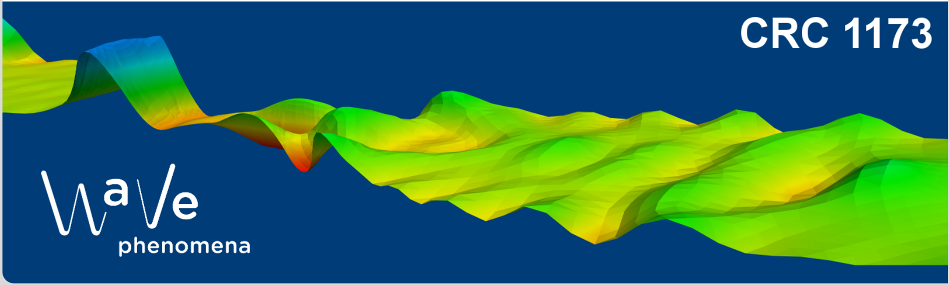
Karlsruher Institut für Technologie

Ein gleichmäßig exponentiell stabiles ADI-Verfahren für die Maxwell-Gleichungen

SFB Workshop (Annweiler, 10.-12. Oktober 2018)

Konstantin Zerulla

Institut für Analysis (KIT)



Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?

Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?
- Kurze Einführung in ADI-Verfahren

Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?
- Kurze Einführung in ADI-Verfahren
- Formulierung zweier modifizierter ADI-Verfahren

Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?
- Kurze Einführung in ADI-Verfahren
- Formulierung zweier modifizierter ADI-Verfahren
- Hauptresultate

Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?
- Kurze Einführung in ADI-Verfahren
- Formulierung zweier modifizierter ADI-Verfahren
- Hauptresultate
  - Gleichmäßige exponentielle Stabilität

Übersicht

- Motivation: Was ist exponentielle Stabilität?
- Kurze Einführung in ADI-Verfahren
- Formulierung zweier modifizierter ADI-Verfahren
- Hauptresultate
  - Gleichmäßige exponentielle Stabilität
  - Konvergenzresultat für die Zeitdiskretisierung

Was ist exponentielle Stabilität?

- **Beispiel:** Betrachte auf $L^2(0,1)$ das 1-d Randwertproblem

$$
(\mathrm{W}) \quad \begin{cases} \partial_t^2 w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) + \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\partial_t w(x,t) = 0 & \text{auf } (0,1)\times(0,\infty), \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ w(x,0) = w_0, \qquad \partial_t w(x,0) = w_1 & \text{für } x \in (0,1), \end{cases}
$$

mit $0 < a < b < 1$, $w_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ und $w_1 \in H_0^1(0,1)$.

Was ist exponentielle Stabilität?

- **Beispiel:** Betrachte auf $L^2(0,1)$ das 1-d Randwertproblem

$$(\mathrm{W})\quad \begin{cases} \partial_t^2 w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) + \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\partial_t w(x,t) = 0 & \text{auf } (0,1)\times(0,\infty), \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & \text{für } t>0, \\ w(x,0) = w_0, \qquad \partial_t w(x,0) = w_1 & \text{für } x\in(0,1), \end{cases}$$

  mit $0<a<b<1$, $w_0 \in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ und $w_1 \in H_0^1(0,1)$.

- Das RWP ist ***exponentiell stabil***, d.h. $\exists\ C,\alpha>0$ mit

$$(1)\qquad \|\partial_t w(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \|w(\cdot,t)\|_{H^1}^2 \le C\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\|w_1\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2\right)$$

  $\forall t\ge 0,\ w_0\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1),\ w_1\in H_0^1(0,1)$.

Was ist exponentielle Stabilität?

Karlsruher Institut für Technologie

- **Beispiel:** Betrachte auf $L^2(0,1)$ das 1-d Randwertproblem

$$(W)\quad \begin{cases} \partial_t^2 w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) + \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\partial_t w(x,t) = 0 & \text{auf } (0,1)\times(0,\infty), \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & \text{für } t > 0, \\ w(x,0) = w_0, \qquad \partial_t w(x,0) = w_1 & \text{für } x \in (0,1), \end{cases}$$

  mit $0 < a < b < 1$, $w_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ und $w_1 \in H_0^1(0,1)$.

- Das RWP ist ***exponentiell stabil***, d.h. $\exists\ C, \alpha > 0$ mit

$$(1)\qquad \|\partial_t w(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \|w(\cdot,t)\|_{H^1}^2 \le C\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\|w_1\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2\right)$$

  $\forall t \ge 0,\ w_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),\ w_1 \in H_0^1(0,1)$.

- Diskretisiere (W) räumlich mit finiten Differenzen $\rightsquigarrow$ Approximation w_h.
  - Problem: w_h erfüllt (1) nicht gleichmäßig.[1]

[1] Tébou, Zuazua 2003.

WaVe phenomena

Was ist exponentielle Stabilität?

- **Beispiel:** Betrachte auf $L^2(0,1)$ das 1-d Randwertproblem

$$(\mathrm{W})\quad \begin{cases} \partial_t^2 w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) + \mathbb{1}_{(a,b)}(x)\partial_t w(x,t) = 0 & \text{auf } (0,1)\times(0,\infty), \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & \text{für } t>0, \\ w(x,0) = w_0, \qquad \partial_t w(x,0) = w_1 & \text{für } x \in (0,1), \end{cases}$$

  mit $0 < a < b < 1$, $w_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ und $w_1 \in H_0^1(0,1)$.

- Das RWP ist ***exponentiell stabil***, d.h. $\exists\ C, \alpha > 0$ mit

$$(1) \qquad \|\partial_t w(\cdot,t)\|_{L^2}^2 + \|w(\cdot,t)\|_{H^1}^2 \le C\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big(\|w_1\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{H^1}^2\Big)$$

  $\forall t \ge 0,\ w_0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),\ w_1 \in H_0^1(0,1)$.

- Diskretisiere (W) räumlich mit finiten Differenzen $\rightsquigarrow$ Approximation w_h.
  - Problem: w_h erfüllt (1) nicht gleichmäßig.[1]
- Ähnliche Effekte treten für Zeitdiskretisierungen auf.[2]

---

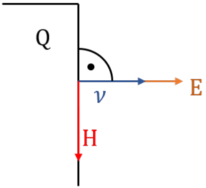
[1] Tébou, Zuazua 2003.

[2] Zhang, Zheng, Zuazua 2009.

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

- Betrachte lineare isotrope Maxwell-Gleichungen auf $Q = (0,1)^3$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl}\mathbf{H} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}\times\nu = 0, &\qquad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\qquad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0 && \text{in } Q.
\end{aligned}
$$



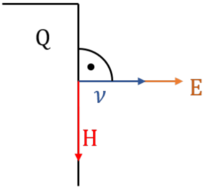
- $\mathbf{E}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet das elektrische Feld, $\mathbf{H}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld.

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Betrachte lineare isotrope Maxwell-Gleichungen auf $Q = (0,1)^3$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\mathrm{curl}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E} \times \nu = 0, &\qquad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\qquad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0 && \text{in } Q.
\end{aligned}
$$

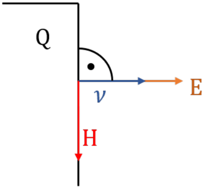


- $\mathbf{E}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet das elektrische Feld, $\mathbf{H}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld.

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

- Betrachte lineare isotrope Maxwell-Gleichungen auf $Q = (0,1)^3$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\mathrm{curl}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E} \times \nu = 0, &\quad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0 && \text{in } Q.
\end{aligned}
$$



- $\mathbf{E}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet das elektrische Feld, $\mathbf{H}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld.
- Anfangswerte: $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H_0(\mathrm{curl}, Q) \times H(\mathrm{curl}, Q)$, wobei

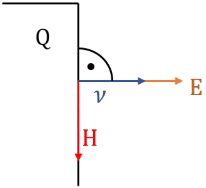
$$H(\mathrm{curl}, Q) := \{\mathbf{H} \in L^2(Q)^3 \mid \mathrm{curl}\mathbf{H} \in L^2(Q)^3\}$$

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Betrachte lineare isotrope Maxwell-Gleichungen auf $Q = (0,1)^3$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\mathrm{curl}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}\times\nu = 0, &\quad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0 && \text{in } Q.
\end{aligned}
$$



- $\mathbf{E}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet das elektrische Feld, $\mathbf{H}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld.

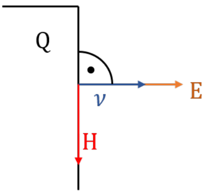
- Anfangswerte: $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H_0(\mathrm{curl}, Q) \times H(\mathrm{curl}, Q)$ mit

$$\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}_0) \in L^2(Q), \quad \mathrm{div}(\mu\mathbf{H}_0) = 0 \text{ in } Q, \quad \mu\mathbf{H}_0\cdot\nu = 0 \text{ auf } \partial Q.$$

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

- Betrachte lineare isotrope Maxwell-Gleichungen auf $Q = (0,1)^3$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\mathrm{curl}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0 && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E} \times \nu = 0, &\qquad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\qquad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0 && \text{in } Q.
\end{aligned}
$$



- $\mathbf{E}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet das elektrische Feld, $\mathbf{H}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ das magnetische Feld.
- Anfangswerte: $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H_0(\mathrm{curl}, Q) \times H(\mathrm{curl}, Q)$ mit
$$\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}_0) \in L^2(Q), \quad \mathrm{div}(\mu\mathbf{H}_0) = 0 \text{ in } Q, \quad \mu\mathbf{H}_0 \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial Q.$$
- Regularität: $\varepsilon, \sigma \in W^{1,\infty}(Q)$, $\mu \in W^{1,\infty}(Q) \cap W^{2,3}(Q)$ mit
$$\varepsilon, \mu, \sigma \geq \delta > 0.$$

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

- Das Maxwell-System ist ***exponentiell stabil***, d.h. die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2}\int_Q \varepsilon(x)|\mathbf{E}(x)|^2 + \mu(x)|\mathbf{H}(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

erfüllt mit gleichmäßigen Konstanten $C, \beta > 0$

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(t)\\\mathbf{H}(t)\end{pmatrix}\right] \leq C\mathrm{e}^{-\beta t}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\\mathbf{H}_0\end{pmatrix}\right], \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

für alle Anfangsdaten $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$.[3]

[3] Eller 2018 *(Preprint). Siehe auch* Nicaise, Pignotti 2005; Phung 2000.

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

- Das Maxwell-System ist ***exponentiell stabil***, d.h. die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2}\int_Q \varepsilon(x)|\mathbf{E}(x)|^2 + \mu(x)|\mathbf{H}(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

erfüllt mit gleichmäßigen Konstanten $C, \beta > 0$

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(t)\\ \mathbf{H}(t)\end{pmatrix}\right] \le C\mathrm{e}^{-\beta t}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{pmatrix}\right], \qquad t \ge 0, \tag{2}$$

für alle Anfangsdaten $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$.[3]

- Wesentlich für (2) ist eine Beobachtungsungleichung im ungedämpften Fall $(\sigma = 0)$: $\exists C_0 > 0$ mit

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{pmatrix}\right] \le C_0\int_0^2\int_Q |\mathbf{E}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

für alle Anfangsdaten $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ des ungedämpften Systems $(\sigma = 0)$.[3]

---

[3] Eller 2018 *(Preprint). Siehe auch* Nicaise, Pignotti 2005; Phung 2000.

Exponentiell stabile Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Maxwell-System ist ***exponentiell stabil***, d.h. die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2}\int_Q \varepsilon(x)|\mathbf{E}(x)|^2 + \mu(x)|\mathbf{H}(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

erfüllt mit gleichmäßigen Konstanten $C, \beta > 0$

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}(t)\\ \mathbf{H}(t)\end{pmatrix}\right] \leq C\mathrm{e}^{-\beta t}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{pmatrix}\right], \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

für alle Anfangsdaten $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$.[3]

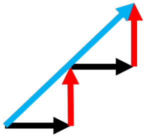
- Diskretisiere das Maxwell-System in der Zeit mit einem ADI-Verfahren (siehe unten) $\rightsquigarrow$ zeitlich diskrete Approximationen $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)$.
  - Problem: $\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}_h)\neq 0 \rightsquigarrow$ (2) scheint nicht gleichmäßig zu gelten.

[3] Eller 2018 *(Preprint). Siehe auch* Nicaise, Pignotti 2005; Phung 2000.

Wave phenomena

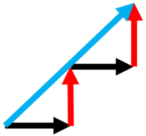
Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

- Alternating direction implicit (ADI) Verfahren sind effiziente Zeitintegratoren für Maxwell-Gleichungen auf Quadern.
  - **Idee:** Spalte das System in entkoppelnde Teile $\rightsquigarrow$ löse nur 1-d Probleme implizit.
  - **Stabilität:** Implizite Teile machen das Verfahren stabil.



Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

- Alternating direction implicit (ADI) Verfahren sind effiziente Zeitintegratoren für Maxwell-Gleichungen auf Quadern.
  - **Idee:** Spalte das System in entkoppelnde Teile $\rightsquigarrow$ löse nur 1-d Probleme implizit.
  - **Stabilität:** Implizite Teile machen das Verfahren stabil.



- Es gibt viele Varianten von ADI-Verfahren, z.B. Energie-erhaltende.[4]

[4] Chen, Li, Liang 2010.

Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

- **1. Schritt:** Teile $\mathrm{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{curl} = C_1 - C_2$ mit

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 := \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow C_1 C_2 = \begin{pmatrix} \partial_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1^2 \end{pmatrix}.$$

Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

- **1. Schritt:** Teile $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\operatorname{curl} = C_1 - C_2$ mit

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 := \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow C_1 C_2 = \begin{pmatrix} \partial_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1^2 \end{pmatrix}.$$

- **2. Schritt:** Splitte den Maxwell-Operator

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl} \\ -\frac{1}{\mu}\operatorname{curl} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon} C_1 \\ \frac{1}{\mu} C_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & -\frac{1}{\varepsilon} C_2 \\ -\frac{1}{\mu} C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

- **1. Schritt:** Teile $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\operatorname{curl} = C_1 - C_2$ mit

$$C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 := \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow C_1 C_2 = \begin{pmatrix} \partial_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1^2 \end{pmatrix}.$$

- **2. Schritt:** Splitte den Maxwell-Operator

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl} \\ -\frac{1}{\mu}\operatorname{curl} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon} C_1 \\ \frac{1}{\mu} C_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & -\frac{1}{\varepsilon} C_2 \\ -\frac{1}{\mu} C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **3. Schritt:** Integriere beide Teile getrennt. Verwende dazu im Folgenden die Mittelpunktsregel.[5]

[5] Chen, Li, Liang 2010.

Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- **2. Schritt:** Teile den Maxwell-Operator auf

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl} \\ -\frac{1}{\mu}\mathrm{curl} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon} C_1 \\ \frac{1}{\mu} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & -\frac{1}{\varepsilon} C_2 \\ -\frac{1}{\mu} C_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- **3. Schritt:** Integriere beide Teile getrennt. Verwende dazu im Folgenden die Mittelpunktsregel.[5]

[5] Chen, Li, Liang 2010.

[6] Eilinghoff, Jahnke, Schnaubelt 2018 *(Preprint)*.

Einführung: ADI-Verfahren für Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- **2. Schritt:** Teile den Maxwell-Operator auf

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl} \\ -\frac{1}{\mu}\mathrm{curl} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon} C_1 \\ \frac{1}{\mu} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2\varepsilon} I & -\frac{1}{\varepsilon} C_2 \\ -\frac{1}{\mu} C_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- **3. Schritt:** Integriere beide Teile getrennt. Verwende dazu im Folgenden die Mittelpunktsregel.[5]
- **Beispiele:** Setze $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{pmatrix}$ und $\tau > 0$. Approximiere $\begin{pmatrix} \mathbf{E}((n+1)\tau) \\ \mathbf{H}((n+1)\tau) \end{pmatrix}$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \end{pmatrix} = (I+\tfrac{\tau}{2}B)(I-\tfrac{\tau}{2}B)^{-1}(I+\tfrac{\tau}{2}A)(I-\tfrac{\tau}{2}A)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \end{pmatrix} \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \end{pmatrix} = (I+\tfrac{\tau}{4}A)(I-\tfrac{\tau}{4}A)^{-1}(I+\tfrac{\tau}{2}B)(I-\tfrac{\tau}{2}B)^{-1}(I+\tfrac{\tau}{4}A)(I-\tfrac{\tau}{4}A)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \end{pmatrix}.$$ [6]

---

[5] Chen, Li, Liang 2010.

[6] Eilinghoff, Jahnke, Schnaubelt 2018 *(Preprint)*.

Struktur

Ziel: Modifiziertes ADI-Verfahren mit den folgenden Eigenschaften:

- Das Verfahren liefert gleichmäßig exponentiell stabile Approximationen.
- Der Aufwand ist ähnlich wie bei anderen ADI-Verfahren.
- Das modifizierte Verfahren konvergiert mit der gleichen Ordnung wie das ursprüngliche ADI-Verfahren.

Struktur

Ziel: Modifiziertes ADI-Verfahren mit den folgenden Eigenschaften:

- Das Verfahren liefert gleichmäßig exponentiell stabile Approximationen.
- Der Aufwand ist ähnlich wie bei anderen ADI-Verfahren.
- Das modifizierte Verfahren konvergiert mit der gleichen Ordnung wie das ursprüngliche ADI-Verfahren.

Basis-Verfahren: Ein Energie-erhaltendes ADI-Verfahren der Ordnung 1.

Struktur

Ziel: Modifiziertes ADI-Verfahren mit den folgenden Eigenschaften:

- Das Verfahren liefert gleichmäßig exponentiell stabile Approximationen.
- Der Aufwand ist ähnlich wie bei anderen ADI-Verfahren.
- Das modifizierte Verfahren konvergiert mit der gleichen Ordnung wie das ursprüngliche ADI-Verfahren.

Basis-Verfahren: Ein Energie-erhaltendes ADI-Verfahren der Ordnung 1.

Wichtigstes Hilfsmittel: Künstlich hinzugefügte viskose Dämpfung.[6] [7] [8]

---

[6] Tébou, Zuazua 2003, 2007. *(1d Wellengleichung)*
[7] Ramdani, Takahashi, Tucsnak 2007. *(abstrakte Wellengleichung)*
[8] Ervedoza, Zuazua 2009. *(abstrakte Wellengleichung)*

Ein verallgemeinertes Maxwell-System

- Nachteil vieler ADI-Verfahren ist die Verletzung des Gesetzes $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$ (auf einer großen Zeitskala). $\rightsquigarrow$ unphysikalisches Verhalten

Ein verallgemeinertes Maxwell-System

- Nachteil vieler ADI-Verfahren ist die Verletzung des Gesetzes $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$ (auf einer großen Zeitskala). $\rightsquigarrow$ unphysikalisches Verhalten
- Abhilfe auf PDE-Level: mixed hyperbolic divergence cleaning[9]

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E} - \nabla\left(\tfrac{1}{\mu}\Phi\right) && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \Phi &= -\tfrac{1}{\mu^2}\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) - \eta\Phi && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E} \times \nu &= 0, \quad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) &= \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 && \text{in } Q,
\end{aligned}
$$

wobei $\Phi(x,t) \in \mathbb{R}$, $\Phi_0 \in H^1(Q)$ und $\eta \in W^{1,\infty}(Q)$ mit $\eta \geq \delta > 0$.

[9] Dedner et. al. 2002. *(für MHD Systeme)*

Ein verallgemeinertes Maxwell-System

- Nachteil vieler ADI-Verfahren ist die Verletzung des Gesetzes $\mathrm{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$ (auf einer großen Zeitskala). $\rightsquigarrow$ unphysikalisches Verhalten
- Abhilfe auf PDE-Level: mixed hyperbolic divergence cleaning[9]

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\mathrm{curl}\mathbf{E} - \nabla\left(\tfrac{1}{\mu}\Phi\right) && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \Phi &= -\tfrac{1}{\mu^2}\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) - \eta\Phi && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E} \times \nu &= 0, \quad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) &= \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 && \text{in } Q,
\end{aligned}$$

wobei $\Phi(x,t) \in \mathbb{R}$, $\Phi_0 \in H^1(Q)$ und $\eta \in W^{1,\infty}(Q)$ mit $\eta \geq \delta > 0$.

  - Artefakt $\mathrm{div}(\mu\mathbf{H})$ wird gedämpft.

[9] Dedner et. al. 2002. *(für MHD Systeme)*

Ein verallgemeinertes Maxwell-System

- Nachteil vieler ADI-Verfahren ist die Verletzung des Gesetzes $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$ (auf einer großen Zeitskala). $\rightsquigarrow$ unphysikalisches Verhalten
- Abhilfe auf PDE-Level: mixed hyperbolic divergence cleaning[9]

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E} && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E} - \nabla\big(\tfrac{1}{\mu}\Phi\big) && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\partial_t \Phi &= -\tfrac{1}{\mu^2}\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) - \eta\Phi && \text{in } Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}\times\nu = 0, &\quad \mu\mathbf{H}\cdot\nu = 0 && \text{auf } \partial Q \times [0,\infty),\\
\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, &\quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 && \text{in } Q,
\end{aligned}
$$

wobei $\Phi(x,t) \in \mathbb{R}$, $\Phi_0 \in H^1(Q)$ und $\eta \in W^{1,\infty}(Q)$ mit $\eta \geq \delta > 0$.

  - Artefakt $\operatorname{div}(\mu\mathbf{H})$ wird gedämpft.
  - Reduktion zu ursprünglichem System, wenn $\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0$ und $\Phi_0 = 0$.

[9] Dedner et. al. 2002. *(für MHD Systeme)*

ADI-Verfahren für das ungedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

- **1. Schritt:** Schreibe $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = C_1 - C_2.$

ADI-Verfahren für das ungedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

- **1. Schritt:** Schreibe $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = C_1 - C_2.$
- **2. Schritt:** Splitte den verallgemeinerten Maxwell-Operator

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl} & 0 \\ -\frac{1}{\mu}\operatorname{curl} & 0 & -\nabla(\frac{1}{\mu}\cdot) \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\operatorname{div}(\mu\cdot) & 0 \end{pmatrix} = A + B + D_1 + D_2 + D_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon}C_1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon}C_2 & 0 \\ -\frac{1}{\mu}C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_i(\frac{1}{\mu}\cdot)\mathbf{e}_i \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\partial_i(\mu\cdot_i) & 0 \end{pmatrix}$$

  - Verteile die Randbedingungen für $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ auf die Definitionsbereiche der Splitting-Operatoren.[10]

[10] Hochbruck, Jahnke, Schnaubelt 2015.

ADI-Verfahren für das ungedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

Karlsruher Institut für Technologie

- **1. Schritt:** Schreibe $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = C_1 - C_2$.
- **2. Schritt:** Splitte den verallgemeinerten Maxwell-Operator

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl} & 0 \\ -\frac{1}{\mu}\operatorname{curl} & 0 & -\nabla(\frac{1}{\mu}\cdot) \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\operatorname{div}(\mu\cdot) & 0 \end{pmatrix} = {\color{red}A} + {\color{blue}B} + {\color{purple}D_1} + {\color{purple}D_2} + {\color{purple}D_3}$$

$$= {\color{red}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon}C_1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + {\color{blue}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon}C_2 & 0 \\ -\frac{1}{\mu}C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \sum_{i=1}^{3} {\color{purple}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_i(\frac{1}{\mu}\cdot)\mathbf{e}_i \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\partial_i(\mu\cdot_i) & 0 \end{pmatrix}}$$

- **3. Schritt:** Seien $J \in \{A, B, D_1, D_2, D_3\}$, $\tau > 0$. Wende die implizite Mittelpunktsregel an

$$T_\tau(J) := (I + \tfrac{\tau}{2}J)(I - \tfrac{\tau}{2}J)^{-1}.$$

Konservatives ADI-Verfahren für das verallgemeinerte Maxwell-System

- Im ungedämpften Fall $(\sigma, \eta = 0)$ approximiert das ADI-Verfahren

$$\text{(CS)} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n+1} \\ \mathbf{H}_c^{n+1} \\ \Phi_c^{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{3} T_\tau(D_i)\, T_\tau(B)\, T_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n} \\ \mathbf{H}_c^{n} \\ \Phi_c^{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{0} \\ \mathbf{H}_c^{0} \\ \Phi_c^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

die Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}$ des verallgemeinerten Systems (mit $\sigma, \eta = 0$) in $t = (n+1)\tau$.

Konservatives ADI-Verfahren für das verallgemeinerte Maxwell-System

- Im ungedämpften Fall $(\sigma, \eta = 0)$ approximiert das ADI-Verfahren

$$\text{(CS)} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n+1} \\ \mathbf{H}_c^{n+1} \\ \Phi_c^{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{3} T_\tau(D_i)\, T_\tau(B)\, T_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n} \\ \mathbf{H}_c^{n} \\ \Phi_c^{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{0} \\ \mathbf{H}_c^{0} \\ \Phi_c^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

  die Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}$ des verallgemeinerten Systems (mit $\sigma, \eta = 0$) in $t = (n+1)\tau$.

- Definiere die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2 + \mu \Phi^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix} \in L^2(Q)^7.$$

Konservatives ADI-Verfahren für das verallgemeinerte Maxwell-System

- Im ungedämpften Fall $(\sigma, \eta = 0)$ approximiert das ADI-Verfahren

$$\text{(CS)} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n+1} \\ \mathbf{H}_c^{n+1} \\ \Phi_c^{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{3} T_\tau(D_i)\, T_\tau(B)\, T_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n} \\ \mathbf{H}_c^{n} \\ \Phi_c^{n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{0} \\ \mathbf{H}_c^{0} \\ \Phi_c^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

  die Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}$ des verallgemeinerten Systems (mit $\sigma, \eta = 0$) in $t = (n+1)\tau$.

- Definiere die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2 + \mu \Phi^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix} \in L^2(Q)^7.$$

- Das Verfahren (CS) erhält $\mathscr{E}$.

ADI-Verfahren für das gedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

Karlsruher Institut für Technologie

- **1. Schritt:** Schreibe $\operatorname{curl} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = C_1 - C_2$.
- **2. Schritt:** Splitte den verallgemeinerten Maxwell-Operator

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl} & 0 \\ -\frac{1}{\mu}\operatorname{curl} & 0 & -\nabla(\frac{1}{\mu}\cdot) \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\operatorname{div}(\mu\cdot) & -\eta I \end{pmatrix} = A + B + D_1 + D_2 + D_3 + S$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} C_1 & 0 \\ \frac{1}{\mu} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} C_2 & 0 \\ -\frac{1}{\mu} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_i(\frac{1}{\mu}\cdot)\mathbf{e}_i \\ 0 & -\frac{1}{\mu^2}\partial_i(\mu\cdot_i) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta I \end{pmatrix}$$

- **3. Schritt:** Seien $J \in \{A, B, D_1, D_2, D_3\}$, $\tau > 0$. Wende die implizite Mittelpunktsregel an

$$T_\tau(J) = (I + \tfrac{\tau}{2} J)(I - \tfrac{\tau}{2} J)^{-1}.$$

Wave phenomena

ADI-Verfahren für das gedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

- **4. Schritt:** Füge viskose Dämpfung ein

$$V_\tau(J) := \Big(I - \tfrac{\tau^3}{4} J^2 (I - \tfrac{\tau^2}{4} J^2)^{-1}\Big)^{-1} = (I - \tfrac{\tau^2}{4} J^2)(I - \tfrac{\tau^2+\tau^3}{4} J^2)^{-1}$$

für $J \in \{A, B, D_1, D_2, D_3\}$ und $\tau > 0$.

ADI-Verfahren für das gedämpfte verallgemeinerte Maxwell-System

- **4. Schritt:** Füge viskose Dämpfung ein

$$V_\tau(J) := \left(I - \frac{\tau^3}{4} J^2 \left(I - \frac{\tau^2}{4} J^2\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(I - \frac{\tau^2}{4} J^2\right)\left(I - \frac{\tau^2+\tau^3}{4} J^2\right)^{-1}$$

  für $J \in \{A, B, D_1, D_2, D_3\}$ und $\tau > 0$.

- Setze $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$. Das ADI-Verfahren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix} = (I - \tau S)^{-1} \prod_{i=1}^{3} \left(T_\tau(D_i) V_\tau(D_i)\right) T_\tau(B) V_\tau(B) T_\tau(A) V_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{H}^n \\ \Phi^n \end{pmatrix}$$

  approximiert $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}$ aus dem verallgemeinerten System in $t = (n+1)\tau$.

Gleichmäßige exponentielle Stabilität

- Setze $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$. Betrachte erneut das ADI-Verfahren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix} = (I - \tau S)^{-1} \prod_{i=1}^{3} \left(T_\tau(D_i) V_\tau(D_i) \right) T_\tau(B) V_\tau(B) T_\tau(A) V_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{H}^n \\ \Phi^n \end{pmatrix}.$$

Gleichmäßige exponentielle Stabilität

- Setze $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$. Betrachte erneut das ADI-Verfahren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix} = (I - \tau S)^{-1} \prod_{i=1}^{3} \left(T_\tau(D_i) V_\tau(D_i) \right) T_\tau(B) V_\tau(B) T_\tau(A) V_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{H}^n \\ \Phi^n \end{pmatrix}.$$

- Wir erinnern an die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2 + \mu \Phi^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix} \in L^2(Q)^7.$$

Gleichmäßige exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- Setze $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$. Betrachte erneut das ADI-Verfahren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix} = (I - \tau S)^{-1} \prod_{i=1}^{3} \big(T_\tau(D_i) V_\tau(D_i)\big) T_\tau(B) V_\tau(B) T_\tau(A) V_\tau(A) \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \\ \Phi^{n} \end{pmatrix}.$$

- Wir erinnern an die Energie

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix}\right] := \frac{1}{2}\int_Q \varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2 + \mu\Phi^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \Phi \end{pmatrix} \in L^2(Q)^7.$$

Satz

Seien $\varepsilon, \sigma, \eta \geq \delta > 0$ in $W^{1,\infty}(Q)$, $\mu \geq \delta$ in $W^{1,\infty}(Q) \cap W^{2,3}(Q)$. Dann $\exists\ M, \omega, \tau_0 > 0$ mit

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{H}^n \\ \Phi^n \end{pmatrix}\right] \leq M\mathrm{e}^{-\omega\tau n}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix}\right], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \in L^2(Q)^7$, $\tau \in (0, \tau_0)$.

Wave phenomena

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- Bezeichne die Zwischenschritte der Verfahren mit $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n,j} \\ \mathbf{H}_c^{n,j} \\ \Phi_c^{n,j} \end{pmatrix}$, bzw. $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n,j} \\ \mathbf{H}^{n,j} \\ \Phi^{n,j} \end{pmatrix}$.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- Bezeichne die Zwischenschritte der Verfahren mit $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n,j} \\ \mathbf{H}_c^{n,j} \\ \Phi_c^{n,j} \end{pmatrix}$, bzw. $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n,j} \\ \mathbf{H}^{n,j} \\ \Phi^{n,j} \end{pmatrix}$.
- **1. Schritt:** Energiegleichung für das gedämpfte Verfahren

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \\ \Phi^{n} \end{pmatrix}\right] = -2\tau\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma}\mathbf{E}^{n+1} \\ 0 \\ \sqrt{\eta}\Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) < 0$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Restterm $0 \leq R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) = \mathcal{O}(\tau^2)$.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- Bezeichne die Zwischenschritte der Verfahren mit $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n,j} \\ \mathbf{H}_c^{n,j} \\ \Phi_c^{n,j} \end{pmatrix}$, bzw. $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n,j} \\ \mathbf{H}^{n,j} \\ \Phi^{n,j} \end{pmatrix}$.
- **1. Schritt:** Energiegleichung für das gedämpfte Verfahren

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \\ \Phi^{n} \end{pmatrix}\right] = -2\tau\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma}\mathbf{E}^{n+1} \\ 0 \\ \sqrt{\eta}\Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) < 0$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Restterm $0 \leq R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) = \mathcal{O}(\tau^2)$.

  - $\sqrt{R}$ verhält sich wie eine Seminorm bzgl. $\mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}$.

Wave phenomena

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- Bezeichne die Zwischenschritte der Verfahren mit $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_c^{n,j} \\ \mathbf{H}_c^{n,j} \\ \Phi_c^{n,j} \end{pmatrix}$, bzw. $\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n,j} \\ \mathbf{H}^{n,j} \\ \Phi^{n,j} \end{pmatrix}$.
- **1. Schritt:** Energiegleichung für das gedämpfte Verfahren

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \\ \Phi^{n} \end{pmatrix}\right] = -2\tau\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma}\mathbf{E}^{n+1} \\ 0 \\ \sqrt{\eta}\Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) < 0$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Restterm $0 \leq R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) = \mathcal{O}(\tau^2)$.

  - $\sqrt{R}$ verhält sich wie eine Seminorm bzgl. $\mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}$.

- **2. Schritt:** Zeige zeitl. diskrete Version der Beobachtungsungleichung

$$\int_Q (\varepsilon|\mathbf{E}_0|^2 + \mu|\mathbf{H}_0|^2)\,\mathrm{d}x \leq C\int_0^2\int_Q |\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

gleichmäßig in der Diskretisierung.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **2. Schritt:** Zeitlich diskrete Version der Beobachtungsungleichung

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- **2. Schritt:** Zeitlich diskrete Version der Beobachtungsungleichung
  - Setze $N := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \leq 2\}$ für $\tau > 0$.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **2. Schritt:** Zeitlich diskrete Version der Beobachtungsungleichung
  - Setze $N := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \leq 2\}$ für $\tau > 0$.
  - Für Regularität: Definiere (mit $\Gamma_j = \{x \in \partial Q \mid x_j = \pm 1\}$)

$$Y := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E}_j = 0 \text{ auf } \partial Q \setminus \Gamma_j,\ \mathbf{H}_j = 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \{1, 2, 3\}\}.$$ [11]

[11] Eilinghoff, Schnaubelt 2018.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **2. Schritt:** Zeitlich diskrete Version der Beobachtungsungleichung
  - Setze $N := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \leq 2\}$ für $\tau > 0$.
  - Für Regularität: Definiere (mit $\Gamma_j = \{x \in \partial Q \mid x_j = \pm 1\}$)

$$Y := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E}_j = 0 \text{ auf } \partial Q \setminus \Gamma_j,\ \mathbf{H}_j = 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \{1,2,3\}\}.$$ [11]

Proposition

Es gibt Konstanten $C_0, \tau_0 > 0$ mit

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix}\right] \leq C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi_c^k|^2 \mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi_c^{k,j})$$

$$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \in Y,\ \tau \in (0, \tau_0) \text{ und } 0 \leq \check{R}(\tau, \mathbf{E}_c^{n,j}, \mathbf{H}_c^{n,j}, \Phi_c^{n,j}) \leq R(\tau, \mathbf{E}_c^{n,j}, \mathbf{H}_c^{n,j}, \Phi_c^{n,j}).$$

[11] Eilinghoff, Schnaubelt 2018.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

Karlsruher Institut für Technologie

- **2. Schritt:** Zeitlich diskrete Version der Beobachtungsungleichung
  - Setze $N := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \leq 2\}$ für $\tau > 0$.
  - Für Regularität: Definiere (mit $\Gamma_j = \{x \in \partial Q \mid x_j = \pm 1\}$)

$$Y := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E}_j = 0 \text{ auf } \partial Q \setminus \Gamma_j,\ \mathbf{H}_j = 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \{1,2,3\}\}.$$ [11]

Proposition

Es gibt Konstanten $C_0, \tau_0 > 0$ mit

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix}\right] \leq C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi_c^k|^2 \mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi_c^{k,j})$$

$\forall \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \in Y$, $\tau \in (0, \tau_0)$ und $0 \leq \check{R}(\tau, \mathbf{E}_c^{n,j}, \mathbf{H}_c^{n,j}, \Phi_c^{n,j}) \leq R(\tau, \mathbf{E}_c^{n,j}, \mathbf{H}_c^{n,j}, \Phi_c^{n,j})$.

- $\sqrt{\check{R}}$ verhält sich wie eine Seminorm bzgl. $\mathbf{E}_c^{n,j}, \mathbf{H}_c^{n,j}, \Phi_c^{n,j}$.

[11] Eilinghoff, Schnaubelt 2018.

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0\tau \int_Q \varepsilon|\mathbf{E}^k - \mathbf{E}_c^k|^2 + \mu|\Phi^k - \Phi_c^k|^2 \,\mathrm{d}x + C_0 \quad \check{R}(\tau, \mathbf{E}^{k,j} - \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j} - \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi^{k,j} - \Phi_c^{k,j})$$

$$\leq C \quad \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k-1} \\ \mathbf{H}^{k-1} \\ \Phi^{k-1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k} \\ \mathbf{H}^{k} \\ \Phi^{k} \end{pmatrix}\right]\right)$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0\tau\sum_{k=1}^{N}\int_Q \varepsilon|\mathbf{E}^k-\mathbf{E}_c^k|^2+\mu|\Phi^k-\Phi_c^k|^2\,\mathrm{d}x + C_0\sum_{k=1}^{N}\check{R}(\tau, \mathbf{E}^{k,j}-\mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j}-\mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi^{k,j}-\Phi_c^{k,j})$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{N}\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{k-1}\\ \mathbf{H}^{k-1}\\ \Phi^{k-1}\end{pmatrix}\right]-\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{k}\\ \mathbf{H}^{k}\\ \Phi^{k}\end{pmatrix}\right]\right)$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}^k - \mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi^k - \Phi_c^k|^2 \,\mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}^{k,j} - \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j} - \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi^{k,j} - \Phi_c^{k,j})$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N} \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k-1} \\ \mathbf{H}^{k-1} \\ \Phi^{k-1} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k} \\ \mathbf{H}^{k} \\ \Phi^{k} \end{pmatrix} \right] \right) = C \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{N} \\ \mathbf{H}^{N} \\ \Phi^{N} \end{pmatrix} \right] \right).$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}^k - \mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi^k - \Phi_c^k|^2 \, \mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}^{k,j} - \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j} - \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi^{k,j} - \Phi_c^{k,j})$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N} \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k-1} \\ \mathbf{H}^{k-1} \\ \Phi^{k-1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k} \\ \mathbf{H}^{k} \\ \Phi^{k} \end{pmatrix}\right] \right) = C \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{N} \\ \mathbf{H}^{N} \\ \Phi^{N} \end{pmatrix}\right] \right).$$

  - Benutze die Beobachtungsungleichung und die Energiegleichung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix}\right] \leq C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi_c^k|^2 \mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi_c^{k,j}),$$

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n+1} \\ \mathbf{H}^{n+1} \\ \Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{n} \\ \mathbf{H}^{n} \\ \Phi^{n} \end{pmatrix}\right] = -2\tau \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma}\mathbf{E}^{n+1} \\ 0 \\ \sqrt{\eta}\Phi^{n+1} \end{pmatrix}\right] - R(\tau, \mathbf{E}^{n,j}, \mathbf{H}^{n,j}, \Phi^{n,j}) < 0$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0\tau\sum_{k=1}^{N}\int_Q \varepsilon|\mathbf{E}^k-\mathbf{E}_c^k|^2+\mu|\Phi^k-\Phi_c^k|^2\,\mathrm{d}x + C_0\sum_{k=1}^{N}\check{R}(\tau,\mathbf{E}^{k,j}-\mathbf{E}_c^{k,j},\mathbf{H}^{k,j}-\mathbf{H}_c^{k,j},\Phi^{k,j}-\Phi_c^{k,j})$$

$$\le C\sum_{k=1}^{N}\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{k-1}\\\mathbf{H}^{k-1}\\\Phi^{k-1}\end{pmatrix}\right]-\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{k}\\\mathbf{H}^{k}\\\Phi^{k}\end{pmatrix}\right]\right) = C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{0}\\\mathbf{H}^{0}\\\Phi^{0}\end{pmatrix}\right]-\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{N}\\\mathbf{H}^{N}\\\Phi^{N}\end{pmatrix}\right]\right).$$

  - Benutze die Beobachtungsungleichung und die Energiegleichung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{0}\\\mathbf{H}^{0}\\\Phi^{0}\end{pmatrix}\right] \le C_0\tau\sum_{k=1}^{N}\int_Q \varepsilon|\mathbf{E}^k|^2+\mu|\Phi^k|^2\,\mathrm{d}x + C_0\sum_{k=1}^{N}R(\tau,\mathbf{E}^{k,j},\mathbf{H}^{k,j},\Phi^{k,j})$$

$$+ C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{0}\\\mathbf{H}^{0}\\\Phi^{0}\end{pmatrix}\right]-\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^{N}\\\mathbf{H}^{N}\\\Phi^{N}\end{pmatrix}\right]\right)$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Verwende Schritt 1 und zeige: $\exists C = C(\varepsilon, \mu, \eta, \sigma) > 0$ mit

$$C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}^k - \mathbf{E}_c^k|^2 + \mu |\Phi^k - \Phi_c^k|^2 \,\mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} \check{R}(\tau, \mathbf{E}^{k,j} - \mathbf{E}_c^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j} - \mathbf{H}_c^{k,j}, \Phi^{k,j} - \Phi_c^{k,j})$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{N} \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k-1} \\ \mathbf{H}^{k-1} \\ \Phi^{k-1} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{k} \\ \mathbf{H}^{k} \\ \Phi^{k} \end{pmatrix} \right] \right) = C \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{N} \\ \mathbf{H}^{N} \\ \Phi^{N} \end{pmatrix} \right] \right).$$

  - Benutze die Beobachtungsungleichung und die Energiegleichung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix} \right] \leq C_0 \tau \sum_{k=1}^{N} \int_Q \varepsilon |\mathbf{E}^k|^2 + \mu |\Phi^k|^2 \,\mathrm{d}x + C_0 \sum_{k=1}^{N} R(\tau, \mathbf{E}^{k,j}, \mathbf{H}^{k,j}, \Phi^{k,j})$$

$$+ C \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{N} \\ \mathbf{H}^{N} \\ \Phi^{N} \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$\leq C \left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{0} \\ \mathbf{H}^{0} \\ \Phi^{0} \end{pmatrix} \right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{E}^{N} \\ \mathbf{H}^{N} \\ \Phi^{N} \end{pmatrix} \right] \right).$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Schritte 1&2 liefern

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] \leq C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right]\right).$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Schritte 1&2 liefern

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] \le C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right]\right).$$

- **4. Schritt:** Erhalte die Abschätzung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right] \le \left(1 - \frac{1}{C}\right)\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right]$$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Schritte 1&2 liefern

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] \leq C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right]\right).$$

- **4. Schritt:** Erhalte die Abschätzung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right] \leq \left(1-\tfrac{1}{C}\right)\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{-2\omega}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right]$$

für ein festes $\omega > 0$

Beweisskizze für exponentielle Stabilität

- **3. Schritt:** Vergleich der gedämpften & ungedämpften ADI-Verfahren
  - Schritte 1&2 liefern

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] \le C\left(\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] - \mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right]\right).$$

- **4. Schritt:** Erhalte die Abschätzung

$$\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^N\\ \mathbf{H}^N\\ \Phi^N\end{pmatrix}\right] \le \left(1-\tfrac{1}{C}\right)\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{-2\omega}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{-\omega N\tau}\mathscr{E}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\\ \Phi^0\end{pmatrix}\right]$$

für ein festes $\omega > 0$ und iteriere.

Konvergenzresultat in H^{-1}

- Verwende die Räume (mit $\Gamma_j = \{x \in \partial Q \mid x_j = \pm 1\}$)

$$Y = \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E}_j = 0 \text{ auf } \partial Q \setminus \Gamma_j,\ \mathbf{H}_j = 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \{1,2,3\}\},$$ [12]

$$X_1 := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E} \times \nu = 0 \text{ auf } \partial Q,\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0,\ \mathbf{H} \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial Q,\ \Phi = 0\}.$$

[12] Eilinghoff, Schnaubelt 2018.

Konvergenzresultat in H^{-1}

- Verwende die Räume (mit $\Gamma_j = \{x \in \partial Q \mid x_j = \pm 1\}$)

$$Y = \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E}_j = 0 \text{ auf } \partial Q \setminus \Gamma_j,\ \mathbf{H}_j = 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \{1,2,3\}\},$$ [12]

$$X_1 := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \Phi) \in H^1(Q)^7 \mid \mathbf{E} \times \nu = 0 \text{ auf } \partial Q,\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0,\ \mathbf{H} \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial Q,\ \Phi = 0\}.$$

Satz

Seien $\varepsilon, \sigma, \eta \geq \delta > 0$ in $W^{1,\infty}(Q)$, $\mu \geq \delta$ in $W^{1,\infty}(Q) \cap W^{2,3}(Q)$ und $T > 0$. Dann $\exists\ C, \check{\tau}_0 > 0$ mit

$$\left| \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}^n \\ \mathbf{H}^n \\ \Phi^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E}(n\tau) \\ \mathbf{H}(n\tau) \\ \Phi(n\tau) \end{pmatrix}, y \right)_{L^2} \right| \leq C\tau(1+T)T\mathrm{e}^{CT} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} \right\|_{H^1} \|y\|_{H^1}$$

$\forall y \in Y$, $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} \in X_1$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n\tau \leq T$ und $\tau \in (0, \check{\tau}_0)$.

[12] Eilinghoff, Schnaubelt 2018.

Zusammenfassung

- Lineare isotrope Maxwell-Gleichungen unter Einfluss des Ohmschen Gesetzes sind gleichmäßig exponentiell stabil.
- Modifikation eines konservativen ADI-Verfahrens durch künstliche Dämpfung
  $\rightsquigarrow$ zeitlich diskrete Approximationen mit gleichmäßig exponentiellem Abfall.
- Das modifizierte Verfahren konvergiert mit Ordnung 1 in H^{-1}.

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= \tfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{curl}\mathbf{H} - \tfrac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \partial_t \mathbf{H} &= -\tfrac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E}, \\ \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) &= 0. \end{aligned}$$

Referenzen

- Chen, W., Li, X. and Liang, D.: Energy-conserved splitting finite-difference time-domain methods for Maxwell's equations in three dimensions. SIAM J. Numer. Anal. 48 (4) (2010), 1530–1554.
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., Munz, C.-D., Schnitzer, T. and Wesenberg, M.: Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. J. Comput. Phys. 175 (2) (2002), 645–673.
- Eilinghoff, J., Jahnke, T. and Schnaubelt, R.: Error analysis of an energy preserving ADI splitting scheme for the Maxwell equation. Preprint 2018/12 of CRC 1173. See `www.waves.kit.edu/downloads/CRC1173_Preprint_2018-12.pdf`
- Eilinghoff, J. and Schnaubelt, R.: Error analysis of an ADI splitting scheme for the inhomogeneous Maxwell equations. Discrete Contin. Dyn. Syst - A 38 (11) (2018), 5685–5709.
- Eller, M.: Stability of the anisotropic Maxwell equations with a conductivity term. Preprint 2018.
- Ervedoza, S. and Zuazua, E.: Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems. J. Math. Pures Appl. 91 (2009), 20–48.
- Hochbruck, M., Jahnke, T. and Schnaubelt, R.: Convergence of an ADI splitting for Maxwell's equations. Numer. Math. 129 (2015), 535–561.

Referenzen

- Nicaise, S. and Pignotti, C.: Internal stabilization of Maxwell's equations in heterogeneous media. Abstr. Appl. Anal. 7 (2005), 791–811.
- Phung, K.: Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques. ESAIM COCV 5 (2000), 87–137.
- Ramdani, K., Takahashi, T. and Tucsnak, M.: Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations. ESAIM COCV 13 (3) (2007), 503–527.
- Tébou, L. and Zuazua, E.: Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity. Numer. Math. 95 (2003), 563–598.
- Tébou, L. and Zuazua, E.: Uniform boundary stabilization of the finite difference space discretization of the 1-d wave equation. Adv. Comput. Math. 26 (2007), 337–365.
- Zhang, X., Zheng, C. and Zuazua, E.: Time discrete wave equations: boundary observability and control. Discr. Cont. Dyn. Sys. 23 (1/2) (2009), 571–604.