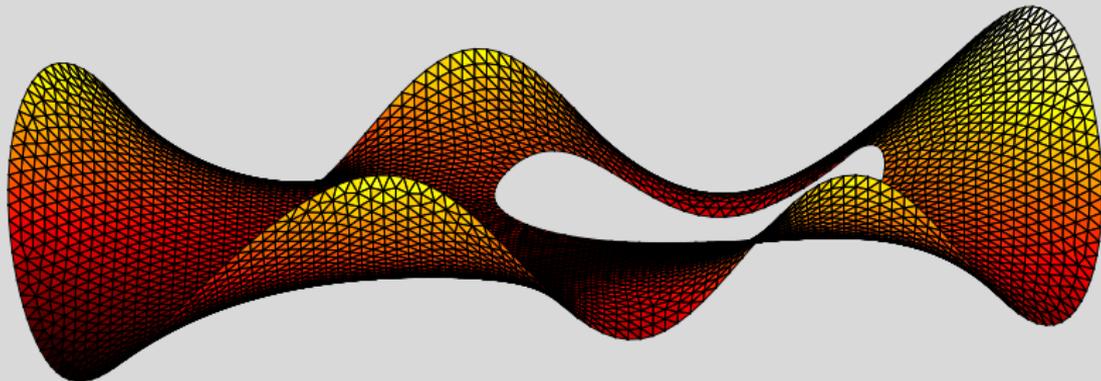


# Crashkurs Uncertainty Quantification (UQ)

Benny Stein, Tobias Jahnke

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)



- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- Numerische Methoden für Uncertainty Quantification
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

- **PDEs mit zufälligen Parametern**
- Polynomial Chaos expansions
- Numerische Methoden für Uncertainty Quantification
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

- $\mathcal{L}$  allgemeiner Differentialoperator (zeit- und/oder raumabhängig, linear oder nicht-linear)

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

- $\mathcal{L}$  allgemeiner Differentialoperator (zeit- und/oder raumabhängig, linear oder nicht-linear)
- $Y_j: \Omega \rightarrow \Gamma^{(j)} \subseteq \mathbb{R}$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

- $\mathcal{L}$  allgemeiner Differentialoperator (zeit- und/oder raumabhängig, linear oder nicht-linear)
- $Y_j: \Omega \rightarrow \Gamma^{(j)} \subseteq \mathbb{R}$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$
- $\omega$  beschreibt die Abhängigkeit von einer zufälligen Eingabe, z.B. in
  - den Parametern der Gleichung,
  - Rand- oder Anfangsbedingungen,
  - der Form des Gebiets.

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

# PDEs mit zufälligen Parametern

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

**Herleitung eines deterministischen Modells:**

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

**Herleitung eines deterministischen Modells:**

- Führe Variable  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein:

$$(y_1, \dots, y_d) = (Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)) \in \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)} \text{ für } \omega \in \Omega$$

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

## Herleitung eines deterministischen Modells:

- Führe Variable  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein:

$$(y_1, \dots, y_d) = (Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)) \in \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)} \text{ für } \omega \in \Omega$$

- Parameterraum  $\Gamma := \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)}$

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

## Herleitung eines deterministischen Modells:

- Führe Variable  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein:

$$(y_1, \dots, y_d) = (Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)) \in \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)} \text{ für } \omega \in \Omega$$

- Parameterraum  $\Gamma := \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)}$
- Wahrscheinlichkeitsdichte von  $Y := (Y_1, \dots, Y_d)$ :

$$\rho(y) = \rho^{(1)}(y_1) \cdots \rho^{(d)}(y_d), \quad y \in \Gamma.$$

Betrachte ein allgemeines Problem der Gestalt

$$\mathcal{L}(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega); u) = f(t, x, Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)).$$

## Herleitung eines deterministischen Modells:

- Führe Variable  $y = (y_1, \dots, y_d)$  ein:

$$(y_1, \dots, y_d) = (Y_1(\omega), \dots, Y_d(\omega)) \in \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)} \text{ für } \omega \in \Omega$$

- Parameterraum  $\Gamma := \Gamma^{(1)} \times \dots \times \Gamma^{(d)}$
- Wahrscheinlichkeitsdichte von  $Y := (Y_1, \dots, Y_d)$ :

$$\rho(y) = \rho^{(1)}(y_1) \cdots \rho^{(d)}(y_d), \quad y \in \Gamma.$$

- Erhalte für jedes  $y \in \Gamma$  eine partielle Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y).$$

# Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizient

$S \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet mit glattem Rand,  $\Gamma = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) &= f(x, y), & x \in S, & y \in \Gamma, \\ u(x, y) &= 0, & x \in \partial S, & y \in \Gamma. \end{aligned}$$

# Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizient

$S \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet mit glattem Rand,  $\Gamma = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) &= f(x, y), & x \in S, & y \in \Gamma, \\ u(x, y) &= 0, & x \in \partial S, & y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Weiter seien  $a_0 > 0$ ,  $a_1 \in L^\infty(S)$  und

$$a(x, y) = a_0 + \exp(a_1(x)y), \quad y \in \Gamma.$$

# Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizient

$S \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet mit glattem Rand,  $\Gamma = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) &= f(x, y), & x \in S, & y \in \Gamma, \\ u(x, y) &= 0, & x \in \partial S, & y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Weiter seien  $a_0 > 0$ ,  $a_1 \in L^\infty(S)$  und

$$a(x, Y(\omega)) = a_0 + \exp(a_1(x) Y(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Betrachte  $y$  als Realisierung einer Zufallsvariable  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

# Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizient

$S \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet mit glattem Rand,  $\Gamma = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) &= f(x, y), & x \in S, & y \in \Gamma, \\ u(x, y) &= 0, & x \in \partial S, & y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Weiter seien  $a_0 > 0$ ,  $a_1 \in L^\infty(S)$  und

$$a(x, Y(\omega)) = a_0 + \exp(a_1(x) Y(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Betrachte  $y$  als Realisierung einer Zufallsvariable  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .  
Hier:  $d = 1$ . Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  von  $Y$ :

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad y \in \Gamma = (-\infty, \infty).$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (1)$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (1)$$

- Erzeuge  $N$  Zufallsvektoren  $y^{(1)}, \dots, y^{(N)} \in \Gamma$  entsprechend der Verteilung von  $Y$ .

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (1)$$

- Erzeuge  $N$  Zufallsvektoren  $y^{(1)}, \dots, y^{(N)} \in \Gamma$  entsprechend der Verteilung von  $Y$ .
- Berechne für diese Vektoren Approximationen an die Lösung

$$\tilde{u}(t, x, y^{(n)}), \quad n = 1, \dots, N$$

von (1) für  $y = y^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (1)$$

- Erzeuge  $N$  Zufallsvektoren  $y^{(1)}, \dots, y^{(N)} \in \Gamma$  entsprechend der Verteilung von  $Y$ .

- Berechne für diese Vektoren Approximationen an die Lösung

$$\tilde{u}(t, x, y^{(n)}), \quad n = 1, \dots, N$$

von (1) für  $y = y^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

- Berechne

$$\mathbb{E}[u(t, x, Y)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(t, x, y^{(n)}).$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (1)$$

- Erzeuge  $N$  Zufallsvektoren  $y^{(1)}, \dots, y^{(N)} \in \Gamma$  entsprechend der Verteilung von  $Y$ .

- Berechne für diese Vektoren Approximationen an die Lösung

$$\tilde{u}(t, x, y^{(n)}), \quad n = 1, \dots, N$$

von (1) für  $y = y^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

- Berechne

$$\mathbb{E}[u(t, x, Y)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(t, x, y^{(n)}).$$

## Problem

- Konvergenzgeschwindigkeit  $N^{-\frac{1}{2}}$  unabhängig von Regularität der Lösung in  $y$  (Effizienzverbesserung durch MLMC, MIMC, ...)

- PDEs mit zufälligen Parametern
- **Polynomial Chaos expansions**
- Numerische Methoden für Uncertainty Quantification
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

■ Ansatzraum:  $L^2_\rho(\Gamma) = \left\{ v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\rho^2 = \int_\Gamma v(y)^2 \rho(y) dy < \infty \right\}$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Ansatzraum:  $L^2_\rho(\Gamma) = \left\{ v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\rho^2 = \int_\Gamma v(y)^2 \rho(y) dy < \infty \right\}$
- Annahme an die Lösung von (2):

$$(y \mapsto u(t, x, y)) \in L^2_\rho(\Gamma) \quad \text{für fast alle } t, x$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

■ Ansatzraum:  $L^2_\rho(\Gamma) = \left\{ v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\rho^2 = \int_\Gamma v(y)^2 \rho(y) dy < \infty \right\}$

■ Annahme an die Lösung von (2):

$$(y \mapsto u(t, x, y)) \in L^2_\rho(\Gamma) \quad \text{für fast alle } t, x$$

■ Wähle ein vollständiges System von Orthonormalpolynomen in  $L^2_\rho(\Gamma)$ :

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Ansatzraum:  $L^2_\rho(\Gamma) = \left\{ v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\rho^2 = \int_\Gamma v(y)^2 \rho(y) dy < \infty \right\}$
- Annahme an die Lösung von (2):

$$(y \mapsto u(t, x, y)) \in L^2_\rho(\Gamma) \quad \text{für fast alle } t, x$$

- Wähle ein vollständiges System von Orthonormalpolynomen in  $L^2_\rho(\Gamma)$ :  
Für  $d = 1$ :

$$(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}, \quad \deg(\phi_j) = j, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle_\rho = \int_\Gamma \phi_i(y) \phi_j(y) \rho(y) dy = \delta_{ij}$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Ansatzraum:  $L^2_\rho(\Gamma) = \left\{ v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\rho^2 = \int_\Gamma v(y)^2 \rho(y) dy < \infty \right\}$
- Annahme an die Lösung von (2):

$$(y \mapsto u(t, x, y)) \in L^2_\rho(\Gamma) \quad \text{für fast alle } t, x$$

- Wähle ein vollständiges System von Orthonormalpolynomen in  $L^2_\rho(\Gamma)$ :  
Für  $d = 2$ :

$$\rho^{(1)}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2}, \quad y_1 \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow (\phi_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}_0} \text{ Hermite-Polynome}$$

$$\rho^{(2)}(y_2) = \frac{1}{2}, \quad y_2 \in [-1, 1] \quad \rightsquigarrow (\phi_j^{(2)})_{j \in \mathbb{N}_0} \text{ Legendre-Polynome}$$

$$\rho(y) = \rho^{(1)}(y_1) \rho^{(2)}(y_2) \quad \rightsquigarrow \phi_j(y) = \phi_{j_1}^{(1)}(y_1) \phi_{j_2}^{(2)}(y_2)$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Entwickle die Lösung in Orthonormalbasis

$$u(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad u_k(x) = \langle u(x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

- Konvergenz in  $L^2_{\rho}(\Gamma)$  nach Annahme

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Entwickle die Lösung in Orthonormalbasis

$$u(t, x, \mathbf{Y}(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, x) \phi_k(\mathbf{Y}(\omega)), \quad u_k(x) = \langle u(x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

- Konvergenz in  $L^2_{\rho}(\Gamma)$  nach Annahme
- oft stärkere Konvergenzaussagen möglich unter Berücksichtigung der  $\omega$ -Abhängigkeit, benötigt Eigenschaften von  $Y$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Entwickle die Lösung in Orthonormalbasis

$$u(t, x, Y(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, x) \phi_k(Y(\omega)), \quad u_k(x) = \langle u(x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

- Konvergenz in  $L^2_{\rho}(\Gamma)$  nach Annahme
- oft stärkere Konvergenzaussagen möglich unter Berücksichtigung der  $\omega$ -Abhängigkeit, benötigt Eigenschaften von  $Y$
- Wichtige Größen der Zufallsvariable  $\omega \mapsto u(t, x, Y(\omega))$  sind

$$\mathbb{E}[u(t, x, Y)] = u_0(t, x), \quad \mathbb{V}[u(t, x, Y)] = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t, x)|^2.$$

$$\mathcal{L}(t, x, y; u) = f(t, x, y) \quad (2)$$

- Entwickle die Lösung in Orthonormalbasis

$$u(t, x, \mathbf{Y}(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, x) \phi_k(\mathbf{Y}(\omega)), \quad u_k(x) = \langle u(x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

- Konvergenz in  $L^2_{\rho}(\Gamma)$  nach Annahme
- oft stärkere Konvergenzaussagen möglich unter Berücksichtigung der  $\omega$ -Abhängigkeit, benötigt Eigenschaften von  $Y$
- Wichtige Größen der Zufallsvariable  $\omega \mapsto u(t, x, \mathbf{Y}(\omega))$  sind

$$\mathbb{E}[u(t, x, \mathbf{Y})] = u_0(t, x), \quad \mathbb{V}[u(t, x, \mathbf{Y})] = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(t, x)|^2.$$

- oft schnelle Konvergenz ( $u$  hat häufig hohe Regularität in  $y$ )

- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- **Numerische Methoden für Uncertainty Quantification**
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

# Numerische Methoden für Uncertainty Quantification

# Numerische Methoden für Uncertainty Quantification

PCE Grundlage für die wichtigsten (nicht-sampling) Verfahren:

- Stochastische Galerkin-Verfahren
- Stochastische Kollokationsverfahren

# Numerische Methoden für Uncertainty Quantification

PCE Grundlage für die wichtigsten (nicht-sampling) Verfahren:

- Stochastische Galerkin-Verfahren
- Stochastische Kollokationsverfahren

Approximiere die Lösung durch eine (abgeschnittene) PCE:

$$\sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y) \approx u(t, x, y), \quad u_k(t, x) \approx \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

# Numerische Methoden für Uncertainty Quantification

PCE Grundlage für die wichtigsten (nicht-sampling) Verfahren:

- Stochastische Galerkin-Verfahren
- Stochastische Kollokationsverfahren

Approximiere die Lösung durch eine (abgeschnittene) PCE:

$$\sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y) \approx u(t, x, y), \quad u_k(t, x) \approx \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho}.$$

Ansatzraum in beiden Fällen:

$$\text{span}(\{\phi_0, \dots, \phi_{P-1}\})$$

- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- **Numerische Methoden für Uncertainty Quantification**
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y),$$

erhalte

$$\mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right) = f(t, x, y).$$

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y),$$

erhalte

$$\mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right) = f(t, x, y).$$

- **2. Schritt:** Galerkin-Ansatz bzgl. der gleichen Polynombasis

$$\left\langle \mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right), \phi_i \right\rangle_{\rho} = \langle f(t, x, y), \phi_i \rangle_{\rho}, \quad i = 0, \dots, P-1.$$

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y),$$

erhalte

$$\mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right) = f(t, x, y).$$

- **2. Schritt:** Galerkin-Ansatz bzgl. der gleichen Polynombasis

$$\left\langle \mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right), \phi_i \right\rangle_{\rho} = \langle f(t, x, y), \phi_i \rangle_{\rho}, \quad i = 0, \dots, P-1.$$

- **3. Schritt:** Herleitung eines gekoppelten Systems von  $P$  (deterministischen) PDEs

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y),$$

erhalte

$$\mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right) = f(t, x, y).$$

- **2. Schritt:** Galerkin-Ansatz bzgl. der gleichen Polynombasis

$$\left\langle \mathcal{L} \left( t, x, y; \sum_{k=0}^{P-1} u_k \phi_k \right), \phi_i \right\rangle_{\rho} = \langle f(t, x, y), \phi_i \rangle_{\rho}, \quad i = 0, \dots, P-1.$$

- **3. Schritt:** Herleitung eines gekoppelten Systems von  $P$  (deterministischen) PDEs
- **4. Schritt:** Wahl von Raum- und Zeitdiskretisierung, Lösen des volldiskreten Problems

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

$S \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet,  $\Gamma = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x, y) \nabla u(x, y)) &= f(x, y), & x \in S, & y \in \Gamma, \\ u(x, y) &= 0, & x \in \partial S, & y \in \Gamma. \end{aligned}$$

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

Approximiere die Koeffizienten  $u_k(x)$  der exakten PCE durch

$$\tilde{u}_k(x) \approx u_k(x), \quad \tilde{u}(x, y) = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \approx u(x, y)$$

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

Approximiere die Koeffizienten  $u_k(x)$  der exakten PCE durch

$$\tilde{u}_k(x) \approx u_k(x), \quad \tilde{u}(x, y) = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \approx u(x, y)$$

sodass die Galerkin-Bedingung

$$- \left\langle \nabla \cdot \left( a(x, y) \sum_{k=0}^{P-1} \nabla \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \right), \phi_i(y) \right\rangle_{\rho} = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_{\rho}$$

für  $i = 0, \dots, P - 1$  erfüllt ist.

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

Approximiere die Koeffizienten  $u_k(x)$  der exakten PCE durch

$$\tilde{u}_k(x) \approx u_k(x), \quad \tilde{u}(x, y) = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \approx u(x, y)$$

sodass die Galerkin-Bedingung

$$- \left\langle \nabla \cdot \left( a(x, y) \sum_{k=0}^{P-1} \nabla \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \right), \phi_i(y) \right\rangle_{\rho} = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_{\rho}$$

für  $i = 0, \dots, P - 1$  erfüllt ist. Vereinfachung:  $a(x, y) = a(y)$

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

Approximiere die Koeffizienten  $u_k(x)$  der exakten PCE durch

$$\tilde{u}_k(x) \approx u_k(x), \quad \tilde{u}(x, y) = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \approx u(x, y)$$

sodass die Galerkin-Bedingung

$$- \left\langle \nabla \cdot \left( a(x, y) \sum_{k=0}^{P-1} \nabla \tilde{u}_k(x) \phi_k(y) \right), \phi_i(y) \right\rangle_{\rho} = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_{\rho}$$

für  $i = 0, \dots, P - 1$  erfüllt ist. Vereinfachung:  $a(x, y) = a(y)$

$$- \sum_{k=0}^{P-1} \Delta \tilde{u}_k(x) \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_{\rho} = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_{\rho}, \quad i = 0, \dots, P - 1$$

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

$$-\sum_{k=0}^{P-1} \Delta \tilde{u}_k(x) \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_\rho, \quad i = 0, \dots, P-1$$

↔ gekoppeltes System von  $P$  Differentialgleichungen

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

$$-\sum_{k=0}^{P-1} \Delta \tilde{u}_k(x) \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_\rho, \quad i = 0, \dots, P-1$$

↔ gekoppeltes System von  $P$  Differentialgleichungen

Anschließende Raumdiskretisierung mit  $M$  (inneren) Punkten durch

- Finite Elemente (Galerkin-Bedingung in  $y$  und  $x$ ) oder
- Finite Differenzen/Fourier-Methoden.

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

$$-\sum_{k=0}^{P-1} \Delta \tilde{u}_k(x) \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_\rho, \quad i = 0, \dots, P-1$$

↔ gekoppeltes System von  $P$  Differentialgleichungen

Anschließende Raumdiskretisierung mit  $M$  (inneren) Punkten durch

- Finite Elemente (Galerkin-Bedingung in  $y$  und  $x$ ) oder
- Finite Differenzen/Fourier-Methoden.

Das zu lösende LGS hat die Größe  $M \cdot P$ .

## Poisson-Problem mit zufälligem Diffusionskoeffizienten

$$-\sum_{k=0}^{P-1} \Delta \tilde{u}_k(x) \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho = \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_\rho, \quad i = 0, \dots, P-1$$

↔ gekoppeltes System von  $P$  Differentialgleichungen

Anschließende Raumdiskretisierung mit  $M$  (inneren) Punkten durch

- Finite Elemente (Galerkin-Bedingung in  $y$  und  $x$ ) oder
- Finite Differenzen/Fourier-Methoden.

Das zu lösende LGS hat die Größe  $M \cdot P$ .

**Erinnerung:** Beachte für  $d > 1$ :

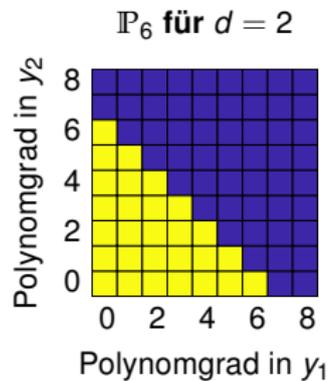
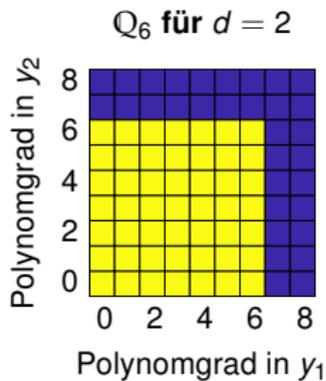
$$\phi_k(y) = \phi_{k_1}^{(1)}(y_1) \cdots \phi_{k_d}^{(d)}(y_d), \quad (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$$

# Wahl des Polynomraums

Wie wählt man den Polynomraum für  $d > 1$ ?

# Wahl des Polynomraums

Wie wählt man den Polynomraum für  $d > 1$ ?



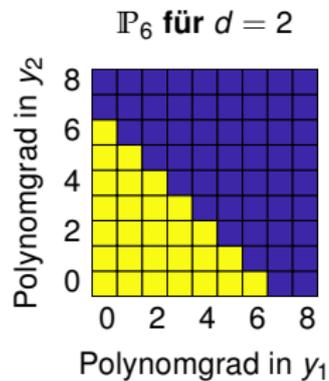
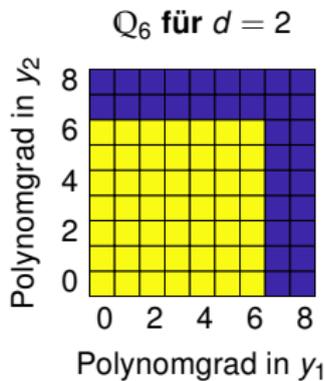
$Q_K$

Ansatzraum

$\mathbb{P}_K$

# Wahl des Polynomraums

Wie wählt man den Polynomraum für  $d > 1$ ?



$$y_1^3 y_2^4 \in Q_6 \setminus P_6$$

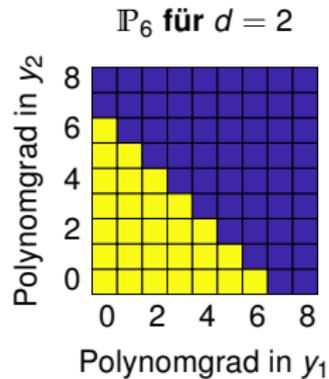
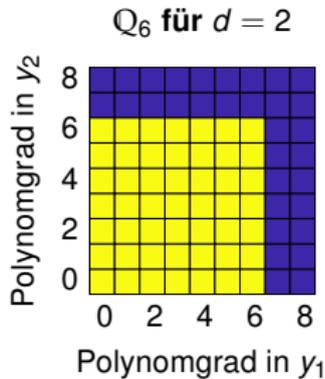
$Q_K$

Ansatzraum

$P_K$

# Wahl des Polynomraums

Wie wählt man den Polynomraum für  $d > 1$ ?

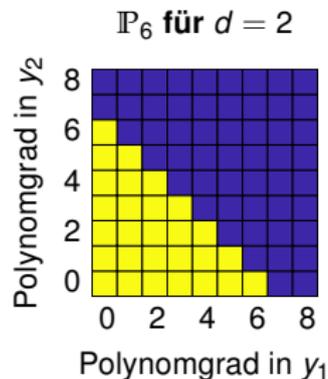
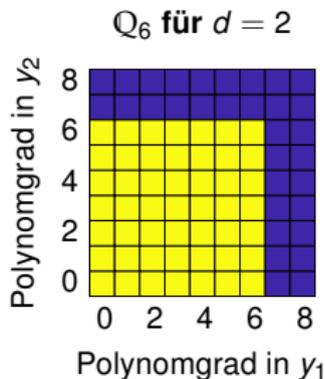


$$y_1^3 y_2^4 \in Q_6 \setminus P_6$$

$Q_K$	Ansatzraum	$P_K$
$(K + 1)^d$	$P$	$\binom{K+d}{d}$

# Wahl des Polynomraums

Wie wählt man den Polynomraum für  $d > 1$ ?



$$y_1^3 y_2^4 \in Q_6 \setminus P_6$$

$Q_K$	Ansatzraum	$P_K$
$(K+1)^d$	$P$	$\binom{K+d}{d}$

Für  $d > 1$  sind die Polynomräume  $Q_K$  zu groß!  
 Wähle also Polynomräume, die nicht größer als  $P_K$  sind!

- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- **Numerische Methoden für Uncertainty Quantification**
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

# Stochastische Kollokationsverfahren

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad (3)$$

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad (3)$$

und berechne direkt die Koeffizienten über eine Quadraturformel

$$\begin{aligned} u_k(t, x) &= \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_\rho = \int_{\Gamma} u(t, x, y) \phi_k(y) \rho(y) dy \\ &\approx \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \end{aligned} \quad (4)$$

mit Knoten  $y_1, \dots, y_Q$  und Gewichten  $w_1, \dots, w_Q$ .

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad (3)$$

und berechne direkt die Koeffizienten über eine Quadraturformel

$$\begin{aligned} u_k(t, x) &= \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_\rho = \int_{\Gamma} u(t, x, y) \phi_k(y) \rho(y) dy \\ &\approx \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \end{aligned} \quad (4)$$

mit Knoten  $y_1, \dots, y_Q$  und Gewichten  $w_1, \dots, w_Q$ .

- **2. Schritt:** Approximiere nun die Lösungen

$$u(t, x, y_j), \quad j = 1, \dots, Q$$

von  $Q$  deterministischen (entkoppelten) PDEs.

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad (3)$$

und berechne direkt die Koeffizienten über eine Quadraturformel

$$\begin{aligned} u_k(t, x) &= \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_\rho = \int_{\Gamma} u(t, x, y) \phi_k(y) \rho(y) dy \\ &\approx \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \end{aligned} \quad (4)$$

mit Knoten  $y_1, \dots, y_Q$  und Gewichten  $w_1, \dots, w_Q$ .

- **2. Schritt:** Approximiere nun die Lösungen

$$u(t, x, y_j), \quad j = 1, \dots, Q$$

von  $Q$  deterministischen (entkoppelten) PDEs.

- **1. Schritt:** Ersetze  $u$  durch seine (abgeschnittene) PCE

$$u(t, x, y) \approx \sum_{k=0}^{P-1} u_k(t, x) \phi_k(y), \quad (3)$$

und berechne direkt die Koeffizienten über eine Quadraturformel

$$\begin{aligned} u_k(t, x) &= \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_\rho = \int_{\Gamma} u(t, x, y) \phi_k(y) \rho(y) dy \\ &\approx \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \end{aligned} \quad (4)$$

mit Knoten  $y_1, \dots, y_Q$  und Gewichten  $w_1, \dots, w_Q$ .

- **2. Schritt:** Approximiere nun die Lösungen

$$u(t, x, y_j), \quad j = 1, \dots, Q$$

von  $Q$  deterministischen (entkoppelten) PDEs.

- **3. Schritt:** Berechne die PCE (3) mit (4).

# Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .

# Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

# Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ .

# Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

- Gauss-Quadratur mit  $Q = P$  Punkten

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

- Gauss-Quadratur mit  $Q = P$  Punkten

## Problem für $d > 1$ :

- Tensor-Quadraturformeln in  $d$  Dimensionen: Für den Ansatzraum  $\mathbb{P}_K$  (oder  $\mathbb{Q}_K$ ) braucht man  $Q = (K+1)^d$  Gitterpunkte  $\rightsquigarrow$  zu viele!

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

- Gauss-Quadratur mit  $Q = P$  Punkten

## Problem für $d > 1$ :

- Tensor-Quadraturformeln in  $d$  Dimensionen: Für den Ansatzraum  $\mathbb{P}_K$  (oder  $\mathbb{Q}_K$ ) braucht man  $Q = (K+1)^d$  Gitterpunkte  $\rightsquigarrow$  zu viele!
- Gibt es Quadraturformeln, die deutlich weniger Gitterpunkte haben, aber exakt sind auf Polynomräumen wie  $\mathbb{P}_K$ ?

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen? Sei  $d = 1$ .  
Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

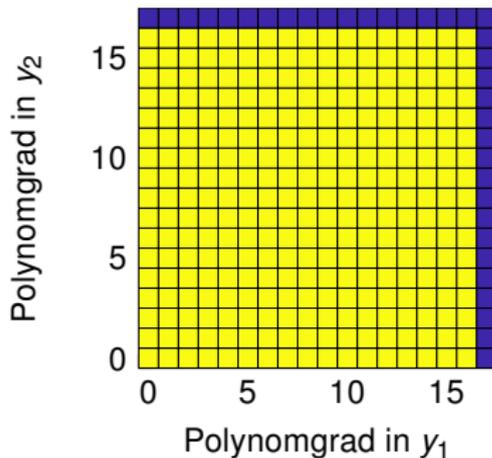
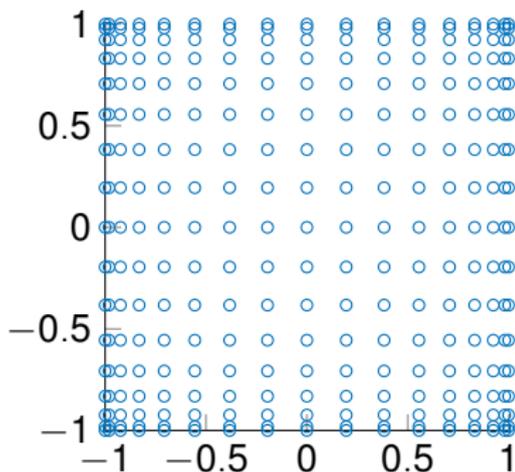
- Gauss-Quadratur mit  $Q = P$  Punkten

## Problem für $d > 1$ :

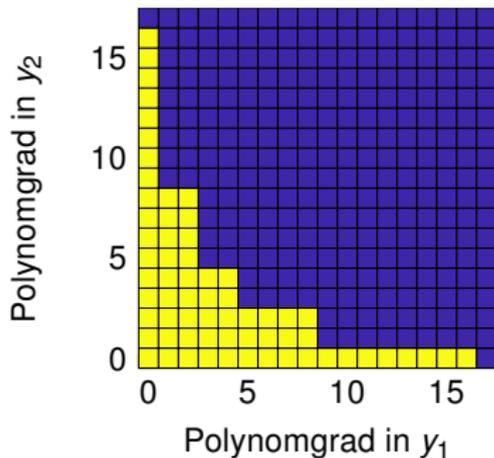
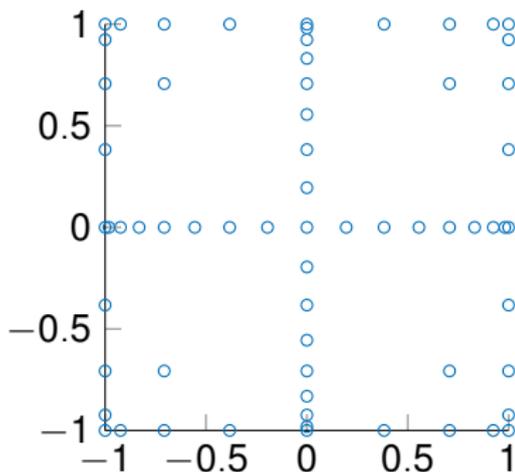
- Tensor-Quadraturformeln in  $d$  Dimensionen: Für den Ansatzraum  $\mathbb{P}_K$  (oder  $Q_K$ ) braucht man  $Q = (K+1)^d$  Gitterpunkte  $\rightsquigarrow$  zu viele!
- Gibt es Quadraturformeln, die deutlich weniger Gitterpunkte haben, aber exakt sind auf Polynomräumen wie  $\mathbb{P}_K$ ?

**Lösung:** Dünne Gitter!

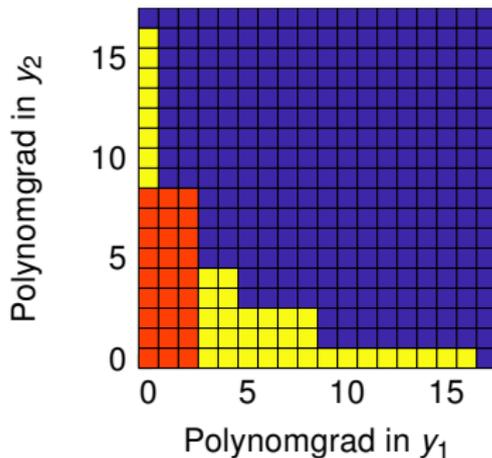
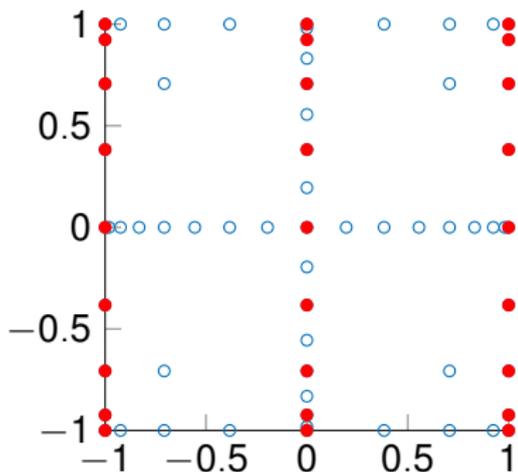
- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- Numerische Methoden für Uncertainty Quantification
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- **Dünne Gitter**
- Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern



**Abbildung:** Zwei-dimensionales volles Clenshaw-Curtis-Gitter; links: Knoten, rechts: exakt integrierte Polynome (gelb)



**Abbildung:** Zwei-dimensionales dünnes Clenshaw-Curtis-Gitter; links: Knoten, rechts: exakt integrierte Polynome (gelb)



**Abbildung:** Zwei-dimensionales dünnes Clenshaw-Curtis-Gitter; links: Knoten, rechts: exakt integrierte Polynome (gelb)

## Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen?

Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

- Gauss-Quadratur mit  $Q = P$  Punkten

## Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen?

Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

- Gauss-Quadratur mit  $Q > P$  Punkten

**Problem:** Verwendet man dünne Gitter auf Basis von (Gauss-)Quadraturpunkten, so wächst  $Q$  deutlich schneller als  $P$ .

## Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen?

Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

■ Gauss-Quadratur mit  $Q > P$  Punkten

**Problem:** Verwendet man dünne Gitter auf Basis von (Gauss-)Quadraturpunkten, so wächst  $Q$  deutlich schneller als  $P$ .

**Keine Lösung:** Verwendet man keine Tensor-Polynomräume und dünne Gitter, so ist für  $d > 1$  immer  $Q > P$  erfüllt.

## Wahl der Quadraturformel

Wie “gut” muss man die Quadraturformel wählen?

Bisher zwei Approximationen:

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{j=1}^Q u(t, x, y_j) \phi_k(y_j) w_j \phi_k(y) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \langle u(t, x, \cdot), \phi_k \rangle_{\rho} \phi_k(y)$$

Diese sollten exakt sein, falls die Lösung selbst im Ansatzraum liegt, d.h.  $u(t, x, \cdot) = \phi_i$  für ein  $i \in \{0, \dots, P-1\}$ . Zum Beispiel:

■ Gauss-Quadratur mit  $Q > P$  Punkten

**Problem:** Verwendet man dünne Gitter auf Basis von (Gauss-)Quadraturpunkten, so wächst  $Q$  deutlich schneller als  $P$ .

**Keine Lösung:** Verwendet man keine Tensor-Polynomräume und dünne Gitter, so ist für  $d > 1$  immer  $Q > P$  erfüllt.

In Anwendungen:  $Q$  ist meistens um einen Faktor 3 – 10 größer als  $P$

# Vergleich Galerkin/Kollokation

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

# Vergleich Galerkin/Kollokation

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

# Vergleich Galerkin/Kollokation

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

- unter Verwendung dünner Gitter ist  $P$  signifikant kleiner als  $Q$ , wenn man für beide Verfahren denselben Polynomraum verwendet (geringerer Aufwand)

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

- unter Verwendung dünner Gitter ist  $P$  signifikant kleiner als  $Q$ , wenn man für beide Verfahren denselben Polynomraum verwendet (geringerer Aufwand)
- in der Theorie oft einfacher zu analysieren (Ausgangspunkt schwache Formulierung)

# Vergleich Galerkin/Kollokation

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

- unter Verwendung dünner Gitter ist  $P$  signifikant kleiner als  $Q$ , wenn man für beide Verfahren denselben Polynomraum verwendet (geringerer Aufwand)
- in der Theorie oft einfacher zu analysieren (Ausgangspunkt schwache Formulierung)

## Vorteile Kollokation

# Vergleich Galerkin/Kollokation

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

- unter Verwendung dünner Gitter ist  $P$  signifikant kleiner als  $Q$ , wenn man für beide Verfahren denselben Polynomraum verwendet (geringerer Aufwand)
- in der Theorie oft einfacher zu analysieren (Ausgangspunkt schwache Formulierung)

## Vorteile Kollokation

- einfach

	Galerkin	Kollokation
Kopplung der Gleichungen	ja	nein
Anzahl det. Gleichungen	$P$	$Q$
Verwendung det. Löser	schwierig	ja

## Vorteile Galerkin

- unter Verwendung dünner Gitter ist  $P$  signifikant kleiner als  $Q$ , wenn man für beide Verfahren denselben Polynomraum verwendet (geringerer Aufwand)
- in der Theorie oft einfacher zu analysieren (Ausgangspunkt schwache Formulierung)

## Vorteile Kollokation

- einfach
- funktioniert für beliebige Gleichungen (solange die deterministischen Gleichungen effizient gelöst werden können)

- PDEs mit zufälligen Parametern
- Polynomial Chaos expansions
- Numerische Methoden für Uncertainty Quantification
  - Stochastische Galerkin-Verfahren
  - Stochastische Kollokationsverfahren
- Dünne Gitter
- **Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern**

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, \mathbf{y}) &= d(\mathbf{y}) i \partial_x^2 u(t, x, \mathbf{y}) - (1 + i \zeta(\mathbf{y})) u(t, x, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) \\ &\quad + i |u(t, x, \mathbf{y})|^2 u(t, x, \mathbf{y}), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, \mathbf{y}) &= u_0(x, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, \mathbf{y}) &= d(\mathbf{y}) i \partial_x^2 u(t, x, \mathbf{y}) - (1 + i \zeta(\mathbf{y})) u(t, x, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) \\ &\quad + i |u(t, x, \mathbf{y})|^2 u(t, x, \mathbf{y}), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, \mathbf{y}) &= u_0(x, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $\mathbf{y} \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

**1. Teilproblem**   2. Teilproblem   3. Teilproblem

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

1. Teilproblem    **2. Teilproblem**    3. Teilproblem

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

1. Teilproblem   2. Teilproblem   **3. Teilproblem**

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

- stationäre Gleichung: Forschungsgegenstand in SFB-Projekt B3

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$

Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

- stationäre Gleichung: Forschungsgegenstand in SFB-Projekt B3
- Beschreibung von Frequenzkämmen

# Lugiato-Lefever-Gleichung mit zufälligen Parametern

## Lugiato-Lefever-Gleichung (LLE)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y)\end{aligned}$$

periodische Randbedingungen  $\rightsquigarrow$  Fourier-Kollokation in  $x$   
Für festes  $y \in \Gamma$ : Numerische Lösung mit Splitting-Verfahren

- stationäre Gleichung: Forschungsgegenstand in SFB-Projekt B3
- Beschreibung von Frequenzkämmen
- (stabile) Konfigurationen stark abhängig von der Konstellation der Parameter  $d$ ,  $\zeta$  und  $f$

# Galerkin-collocation splitting (GCS) für die stochastische Lugiato-Lefever-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y).\end{aligned}$$

## Kombiniertes Verfahren zur Approximation der Lösung

# Galerkin-collocation splitting (GCS) für die stochastische Lugiato-Lefever-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y).\end{aligned}$$

## Kombiniertes Verfahren zur Approximation der Lösung

- 1. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren

# Galerkin-collocation splitting (GCS) für die stochastische Lugiato-Lefever-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y).\end{aligned}$$

## Kombiniertes Verfahren zur Approximation der Lösung

- 1. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren
- 2. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren

# Galerkin-collocation splitting (GCS) für die stochastische Lugiato-Lefever-Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y).\end{aligned}$$

## Kombiniertes Verfahren zur Approximation der Lösung

- 1. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren
- 2. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren
- 3. Teilproblem: stochastisches Kollokationsverfahren

# Galerkin-collocation splitting (GCS) für die stochastische Lugiato-Lefever-Gleichung

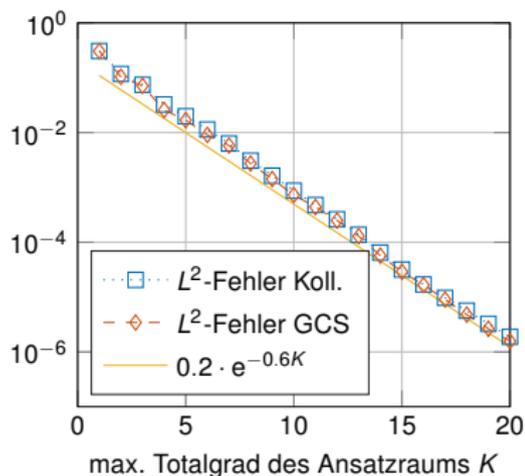
$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x, y) &= d(y) i \partial_x^2 u(t, x, y) - (1 + i \zeta(y)) u(t, x, y) + f(y) \\ &\quad + i |u(t, x, y)|^2 u(t, x, y), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y).\end{aligned}$$

## Kombiniertes Verfahren zur Approximation der Lösung

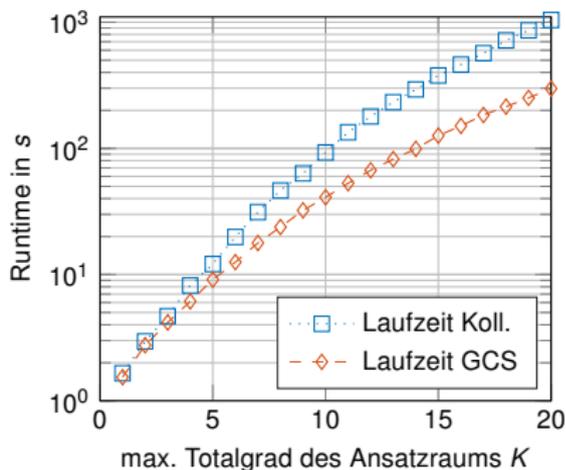
- 1. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren
- 2. Teilproblem: stochastisches Galerkin-Verfahren
- 3. Teilproblem: stochastisches Kollokationsverfahren

Die Galerkin-Matrizen sind nicht raumabhängig und können daher leicht diagonalisiert werden (einmalige Spektralzerlegung zu Beginn der Zeitintegration)  $\rightsquigarrow$  Folgerung: entkoppelte Galerkin-Systeme

## Monte Carlo-Referenzlösung



(a)  $L^2_\rho(\Gamma) \otimes L^2(\mathbb{T})$ -Fehler



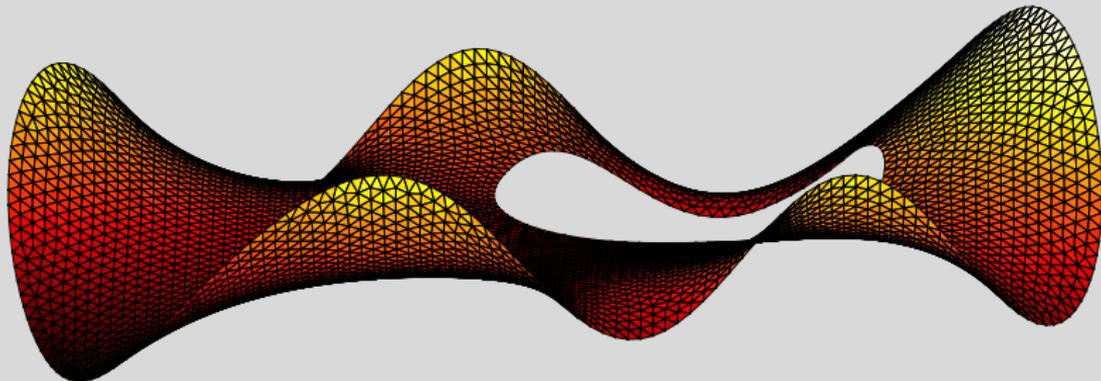
(b) Laufzeit

**Abbildung:** Vergleich von GCS- und Kollokationsverfahren bei selbem Ansatzraum  $\mathbb{P}_K$ ,  $d = 2$ ,  $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{U}(-1, 1)$  uiv, dünne Gauß-Legendre-Gitter

# Crashkurs Uncertainty Quantification (UQ)

Benny Stein, Tobias Jahnke

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)



## Problem

Fehleranalyse des deterministischen Splitting-Verfahrens (Jahnke, Mikl, Schnaubelt) nicht verwendbar

## Problem

- Nichtlinearität ist nicht komplex differenzierbar.  
Bekannte Resultate über analytische Abhängigkeit von  $y$  greifen nicht.
- Wohlgestelltheit:
  - Nichtlinearität bildet  $L^2_\rho(\Gamma)$  nicht nach sich selbst ab
  - unbeschränkter Operator

$$H^2(\mathbb{T}) \otimes H^s_\rho(\Gamma) \rightarrow L^2(\mathbb{T}) \otimes H^s_\rho(\Gamma), \quad u(x, y) \mapsto d(y) i \partial_x^2 u(x, y)$$

erzeugt für  $s > 0$  keine Halbgruppe mehr

Lösungsansatz: "Parametrische" Version der deterministischen Wohlgestelltheitsresultate

## Problem

Unangenehme Kopplung von  $x$  und  $y$  in Teilproblem 1:

$$u^+(t, x, y) = e^{td(y)i\partial_x^2} u^-(t, x, y)$$

$$\partial_y u^+(t, x, y) = t\partial_y d(y)i\partial_x^2 u^+ + e^{td(y)i\partial_x^2} \partial_y u^-(t, x, y)$$

$$\partial_x^2 u^+(t, x, y) = e^{td(y)i\partial_x^2} \partial_x^2 u^-(t, x, y)$$

↪ Lösung sollte doppelt so viele  $x$ -Ableitungen wie  $y$ -Ableitungen haben  
Stabilität?

	$K$	1	2	3	4	5	6	7	8
$d=2$	$P$	3	6	10	15	21	28	36	45
	$Q$	5	13	29	54	90	139	203	284
	$P/Q$	0.60	0.46	0.34	0.28	0.24	0.20	0.18	0.16
$d=5$	$P$	6	21	56	126	252	462	792	1287
	$Q$	11	61	241	785	2239	5761	13657	30267
	$P/Q$	0.55	0.34	0.23	0.16	0.11	0.083	0.061	0.045

**Tabelle:** Vergleich von  $P$  and  $Q$  für Gauss Quadratur,  $P = \dim(\mathbb{P}_K)$

## Berechnung der Skalarprodukte

- Entweder: Verwende direkt Quadraturformeln
- Oder:  $a(y) \approx \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{a}_j \phi_j(y)$  und  $f(x, y) \approx \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{f}_j(x) \phi_j(y)$

$$\rightsquigarrow \langle f(x, y), \phi_i(y) \rangle_\rho \approx \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{f}_j(x) \underbrace{\langle \phi_j(y), \phi_i(y) \rangle_\rho}_{\delta_{ji}} = \tilde{f}_i(x)$$

$$\rightsquigarrow \langle a(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho \approx \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{a}_j \underbrace{\langle \phi_j(y) \phi_k(y), \phi_i(y) \rangle_\rho}_{\text{tabelliert für übliche } (\phi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}}$$

## Quadratur auf Tensorgittern

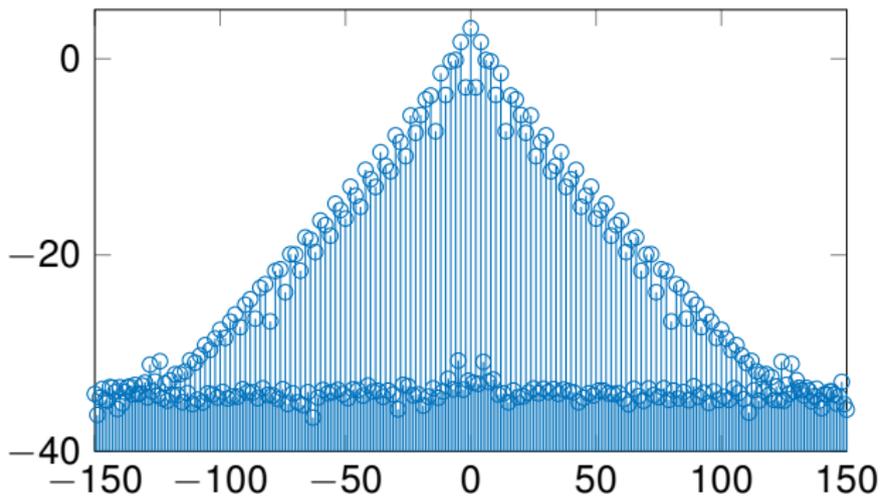
Für  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$  sei

$$\begin{aligned} (Q_{m_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes Q_{m_d}^{(d)})(f) &= \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_d=1}^{m_d} w_{j_1}^{(1)} \dots w_{j_d}^{(d)} f(y_{j_1}^{(1)}, \dots, y_{j_d}^{(d)}) \\ &\approx \int_{\Gamma} f(y) \rho(y) dy. \end{aligned}$$

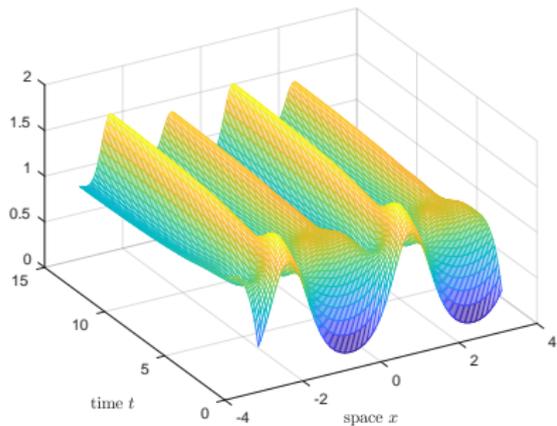
## Quadratur auf dünnen Gittern

$$Q_{\ell}(f) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{I}_{\ell}} (-1)^{\ell+d-|\mathbf{m}|} \binom{d-1}{\ell+d-|\mathbf{m}|} (Q_{m_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes Q_{m_d}^{(d)})(f)$$

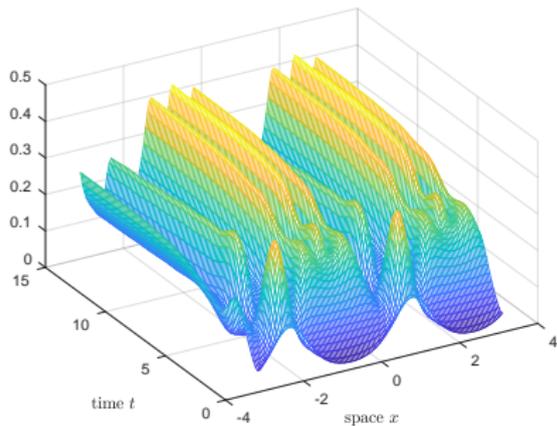
mit  $\mathcal{I}_{\ell} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d \mid \ell + 1 \leq |\mathbf{m}|_1 \leq \ell + d\}$ . Diese Quadraturformel ist exakt für alle Polynome, für die *irgendeine* der beteiligten Tensor-Quadraturformeln exakt ist.



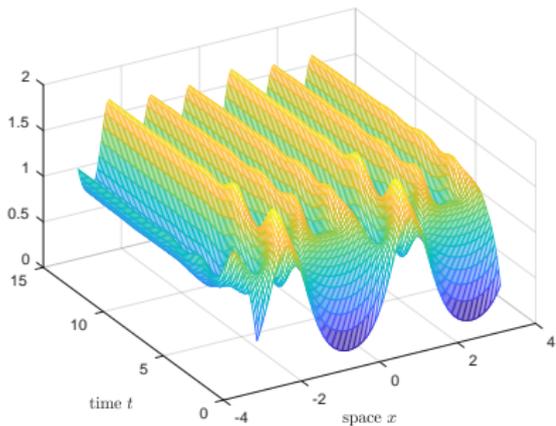
**Abbildung:** Logarithm of the Fourier modes of  $\mathbb{E}u_{GCS}(T)$



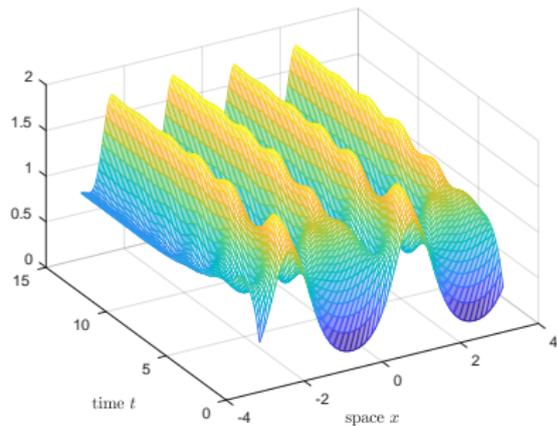
(a)  $|\mathbb{E}[u_{\text{GCS}}(t, x, Y)]|$



(b)  $\sigma[u_{\text{GCS}}(t, x, Y)]$



**(a)**  $|u_{\text{GCS}}(t, x, y^{(1)})|$ ,  $y^{(1)} = (0.6, -0.8)$



**(b)**  $|u_{\text{GCS}}(t, x, y^{(2)})|$ ,  $y^{(2)} = (0.45, 0.7)$