssystem

$$x = B\,x + b$$

mit $\varrho\,(|B|) < 1$ gegeben. Es sei $B = L + D + R$, $D > 0$, $L + R$ komplex.

Dann konvergiert das zur Matrix B gehörige Relaxationsverfahren

$$\text{(c)} \qquad (I - \omega\,L)\,x^{(m+1)} := [(1-\omega)\,I + \omega\,(D + R)]\,x^{(m)} + \omega\,b$$

für $0 < \omega \leqq \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$.

Beweis.

Wir betrachten die beiden Matrizen $\tilde{A} := I - |B|$ und $A = I - B$ sowie deren Zerlegungen

$$(\varepsilon_1)\ A = M_1 - N_1 \text{ mit } M_1 = \frac{1}{\omega}\,(I - \omega\,|L|) \text{ und } N_1 = \\ = \frac{1}{\omega}\,[(1-\omega)\,I + \omega\,(D + |R|)],$$

$$(\varepsilon_2)\ A = M_2 - N_2 \text{ mit } M_2 = \frac{1}{\omega}\,(I - \omega\,L) \text{ und } N_2 = \\ = \frac{1}{\omega}\,[(1-\omega)\,I + \omega\,(D + R)].$$

Nach Voraussetzung ist $\varrho\,(|B|) < 1$ und damit nach Lemma 1 $0 \leqq |b_{ii}| = b_{ii} < 1$, $i = 1\,(1)\,n$. Nach Satz 3 konvergiert dann auch das zur Matrix $|B|$ gehörige Relaxationsverfahren für $0 < \omega \leqq \dfrac{1}{1 - \min\limits_i b_{ii}}$ dessen Matrix gleich der Matrix der Zerlegung (ε_1) ist.

Es ist $M_2^{-1} = \omega\,(I + \omega\,L + \ldots + (\omega\,L)^{n-1})$, also die Zerlegung (ε_2) regulär. Weiter ist $|M_2^{-1}| \leqq M_1^{-1}$ und damit

$$0 \leqq |M_2^{-1}\,N_2| = M_1^{-1}\,|(1-\omega)\,I + \omega\,(D + R)| = \\ = M_1^{-1}\,[(1-\omega)\,I + \omega\,(D + |R|) = M_1^{-1}\,N_1,$$

da nach Voraussetzung D reell und positiv. D. h. die Matrix $M_1^{-1}\,N_1$ ist eine konvergente Majorante für die Relaxationsmatrix zur Matrix B. Daraus folgt nach Satz 5 die Behauptung.

Satz 7. Es sei das lineare Gleichungssystem

$$x = B\,x + b$$

mit $\varrho\,(|B|) < 1$ gegeben. B komplex.

Dann konvergiert auch das Iterationsverfahren

(d) $$(I - \Omega L)\, x^{(m+1)} := [I - \Omega + \Omega (D + R)]\, x^{(m)} + \Omega b.$$

Beweis.

Wir betrachten die Zerlegung der Matrix $\tilde{A} := I - |B| = M_2 - N_2$ mit $M_2 = \Omega_2^{-1} (I - \Omega_2 |L|)$ und $N_2 = \Omega_2^{-1} [I - \Omega_2 + \Omega_2 (|D| + |R|)] = = |R|$, wobei $\Omega_2 = (\omega_{ij}^{(2)})$ mit $\omega_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{1 - |b_{ii}|} & i = j \end{cases}.$

Da $\varrho(|B|) < 1$ ist $(I - |B|)^{-1} \geqq 0$. Aus $\varrho(|B|) < 1$ folgt weiter $|b_{ii}| < 1$, $i = 1\,(1)\,n$ (Lemma 1). Also ist $\Omega_2 \geqq 0$; daraus folgt

$$M_2^{-1} = [\Omega_2^{-1} (I - \Omega_2 L)^{-1} =$$
$$= (I + \Omega_2 |L| + \ldots (\Omega_2 L)^{n-1})\, \Omega_2 \geqq 0,$$

d. h. die Zerlegung ist regulär und da $|R| \geqq 0$ auch positiv. Nach Satz 1 folgt $\varrho(M_2^{-1} N_2) < 1$.

Wir betrachten weiter die Zerlegung von $A = I - B = M_1 - N_1$ mit $M_1 = \Omega_1^{-1} (I - \Omega_1 L)$ und $N_1 = \Omega_1^{-1} (I - \Omega_1 + \Omega_1 (D + R)) = R$; wobei $\Omega_1 = (\omega_{ij}^{(1)})$ mit $\omega_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{1 - b_{ii}} & i = j \end{cases}.$

Da M_1^{-1} existiert, ist die Zerlegung regulär. Weiter ist

$$|M_1^{-1}| = |[\Omega_1^{-1} (I - \Omega_1 L)]^{-1}| = |(I - \Omega_1 L)^{-1} \Omega_1| \leqq$$
$$\leqq |(I - \Omega_1 L)^{-1}| \cdot |\Omega_1| \leqq (I + |\Omega_1| \cdot |L| + \ldots |\Omega_1|^{n-1} |L|^{n-1}) \cdot |\Omega_1| \leqq$$
$$\leqq (I - \Omega_2 |L|)^{-1} = M_2,$$

da aus $|1 - b_{ii}| \geqq 1 - |b_{ii}|$ folgt $\dfrac{1}{|1 - b_{ii}|} \leqq \dfrac{1}{1 - |b_{ii}|}$. Damit haben wir $0 \leqq |M_1^{-1} N_1| \leqq M_2^{-1} N_2$, d. h. die Matrix $M_2^{-1} N_2$ ist konvergente Majorante von $M_1^{-1} N_1$. Nach Satz 5 folgt damit die Behauptung.

Für $D = 0$ ist $\Omega = I$. Dann ist das Iterationsverfahren (d) mit dem GAUSS-SEIDEL-Verfahren identisch. Aus Satz 7 ergibt sich daher für $D = 0$:

Korollar 1. Konvergiert das JAKOBI-Verfahren und ist $\varrho(|B|) < 1$, so konvergiert auch das zugehörige GAUSS-SEIDEL-Verfahren.

Korollar 2. Ist zusätzlich B nichtnegativ, so folgt aus der Konvergenz des JAKOBI-Verfahrens die Konvergenz des GAUSS-SEIDEL-Verfahrens.

Korollar 2 enthält einen Teil der Aussagen des Satzes von STEIN und ROSENBERG.

Bemerkung 5. Ersetzt man in Satz 7 die Voraussetzung $\varrho(|B|) < 1$ durch $\varrho(B) < 1$, so bleibt die Behauptung nicht richtig. Dafür lassen sich leicht Beispiele angeben.

Literatur

[1] APOSTOLATOS, N., und U. KULISCH: Über die Konvergenz des Relaxationsverfahrens bei nichtnegativen und diagonaldominanten Matrizen. Comp. 2, 1, 17 (1967).

[2] KULISCH, U.: Über positive Zerlegungen von Matrizen. (Erscheint in der Zeitschrift Numerische Mathematik).

[3] VARGA, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. Series in Automatic Computation **1963.**

G. Alefeld
Rechenzentrum und Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Karlsruhe
D-75 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland