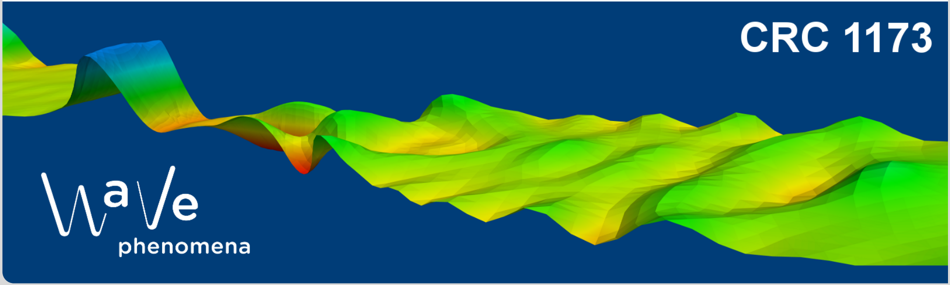
Lokale Zeitschrittverfahren mittels Gebietszerlegungen

Constantin Carle

Karlsruhe Institute of Technology



Construction and convergence analysis of conservative second order local time discretisation for wave equations

von

Juliette Chabassier und Sébastien Imperiale

Gliederung

Exkurs: Gebietszerlegung für die akustische Wellengleichung

Framework & Raumdiskretisierung

Zeitintegration

Leap-frog–Tschebyscheff–Verfahren

Einordnung

Gliederung

Exkurs: Gebietszerlegung für die akustische Wellengleichung

Framework & Raumdiskretisierung

Zeitintegration

Leap-frog–Tschebyscheff–Verfahren

Einordnung

Akustische Wellengleichung

Finde $u\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u - c^2 \Delta u &= g && \text{in } (0,T) \times \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad \partial_t u(0,\cdot) &= v_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

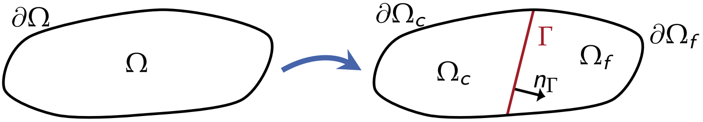
- Ω beschränktes, konvexes Gebiet
- Ausbreitungsgeschwindigkeit $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $c(x) \geq c_0 > 0$ für alle $x \in \Omega$
- $u_0, v_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g\colon (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$

Variationelle Formulierung: Finde $u\colon [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \partial_{tt} u \, v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega c^2 \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g \, v \, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

Gebietszerlegung I

Karlsruher Institut für Technologie



Finde $u_q \colon [0,T] \times \Omega_q \to \mathbb{R}$, $q \in \{c,f\}$, mit

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt} u_q - c^2|_q \Delta u_q &= g|_q && \text{in } (0,T) \times \Omega_q, \quad q \in \{c,f\} \\
u_q &= 0 && \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega_q,\ q \in \{c,f\} \\
u_c &= u_f && \text{auf } (0,T) \times \Gamma \\
c^2|_c \nabla u_c \cdot n_\Gamma &= c^2|_f \nabla u_f \cdot n_\Gamma && \text{auf } (0,T) \times \Gamma \\
u_q(0,\cdot) = u_0|_q, \quad \partial_t u_q(0,\cdot) &= v_0|_q && \text{in } \Omega_q, \quad q \in \{c,f\}
\end{aligned}
$$

Gebietszerlegung II

Karlsruher Institut für Technologie

$$\sum_{q\in\{c,f\}} \left(\int_{\Omega_q} \partial_{tt} u_q \, v_q \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_q} c^2|_q \nabla u_q \cdot \nabla v_q \,\mathrm{d}x \right)$$
$$- \int_\Gamma c^2|_c \nabla u_c \cdot n_\Gamma \, v_c \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Gamma c^2|_f \nabla u_f \cdot n_\Gamma \, v_f \,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \sum_{q\in\{c,f\}} \int_{\Omega_q} g|_q \, v_q \,\mathrm{d}x$$

Gebietszerlegung II

$$\sum_{q\in\{c,f\}} \left(\int_{\Omega_q} \partial_{tt} u_q \, v_q \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_q} c^2|_q \nabla u_q \cdot \nabla v_q \,\mathrm{d}x \right)$$

$$- \int_\Gamma \lambda \, v_c \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Gamma \lambda \, v_f \,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \sum_{q\in\{c,f\}} \int_{\Omega_q} g|_q \, v_q \,\mathrm{d}x$$

$$\int_\Gamma u_c \, \mu \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma u_f \, \mu \,\mathrm{d}\sigma$$

Gebietszerlegung II

Variationelle Formulierung:

Finde $(u_c, u_f, \lambda)\colon [0,T] \to \widetilde{H}_0^1(\Omega_c) \times \widetilde{H}_0^1(\Omega_f) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$\sum_{q\in\{c,f\}} \left(\int_{\Omega_q} \partial_{tt} u_q \, v_q \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_q} c^2|_q \nabla u_q \cdot \nabla v_q \, \mathrm{d}x \right)$$

$$- \int_\Gamma \lambda \, v_c \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Gamma \lambda \, v_f \, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \sum_{q\in\{c,f\}} \int_{\Omega_q} g|_q \, v_q \, \mathrm{d}x$$

$$\int_\Gamma u_c \, \mu \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma u_f \, \mu \, \mathrm{d}\sigma$$

für alle $(v_c, v_f, \mu) \in \widetilde{H}_0^1(\Omega_c) \times \widetilde{H}_0^1(\Omega_f) \times H^{-1/2}(\Gamma)$

Gliederung

Exkurs: Gebietszerlegung für die akustische Wellengleichung

Framework & Raumdiskretisierung

Zeitintegration

Leap-frog–Tschebyscheff–Verfahren

Einordnung

Framework

- Hilberträume $(V_q, \|\cdot\|_q)$, $(H_q, |\cdot|_q)$, $(L, \|\cdot\|_L)$, $V_q \overset{\text{dicht}}{\hookrightarrow} H_q$
- $a_q \colon V_q \times V_q \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch, stetig und koerziv
- $b_q \colon V_q \times L \to \mathbb{R}$ bilinear, stetig
- $g \in C^0(0, T; H_c)$

Finde $(u_c, u_f, \lambda) \colon [0, T] \to V_c \times V_f \times L$ mit

$$
\begin{aligned}
\partial_{tt}(u_c, v_c)_c + a_c(u_c, v_c) + b_c(v_c, \lambda) &= (g, v_c)_c && \text{für alle } v_c \in V_c \\
\partial_{tt}(u_f, v_f)_f + a_f(u_f, v_f) - b_f(v_f, \lambda) &= 0 && \text{für alle } v_f \in V_f \\
b_c(u_c, \mu) - b_f(u_f, \mu) &= 0 && \text{für alle } \mu \in L \\
u_q(0) &= 0 && \text{in } V_q \\
\partial_t u_q(0) &= 0 && \text{in } H_q
\end{aligned}
$$

- inf-sup-Bedingung $\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit

$q \in \{c, f\}$

Raumdiskretisierung

Finite-Elemente-Methode (konform)

- Hilberträume $V_{q,h} \subset V_q$, $L_h \subset L$
- Diskrete Operatoren:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_q : V_{q,h} \to V_{q,h}, && (\mathbf{A}_q \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_q)_q = a_q(\mathbf{u}_q, \mathbf{v}_q) && \text{für alle } \mathbf{v}_q \in V_{q,h} \\
&\mathbf{B}_q^\star : L_h \to V_{q,h}, && (\mathbf{B}_q^\star \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_q)_q = b_q(\mathbf{v}_q, \boldsymbol{\lambda}) && \text{für alle } \mathbf{v}_q \in V_{q,h} \\
&\mathbf{B}_q : V_{q,h} \to L_h, && (\mathbf{B}_q \mathbf{v}_q, \boldsymbol{\lambda})_L = b_q(\mathbf{v}_q, \boldsymbol{\lambda}) && \text{für alle } \boldsymbol{\lambda} \in L_h
\end{aligned}
$$

- Eigenschaften übertragen sich vom Kontinuierlichen

$q \in \{c, f\}$

Semidiskretes Problem

- $\mathbf{g} \in C^0(0,T;V_{c,h})$ (L^2-Projektion von g)

Finde $(\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_f, \boldsymbol{\lambda})\colon [0,T] \to V_{c,h} \times V_{f,h} \times L_h$ mit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}_{tt}\mathbf{u}_c + \mathbf{A}_c\mathbf{u}_c + \mathbf{B}_c^\star\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{g} \qquad && \text{in } V_{c,h} \\
\mathrm{d}_{tt}\mathbf{u}_f + \mathbf{A}_f\mathbf{u}_f - \mathbf{B}_f^\star\boldsymbol{\lambda} &= 0 \qquad && \text{in } V_{f,h} \\
\mathbf{B}_c\mathbf{u}_c - \mathbf{B}_f\mathbf{u}_f &= 0 \qquad && \text{in } L_h \\
\mathbf{u}_q(0) = 0, \quad \mathrm{d}_t\mathbf{u}_q(0) &= 0 \qquad && \text{in } V_{q,h}, \quad q \in \{c, f\}
\end{aligned}
$$

- diskrete inf-sup-Bedingung $\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit

Gliederung

Exkurs: Gebietszerlegung für die akustische Wellengleichung

Framework & Raumdiskretisierung

Zeitintegration

Leap-frog–Tschebyscheff–Verfahren

Einordnung

Zeitintegration

- $\mathbf{u}_q^n \approx \mathbf{u}_q(t_n)$, $\boldsymbol{\lambda}^n \approx \boldsymbol{\lambda}(t_n)$, $\;t_n = n\tau$, $\tau > 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_c^{n+1} - 2\mathbf{u}_c^n + \mathbf{u}_c^{n-1} &= -\tau^2\big(\mathbf{A}_c\mathbf{u}_c^n + \mathbf{B}_c^\star\boldsymbol{\lambda}^n\big) + \tau^2\mathbf{g}(t_n) && \text{in } V_{c,h} \\
\mathbf{u}_f^{n+1} - 2\mathbf{u}_f^n + \mathbf{u}_f^{n-1} &= -\tau^2\widetilde{P}(\tau^2\mathbf{A}_f)\big(\mathbf{A}_f\mathbf{u}_f^n - \mathbf{B}_f^\star\boldsymbol{\lambda}^n\big) && \text{in } V_{f,h} \\
0 &= \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c^n - \mathbf{B}_f\mathbf{u}_f^n && \text{in } L_h
\end{aligned}
$$

Anfangswerte:

$$
\mathbf{u}_q^0 = 0, \quad \mathbf{u}_q^1 = 0 \quad \text{in } V_{q,h}, \quad q \in \{c, f\}
$$

- $\widetilde{P}$ definiert durch $\widetilde{P}(z) = P(z)/z$
- P Polynom mit

$$
P(0) = 0, \quad P'(0) = 1
$$

CFL-Bedingung

- $\rho_{q,h}$ maximaler Eigenwert von $\mathbf{A}_q$, $q \in \{c, f\}$

(c)
$$\tau \leq \frac{2}{\sqrt{\rho_{c,h}}}$$

(f) Sei $m_2, \beta > 0$. Falls

$$0 \leq 1 - \frac{1}{4} P(z) \leq 1, \qquad m_2 z \leq P(z) \qquad \text{für } z \in [0, \beta^2],$$

dann

$$\tau \leq \frac{\beta}{\sqrt{\rho_{f,h}}}$$

- Falls $\dfrac{\beta^2}{\rho_{f,h}} \geq \dfrac{4}{\rho_{c,h}}$, τ von (c) abhängig

Fehlerrekursion

- $\mathbf{e}_q^n = \mathbf{u}_q(t_n) - \mathbf{u}_q^n$, $\boldsymbol{\ell}^n = \boldsymbol{\lambda}(t_n) - \boldsymbol{\lambda}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_c^{n+1} - 2\mathbf{e}_c^n + \mathbf{e}_c^{n-1} &= -\tau^2\big(\mathbf{A}_c\mathbf{e}_c^n + \mathbf{B}_c^\star\boldsymbol{\ell}^n\big) + \tau^2 r_{c,h}^n && \text{in } V_{c,h} \\ \mathbf{e}_f^{n+1} - 2\mathbf{e}_f^n + \mathbf{e}_f^{n-1} &= -\tau^2\widetilde{\mathbf{P}}\big(\mathbf{A}_f\mathbf{e}_f^n - \mathbf{B}_f^\star\boldsymbol{\ell}^n\big) + \tau^2 r_{f,h}^n && \text{in } V_{f,h} \\ 0 &= \mathbf{B}_c\mathbf{e}_c^n - \mathbf{B}_f\mathbf{e}_f^n && \text{in } L_h \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_q^0 = 0, \quad \mathbf{e}_q^1 = 0 \quad \text{in } V_{q,h}, \quad q \in \{c, f\}$$

Defekte:

$$r_{c,h}^n = \mathcal{O}(\tau^2), \qquad r_{f,h}^n = \mathcal{O}(\tau^2)$$

$\widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{P}(\tau^2\mathbf{A}_f)$

Energie(n)

$$\mathcal{E}_{c,h}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{I}_c - \tfrac{\tau^2}{4}\mathbf{A}_c\right)\frac{\mathbf{e}_c^{n+1} - \mathbf{e}_c^n}{\tau}, \frac{\mathbf{e}_c^{n+1} - \mathbf{e}_c^n}{\tau}\right)_c + \frac{1}{2}\left\| \frac{\mathbf{e}_c^{n+1} + \mathbf{e}_c^n}{2} \right\|_{\mathbf{A}_c}^2$$

$$\mathcal{E}_{f,h}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{R}}\frac{\mathbf{e}_f^{n+1} - \mathbf{e}_f^n}{\tau}, \frac{\mathbf{e}_f^{n+1} - \mathbf{e}_f^n}{\tau}\right)_f + \frac{1}{2}\left\| \frac{\mathbf{e}_f^{n+1} + \mathbf{e}_f^n}{2} \right\|_{\mathbf{A}_f}^2$$

- $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \mathcal{R}(\tau^2 \mathbf{A}_f)$, $\mathcal{R}(z) = \widetilde{P}(z)^{-1}\big(1 - \frac{1}{4}P(z)\big)$
- Aus CFL-Bedingung:

$$\mathcal{E}_{c,h}^{n+1/2} \geq 0, \qquad \mathcal{E}_{f,h}^{n+1/2} \geq 0 \qquad \text{für alle } n \geq 0$$

Konvergenzresultat I

Theorem (Konvergenz für diskrete Energie)

Falls CFL-Bedingungen erfüllt und Lösungen hinreichend glatt, gilt

$$\left(\mathcal{E}_{c,h}^{n-1/2}\right)^{1/2} + \left(\mathcal{E}_{f,h}^{n-1/2}\right)^{1/2} \leq C(1+T)\tau^2,$$

mit C unabhängig von τ, h und T

Beweis: Energietechnik

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{c,h}^{n+1/2} + \mathcal{E}_{f,h}^{n+1/2} = {} & \mathcal{E}_{c,h}^{n-1/2} + \mathcal{E}_{f,h}^{n-1/2} \\ & + \frac{1}{2}\left(r_{c,h}^{n}, \mathbf{e}_c^{n+1} - \mathbf{e}_c^{n-1}\right)_c \\ & + \frac{1}{2}\left(r_{f,h}^{n}, \widetilde{\mathbf{P}}^{-1}(\mathbf{e}_f^{n+1} - \mathbf{e}_f^{n-1})\right)_f\end{aligned}$$

Konvergenzresultat II

Theorem (Konvergenz in $V_{c,h}$, $V_{f,h}$)

Falls CFL-Bedingungen erfüllt und Lösungen hinreichend glatt, gilt

$$\|\mathbf{e}_c^n\|_c + \|\mathbf{e}_f^n\|_f \le \widehat{C}(1+T)\,T\,\tau^2$$

mit $\widehat{C}$ unabhängig von τ, h und T

Beweisidee:

$$\mathbf{v}_q(t) = \frac{\mathbf{u}_q(t) - \mathbf{u}_q(t-\tau)}{\tau}, \qquad \mathbf{v}_q^n = \frac{\mathbf{u}_q^n - \mathbf{u}_q^{n-1}}{\tau}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t-\tau)}{\tau}, \qquad \boldsymbol{\mu}^n = \frac{\boldsymbol{\lambda}^n - \boldsymbol{\lambda}^{n-1}}{\tau}$$

Gliederung

Leap-frog–Tschebyscheff–Verfahren

Ziel

Konstruiere Polynome P so, dass

- $P(0) = 0$ und $P'(0) = 1$
- CFL-Bedingung für (f)

$$0 \leq 1 - \frac{1}{4}P(z) \leq 1, \qquad m_2\, z \leq P(z) \qquad \text{für } z \in [0, \beta^2]$$

für β größtmöglich gilt

Tschebyscheff-Polynome

Idee: Verschobene und gestreckte Tschebyscheff-Polynome T_p

$$P(z) = P_{\mathrm{LFC}}(z) = 2 - 2\,T_p\left(1 - \frac{z}{2p^2}\right), \qquad p \in \mathbb{N}$$

- $P_{\mathrm{LFC}}(0) = 0,\ P'_{\mathrm{LFC}}(0) = 1$
- $\beta^2_{\mathrm{LFC}} = 4p^2$
- $0 \leq P_{\mathrm{LFC}}(z) \leq 4$

Tschebyscheff-Polynome

Karlsruher Institut für Technologie

Idee: Verschobene und gestreckte Tschebyscheff-Polynome T_p

$$P(z) = P_{\mathrm{LFC}}(z) = 2 - 2T_p\left(1 - \frac{z}{2p^2}\right), \qquad p \in \mathbb{N}$$

- $P_{\mathrm{LFC}}(0) = 0,\ P'_{\mathrm{LFC}}(0) = 1$
- $\beta^2_{\mathrm{LFC}} = 4p^2$
- $0 \leq P_{\mathrm{LFC}}(z) \leq 4$

Problem:

$$P_{\mathrm{LFC}}(z) \in \{0, 4\} \quad \text{für } z = 2p^2\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, p$$

➡ Weitere Transformationen

Transformierte Chebyshev-Polynome

$$P_p(z) = c\,P_{\mathrm{LFC}}(az+b) + d, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Wähle: Für $\varepsilon > 0$

$$c = 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \qquad d = \varepsilon$$

- $P_p(0) = 0$ ➡ $P_{\mathrm{LFC}}(b) = -\frac{d}{c}$
- $P_p'(0) = 1$ ➡ $a = (c\,P_{\mathrm{LFC}}'(b))^{-1}$

Eigenschaften:

- Für $z \in [0, \beta_p^2]$

$$0 \leq 1 - \frac{1}{4}P_p(z) \leq 1, \qquad \varepsilon z \leq P_p(z)$$

- $\beta_p^2 = \frac{4p^2-b}{a} \lesssim \beta_{\mathrm{LFC}}^2$

Gliederung

Einordnung

Chabassier, Imperiale:

- Konvergenz in Zeit für
  - diskrete Energie
  - „H^1“-Norm
- Erweiterung auf Fehleranalyse in Ort und Zeit für konforme FEM möglich
- Anfangswerte, Inhomogenität nur in Ω_c
- Keine Stabilität und Konvergenz in Zeit für Energienorm
- Lösen von implizites LGS für $\boldsymbol{\lambda}^n$ in jedem Zeitschritt

Carle, Hochbruck, Sturm:

- Beliebige Anfangswerte und Inhomogenität
- Voll explizites Zeitintegrationsverfahren
- Stabilität und Konvergenz in Ort und Zeit für Energienorm

Literatur - Gebietszerlegungsverfahren

Alain Bamberger, Roland Glowinski, and Quang Huy Tran.
A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change.
SIAM J. Numer. Anal., 34(2):603–639, 1997.

Tarek P. A. Mathew.
Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations, volume 61 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*.
Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Alfio Quarteroni and Alberto Valli.
Domain decomposition methods for partial differential equations.
Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.
Oxford Science Publications.