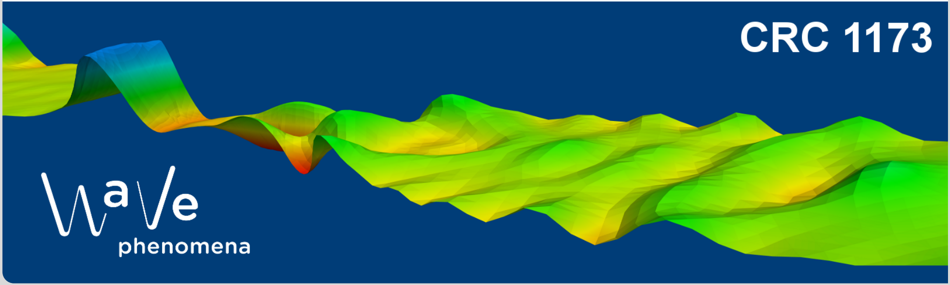
Karlsruhe Institute of Technology

Splitting Methods for Highly Oscillatory Differential Equations

Simone Buchholz, Benjamin Dörich, Marlis Hochbruck

CRC 1173 - Wave phenomena: analysis and numerics



Motivation

Lineare Wellengleichung

$$q'' = \Delta q + Gq \tag{WG}$$

mit (zunächst) linearem Operator G

System erster Ordnung

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix} u = Au + Bu, \quad u = \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}$$

im Hilbertraum $L^2 \times H^{-1}$

Unter Finite Energie Bedingung bisher (Simone)

- diskretisierte Version von (WG) und G unabhängig von h beschränkt

Outline

1. Einführung
2. Splitting Methoden und trigonometrische Integratoren
3. Erweiterungen
4. Ausblick

Hochoszillatorische Probleme

Klasse der bisher betrachteten Probleme

$$\begin{aligned} q'' &= -\Omega^2 q + Gq, \qquad t > 0 \\ q(0) &= q_0, \quad q'(0) = q_0' \end{aligned}$$

Annahmen

- $\|\Omega\|$ beliebig groß ($-\Omega^2$ Raumdiskretisierung von Δ)

Hochoszillatorische Probleme

Klasse der bisher betrachteten Probleme

$$q'' = -\Omega^2 q + Gq, \qquad t > 0$$
$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = q_0'$$

Annahmen

- $\|\Omega\|$ beliebig groß ($-\Omega^2$ Raumdiskretisierung von Δ)

nicht-steife Fehleranalyse braucht:

$$\|\Omega^k q\|, \|q^{(k)}\| \leq C, \quad \text{für ein } k \geq 1$$

Frage: Was bedeutet hier hochoszillatorisch?

What does highly oscillatory mean?

Eigenwertzerlegung von Ω

Eigenwerte $\omega_1 \leq \cdots \leq \omega_N$, Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_N$

Für $G = 0$: $q'' = -\Omega^2 q$

$$q(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t)\right) v_j$$

$$\|\Omega^k q(t)\|^2 \approx \sum_{j=1}^{N} \omega_j^{2k} \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)$$

$$\|q^{(k)}(t)\|^2 \approx \sum_{j=1}^{N} \omega_j^{2k} \left(\alpha_j^2 + \beta_j^2\right)$$

hochosz. $\hat{=}$ langsames Abklingen von $(\alpha_j)_j$ und $(\beta_j)_j$ $\rightarrow$ verwende nur $k = 1$

Hochoszillatorische Probleme

Karlsruhe Institute of Technology

Klasse der bisher betrachteten Probleme

$$q'' = -\Omega^2 q + Gq, \qquad t > 0$$
$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = q_0'$$

Annahmen

- $\|\Omega\|$ beliebig groß (Raumdiskretisierung von Δ)
- Finite Energie Bedingung :

$$\|\Omega q(t)\|^2 + \|q'(t)\|^2 \leq K^2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Splitting Methoden

System erster Ordnung

$$u' = Au + Bu$$

Strang Splitting

$$u_{n+1} = e^{\tau/2 B} e^{\tau A} e^{\tau/2 B} u_n$$

Localer Fehler

$$\|u_1 - u(t_1)\| = \mathcal{O}(\tau^3),$$

falls $[A, [A, B]]$ auf $D(A)$ beschränkt $\sim \begin{pmatrix} & 2G \\ (\Omega^2 G + G\Omega^2) & \end{pmatrix}$ beschränkt

---

Jahnke, Lubich, 2000

Kommutator $[F, G] = FG - GF$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$

Splitting Methoden

Unter Finite Energie Bedingung

- Lokaler Fehler zerfällt in Summe aus Termen von $\mathcal{O}(\tau^2)$ und $\mathcal{O}(\tau^3)$
- Klassisches Lady Windermere Argument funktioniert nicht
- Nutzen Auslöschungen im globalen Fehler aus

Idee

Gemittelte Gleichung

$$\widetilde{u}' = A\widetilde{u} + \widetilde{B}\widetilde{u}$$

mit geschickt gewähltem $\widetilde{B}$, um darauf Strang Splitting anzuwenden

---

Buchholz, Gauckler, Grimm, Hochbruck, Jahnke, 2017

Warum muss die Gleichung modifiziert werden?

System erster Ordnung

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix} u = Au + Bu, \quad u = \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}$$

mit Norm $\|u\|^2 := \|q\|^2 + \|\Omega^{-1} q'\|^2 \rightarrow A$ schiefsymmetrisch

Variation der Konstanten Formel

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau A} u(t_n) + \int_0^\tau e^{(\tau - s)A} B u(t_n + s)\, ds$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t\Omega) & \Omega^{-1} \sin(t\Omega) \\ -\Omega \sin(t\Omega) & \cos(t\Omega) \end{bmatrix}$$

Warum muss die Gleichung modifiziert werden?

Karlsruhe Institute of Technology

Variation der Konstanten Formel

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau A} u(t_n) + \int_0^\tau e^{(\tau - s)A} B u(t_n + s)\, ds$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t\Omega) & \Omega^{-1}\sin(t\Omega) \\ -\Omega\sin(t\Omega) & \cos(t\Omega) \end{bmatrix}$$

Expliziter trigonometrischer Integrator (Deuflhard, 1979)

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = e^{\tau A} \begin{bmatrix} q_n \\ v_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\tau \begin{bmatrix} \Omega^{-1}\sin(\tau\Omega)\, G q_n \\ \cos(\tau\Omega)\; G q_n + G q_{n+1} \end{bmatrix}$$

Problem:

Lokaler Fehler $\mathcal{O}(\tau^3) \to$ Schranken für $\frac{d^2}{ds^2}\, e^{(\tau - s)A} B u(t_n + s) \approx \Omega^2 q(t_n + s)$

Warum muss die Gleichung modifiziert werden?

Variation der Konstanten Formel

$$u(t_{n+1}) = e^{\tau A} u(t_n) + \int_0^\tau e^{(\tau - s)A} B u(t_n + s)\, ds$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t\Omega) & \Omega^{-1}\sin(t\Omega) \\ -\Omega\sin(t\Omega) & \cos(t\Omega) \end{bmatrix}$$

Gefilterter trigonometrischer Integrator (Hairer, Lubich, Wanner, GNI)

$$\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = e^{\tau A} \begin{bmatrix} q_n \\ v_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\tau \begin{bmatrix} \Omega^{-1}\sin(\tau\Omega)\, \widetilde{G} q_n \\ \cos(\tau\Omega)\widetilde{G} q_n + \widetilde{G} q_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{G} := \Psi G \Phi$$

$\Psi = \psi(\tau\Omega)$, $\Phi = \phi(\tau\Omega)$

Was tun Filter?

Globaler Fehler enthält Terme

$$Fehler = \sum_{k=0}^{N} e^{k\tau A}\, \delta_k \to \sum_{k=0}^{N} e^{ki\tau\omega} \delta_k, \quad \delta_k = \mathcal{O}(\tau^2)$$

$i\omega$ Eigenwert von A

Standard-Splitting
Ordnung Reduktion, falls $\tau\omega = 2\pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$

Was tun Filter?

Globaler Fehler enthält Terme

$$\mathit{Fehler} = \sum_{k=0}^{N} e^{k\tau A}\,\delta_k \to \sum_{k=0}^{N} e^{ki\tau\omega}\delta_k, \quad \delta_k = \mathcal{O}(\tau^2)$$

$i\omega$ Eigenwert von A

Standard-Splitting
Ordnung Reduktion, falls $\tau\omega = 2\pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$

Gefiltertes Splitting $\quad \delta_k = i\omega\psi(\tau\omega)\,\widetilde{\delta}_k$ mit $\widetilde{\delta}_k = \mathcal{O}(\tau^3)$

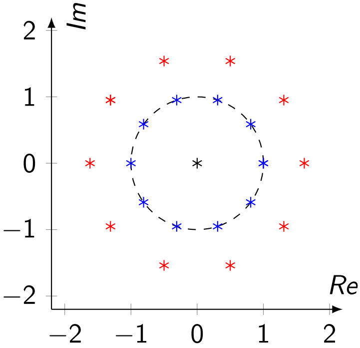
$$\mathit{Fehler} = \sum_{k=0}^{N} e^{ki\tau\omega}\,(i\omega\psi(\tau\omega))\,\widetilde{\delta}_k$$

$\to$ partielle Summation

Was tun Filter?

partielle Summation

$$\text{Fehler} \approx \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{k} e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega) \right) \right) \underbrace{\frac{1}{\tau} \left(\widetilde{\delta}_{k+1} - \widetilde{\delta}_k \right)}_{\mathcal{O}(\tau^3)}$$



$$e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega) \right)$$

$$\tau\omega = 0.6\pi$$

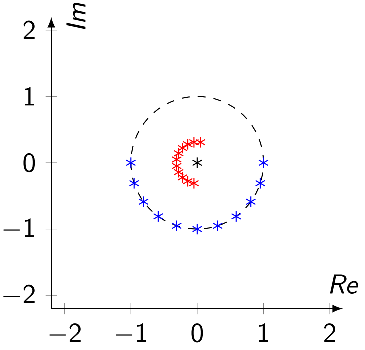
$\psi(x) = 1$ (kein Filter)

$\tau\omega\psi(\tau\omega) \sim e^{i\tau\omega} - 1$

Was tun Filter?

partielle Summation

$$\text{Fehler} \approx \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{k} e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega) \right) \right) \underbrace{\frac{1}{\tau} \left(\widetilde{\delta}_{k+1} - \widetilde{\delta}_k \right)}_{\mathcal{O}(\tau^3)}$$



$e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega) \right)$

$\tau\omega = 1.9\pi$

$\psi(x) = 1$ (kein Filter)

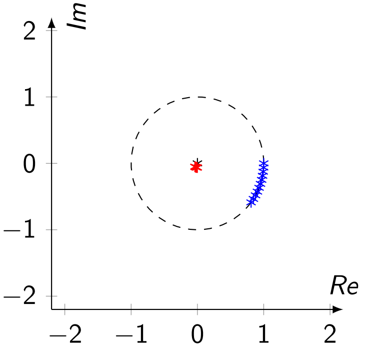
$\tau\omega\psi(\tau\omega) \sim e^{i\tau\omega} - 1$

Was tun Filter?

Karlsruhe Institute of Technology

partielle Summation

$$\mathit{Fehler} \approx \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{k} e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega)\right) \right)}_{\mathcal{O}(1)} \underbrace{\frac{1}{\tau} \left(\widetilde{\delta}_{k+1} - \widetilde{\delta}_k \right)}_{\mathcal{O}(\tau^3)} = \mathcal{O}(\tau^2)$$



$e^{ki\tau\omega} \left(i\tau\omega\psi(\tau\omega)\right)$

$\tau\omega = 1.98\pi$

$\psi(x) = 1$ (kein Filter)

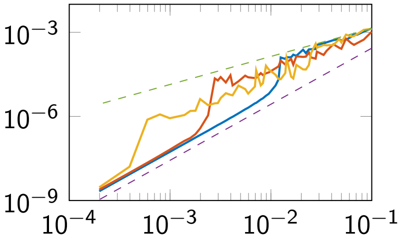
$\tau\omega\psi(\tau\omega) \sim e^{i\tau\omega} - 1$

Gefiltert vs ungefiltert

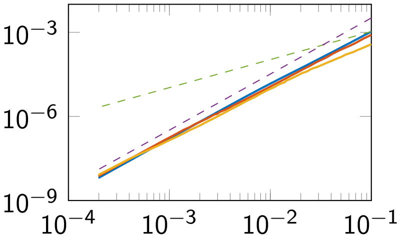
Fehler in q

$$g(q) = sinc(q)$$

ohne Filter



mit Filter



Referenzgerade τ, τ^2

$\|\Omega\| = 528$, $\quad \|\Omega\| = 2639$, $\quad \|\Omega\| = 13195$.

Simulationen von Simone Buchholz

Outline

Hochoszillatorische Probleme

Karlsruhe Institute of Technology

Klasse der bisher betrachteten Probleme

$$q'' = -\Omega^2 q + Gq, \qquad t > 0$$
$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = q_0'$$

Annahmen

- $\|\Omega\|$ beliebig groß (Raumdiskretisierung von Δ)
- Finite Energie Bedingung :

$$\|\Omega q(t)\|^2 + \|q'(t)\|^2 \leq K^2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Hochoszillatorische Probleme

Karlsruhe Institute of Technology

Klasse der jetzt betrachteten Probleme (in erster Ordnung)

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix} u = Au + Bu, \quad u = \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}$$

Wohlgestelltheit

- Standardfall: $X = H_0^1 \times L^2$ mit $D(A) = D(\Delta) \times H_0^1$
- Hier: $X_{-1} = L^2 \times H^{-1}$ $(\sim \|q\|^2 + \|\Omega^{-1} q'\|^2)$
  mit $D(A) = H_0^1 \times L^2$ $(\sim \|\Omega q\|^2 + \|q'\|^2)$, A schiefsymmetrisch

Annahmen Klassische Lösung und Finite Energie Bedingung

$$u(t) \in D(A) \;\; \& \;\; \|Au(t)\|_{X_{-1}}^2 = |q(t)|_{H^1}^2 + \|q'(t)\|_{L^2}^2 \leq K^2$$

Voraussetzungen an die Störung G

V1: G beschränkt von L^2 nach L^2

$$\Longrightarrow \|ABu\|_{X_{-1}} = \|Gq\|_{L^2} \leq \|G\|_{L^2 \leftarrow L^2} \|u\|_{X_{-1}}$$

$\rightarrow$ Regularität auf B in Analyse

$$\|u\|_{X_{-1}}^2 := \|q\|_{L^2}^2 + \|q'\|_{H^{-1}}^2, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$$

Voraussetzungen an die Störung G

V1: G beschränkt von L^2 nach L^2

$$\Longrightarrow \quad \|ABu\|_{X_{-1}} = \|Gq\|_{L^2} \leq \|G\|_{L^2 \leftarrow L^2} \|u\|_{X_{-1}}$$

$\rightarrow$ Regularität auf B in Analyse

V2: G beschränkt von L^2 nach H^{-1} ($G \sim \nabla(m \,\cdot)$, $m \in L^\infty$)

$$\Longrightarrow \quad \|Bu\|_{X_{-1}} = \|Gq\|_{H^{-1}} \leq \|G\|_{H^{-1} \leftarrow L^2} \|u\|_{X_{-1}}$$

$\rightarrow$ mehr Möglichkeiten für B

$\|u\|_{X_{-1}}^2 := \|q\|_{L^2}^2 + \|q'\|_{H^{-1}}^2, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$

Filter in abstrakten Hilberträumen

ODE Fall: $\widetilde{B} = \psi(\tau A) B \phi(\tau A)$

Eigenschaften eines Filters χ:

$$|\chi(z)| \leq C \tag{F1}$$

$$|z\chi(z)| \leq C \tag{F2}$$

$$\frac{|\chi(z) - 1|}{|z|^m} \leq C \quad \text{(Störung der 1)} \tag{F3}$$

$$|z\chi(z)| \sim e^z - 1 \tag{F4}$$

Wollen später schiefsymmetrischen Matrizen τA einsetzen $\to z \in i\mathbb{R}$

Wie übersetzt man diese Bedingungen für Operatoren und wie definiert man den Filter?

Definition der Filter

Idee: Definiere die Filter über die Halbgruppe und erfülle ($\tau = 1$)

$$\|\chi(A)\|_{X_{-1}\leftarrow X_{-1}} \leq C \tag{F1}$$

$$\chi(A) : X_{-1} \to D(A) \text{ stetig} \tag{F2}$$

$$\exists\ \theta_m(A) : X_{-1} \to D(A^m) \text{ stetig mit } A^m\theta_m(A) = \chi_m(A) - I \tag{F3}$$

$m = 1$: $\chi_1(z) = \varphi_1(z) = \int_0^1 e^{sz}\, ds$

$m = 2$: $\chi_2(z) = \frac{\sinh(z)}{z} = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(z) + \varphi_1(-z)\right)$

Tablet

Ein einfacheres Verfahren

System erster Ordnung $u' = Au + Bu$
Vorgeschlagene Methode Gemitteltes Lie-Trotter Splitting

$$u_{n+1} = \left(I + \tau\widetilde{B}\right) e^{\tau A} u_n$$

mit $\widetilde{B} := \varphi_1(\tau A)B$, $\quad \varphi_1(x) = \int_0^1 e^{sx}\, ds = \frac{e^x - 1}{x}$

Theorem

Sei $\|G\|_{H^{-1} \leftarrow L^2} \leq C_G$ und $\|u(t)\|_{X_{-1}}$, $\|Au(t)\|_{X_{-1}} \leq K$. Dann gilt

$$\|u_n - u(t_n)\|_{X_{-1}} \leq C\left(C_G, t_n, K\right) \tau.$$

In Literatur: Fehlerschranken mit höherer Regularität und andere G

Ein einfacheres Verfahren

Idee des Beweises

- Zeige $\|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{X_{-1}} \leq C\tau$ für die Lösungen u, $\widetilde{u}$ von

$$u' = Au + Bu \qquad \widetilde{u}' = A\widetilde{u} + \widetilde{B}\widetilde{u} \quad \rightarrow \quad (F3)$$

- Stelle den lokalen Fehler δ_n durch Kommutatoren von A und $\widetilde{B}$ dar

---

$C = C\left(K, T, \|G\|_{H^{-1} \leftarrow L^2}\right)$

Ein einfacheres Verfahren

Hilfsmittel Darstellung des lokalen Fehlers mit dem Hauptsatz

$$\delta_n = \left(I + \tau\widetilde{B}\right) e^{\tau A}\widetilde{u}(t_n) - \widetilde{u}(t_n + \tau)$$

Descombes, Thalhammer, 2012

Ein einfacheres Verfahren

Hilfsmittel Darstellung des lokalen Fehlers mit dem Hauptsatz

$$\delta_n = \left(I + \tau \widetilde{B}\right) e^{\tau A} \widetilde{u}(t_n) - \widetilde{u}(t_n + \tau)$$
$$= \int_0^\tau \frac{d}{d\xi} \left(\left(I + \xi \widetilde{B}\right) e^{\xi A} \widetilde{u}(t_n + \tau - \xi) \right) d\xi = \dots$$

Descombes, Thalhammer, 2012

Ein einfacheres Verfahren

Hilfsmittel Darstellung des lokalen Fehlers mit dem Hauptsatz

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= \left(I + \tau \widetilde{B}\right) e^{\tau A} \widetilde{u}(t_n) - \widetilde{u}(t_n + \tau) \\
&= \int_0^\tau \frac{d}{d\xi} \left(\left(I + \xi \widetilde{B}\right) e^{\xi A} \widetilde{u}(t_n + \tau - \xi) \right) d\xi = \dots \\
&= \int_0^\tau \int_0^\xi e^{(\xi - \sigma)A} A \widetilde{B} e^{(\xi + \tau - \sigma)A} \widetilde{u}(t_n) \, d\sigma \, d\xi + \mathcal{O}(\tau^2)
\end{aligned}
$$

Descombes, Thalhammer, 2012

Ein einfacheres Verfahren

Hilfsmittel Darstellung des lokalen Fehlers mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left(I + \tau \widetilde{B}\right) e^{\tau A} \widetilde{u}(t_n) - \widetilde{u}(t_n + \tau) \\
&= \int_0^\tau \frac{d}{d\xi} \left(\left(I + \xi \widetilde{B}\right) e^{\xi A} \widetilde{u}(t_n + \tau - \xi) \right) d\xi = \dots \\
&= \int_0^\tau \int_0^\xi e^{(\xi - \sigma)A} A \widetilde{B} e^{(\xi + \tau - \sigma)A} \widetilde{u}(t_n) \, d\sigma \, d\xi + \mathcal{O}(\tau^2) \\
&= A \varphi_1(\tau A) Z(\widetilde{u}(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^2),
\end{aligned}$$

mit $Z(\widetilde{u}(t_n))$ modifizierter lokaler Fehler von $\mathcal{O}(\tau^2)$

Descombes, Thalhammer, 2012

Ein einfacheres Verfahren

Karlsruhe Institute of Technology

Idee des Beweises

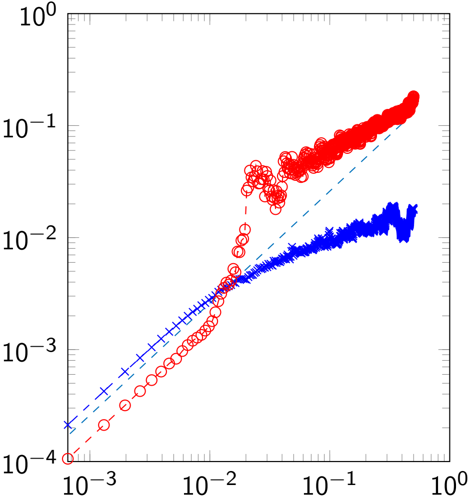
- Zeige $\|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{X_{-1}} \leq C\tau$ für die Lösungen u, $\widetilde{u}$ von

$$u' = Au + Bu \qquad \widetilde{u}' = A\widetilde{u} + \widetilde{B}\widetilde{u} \quad \rightarrow \quad (F3)$$

- Stelle den lokalen Fehler δ_n durch Kommutatoren von A und $\widetilde{B}$ dar
- Trenne Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\tau)$ und $\mathcal{O}(\tau^2)$
- Globaler Fehler:
  - Stabilität für $\mathcal{O}(\tau^2)$
  - partielle Summation für $\mathcal{O}(\tau)$

$C = C\left(K, T, \|G\|_{H^{-1} \leftarrow L^2}\right)$

Numerisches Beispiel: Wellengleichung



$$q'' = -\Omega^2 q + \Omega G_{rand} q$$

$\|A\| \approx 300$

Ordnung $\mathcal{O}(\tau)$

Lie-Trotter ohne Filter

Lie-Trotter mit Filter

Mehrfach-Splitting

Simone: Für $u' = Au + Bu$ liefert

$$u_{n+1} = e^{\tau/2A} e^{\tau \widetilde{B}} e^{\tau/2A} u_n \tag{S1}$$

Verfahren zweiter Ordnung unter Finite Energie Bedingung

Ähnlich: Für $u' = Au + B_1 u + B_2 u$ betrachte

$$u_{n+1} = e^{\tau/2A} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau \widetilde{B}_2} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau/2A} u_n \tag{S2}$$

$\widetilde{B} = \psi(\tau A) B \phi(\tau A)$, $\widetilde{B}_i = \psi(\tau A) B_i \phi(\tau A)$

Mehrfach-Splitting

Idee: Für $B = B_1 + B_2$ ist (S2) nur Störung von (S1)

$$u_{n+1} = e^{\tau/2A} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau \widetilde{B}_2} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau/2A} u_n \tag{S2}$$

Lokaler Fehler:

$$\begin{aligned}
\delta_n &= u(t_{n+1}) - e^{\tau/2A} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau \widetilde{B}_2} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau/2A} u(t_n) \\
&= u(t_{n+1}) - e^{\tau/2A} e^{\tau \widetilde{B}} e^{\tau/2A} u(t_n) \\
&\qquad + e^{\tau/2A} \left(e^{\tau \widetilde{B}} - e^{\tau/2\widetilde{B}_1} e^{\tau \widetilde{B}_2} e^{\tau/2\widetilde{B}_1} \right) e^{\tau/2A} u(t_n) \\
&= \delta_{n,Simone} + \delta_{n,B}, \qquad \delta_{n,B} = \mathcal{O}(\tau^3)
\end{aligned}$$

Für welche Gleichungen interessant?

$\widetilde{B} = \psi(\tau A) B \phi(\tau A)$, $\widetilde{B}_i = \psi(\tau A) B_i \phi(\tau A)$

Offen: Volldiskretisierung

Wähle Ansatzraum X_h mit Bestapproximation $\pi_h : X_{-1} \to X_h$ und setze

$$u_h^{n+1} = \left(I + \tau \widetilde{B}_h\right) e^{\tau A_h} u_h^n, \quad u_h^0 = \pi_h u(t_0)$$

Lokaler Fehler:

$$\begin{aligned}\delta_n &= \left(I + \tau \widetilde{B}_h\right) e^{\tau A_h} \pi_h u(t_n) - \pi_h u(t_{n+1}) \\ &= \int_0^\tau \frac{d}{d\xi} \left(\left(I + \xi \widetilde{B}_h\right) e^{\xi A_h} \pi_h u(t_n + \tau - \xi)\right) d\xi\end{aligned}$$

$\|u\|_{X_{-1}}^2 := \|q\|_{L^2}^2 + \|q'\|_{H^{-1}}^2, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$

Offen: Volldiskretisierung

Lokaler Fehler:

$$\delta_n = \int_0^\tau \xi e^{\xi A_h} A_h \widetilde{B}_h \pi_h u(t_n + \tau - \xi)\, d\xi$$

$$+ \int_0^\tau e^{\xi A_h} \left(\widetilde{B}_h \pi_h - \pi_h B\right) u(t_n + \tau - \xi)\, d\xi$$

$$+ \int_0^\tau e^{\xi A_h} \left(A_h \pi_h - \pi_h A\right) u(t_n + \tau - \xi)\, d\xi$$

$$+ \int_0^\tau \xi e^{\xi A_h} \widetilde{B}_h \pi_h (A + B)\, u(t_n + \tau - \xi)\, d\xi$$

$\|u\|_{X_{-1}}^2 := \|q\|_{L^2}^2 + \|q'\|_{H^{-1}}^2,$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$

Ausblick

Weitere Ideen:

- Lokal Lipschitz-stetige Funktionen von $L^2 \to H^{-1}$ anstatt ∇
- In erster Ordnung Formulierung auch Maxwell-Systeme denkbar
  $\to$ höhere Energie nötig
- Zeitabhängige rechte Seiten (Simone)
- Splitting mit höherer klassischer Ordnung
  $\to$ mind. 6 Flüsse nötig pro Zeitschritt