

Dynamische Niedrigrang-Approximationen für Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Marlis Hochbruck, Markus Neher und Stefan Schrammer

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

Geg.: Matrix-Dgl

$$(A) \quad A'(t) = F(A(t)), \quad A(t_0) = A_0$$

mit räumlich begrenzter Lösung für alle $t \in [t_0, T]$.

Für jedes $t \in [t_0, T]$ sind nur wenige a_{ij} ungleich Null.

Idee: Approximiere A_0 durch Matrix Y_0 mit niederem Rang und löse anstelle von (A)

$$(Y) \quad Y'(t) = G(Y(t)), \quad Y(t_0) = Y_0,$$

sodass $A(t) \approx Y(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$ gilt.

- Dynamische Niedrigrang-Approximation: **DLR**
- Koch und Lubich, DLR, SIMAX, 2007.
- Kühl, DLR zur Lösung von Wellengleichungen, DA, Uni Düss., 2007.
- Lubich und Oseledets, A projector-splitting integrator for DLR, BIT, 2013.
- Rieger, Splitting-Verfahren für DLR, Diplomarbeit, KIT, 2014.

- Gegeben: $A'(t) = F(A(t))$, $A(t_0) = A_0$, $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Rang- r -Approximation
$$Y(t) = U(t)S(t)V^T(t), \quad Y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad U \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times r}$$
mit $U^T U = V^T V = I_r$, $Y(t_0) = Y_0 = A_0 = U_0 S_0 V_0^T$, $r \ll m, n$
- ODE-System zur Bestimmung von U , S , V
- Problem: S schlecht konditioniert oder singularär bei Überapproximation

DLR-Splitting nach Lubich und Oseledets

■ Im Folgenden sei $\tau = t_1 - t_0$, $\Delta A = A_1 - A_0 = A(t_1) - A(t_0)$.

■ Minimierungsbedingung $\|Y'(t) - A'(t)\|_F \stackrel{!}{=} \min$

■ $Y = USV^T$,

$$Y' = P(Y)A' = A'VV^T - UU^T A'VV^T - UU^T A'.$$

■ Lie-Trotter-Splitting:

(i) Löse $Y'_I = A'V_I V_I^T$, $Y_I(t_0) = Y_0$,

(ii) Löse $Y'_{II} = -U_{II}U_{II}^T A'V_{II}V_{II}^T$ $Y_{II}(t_0) = Y_I(t_1)$,

(iii) Löse $Y'_{III} = U_{III}U_{III}^T A'$, $Y_{III}(t_0) = Y_{II}(t_1)$.

Diese AWPe sind exakt lösbar!

Lie-Trotter-Splitting für $A(t)$

Geg.: $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Rang- r -Approx $A(t_0) \approx Y_0 = U_0 S_0 V_0^T$.

Gesucht: Rang- r -Approximation $Y_1 \approx A(t_1)$.

Integrator 1. Ordnung, exakt für bekanntes $A(t)$:

$$K_I := U_0 S_0 + (A_1 - A_0) V_0$$

Reduzierte QR-Zerlegung : $U_1 S_I = K_I, \quad S_I \in \mathbb{R}^{r \times r}$

$$S_{II} := S_I - U_1^T (A_1 - A_0) V_0$$

$$K_{III} := V_0 S_{II}^T + (A_1 - A_0)^T U_1$$

Reduzierte QR-Zerlegung : $V_1 S_1^T = K_{III}, \quad S_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$

Approximation : $Y_1 := U_1 S_1 V_1^T$

Übertragung auf Matrix-DGI $A'' = F(A)$

Ansatz 1: Behandlung als System 1. Ordnung

- Gegeben: $A'' = F(A)$.
- Idee: Wende Integrator auf

$$\left. \begin{array}{l} A' = B \\ B' = F(A) \end{array} \right\} \iff C' = G(C)$$

an.

- Beobachtung (Rieger): Langzeitintegration bricht früher ab.

Vermutung: Änderung des numerischen Rangs durch Differenziation:

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & f(t) + \varepsilon_1(t) \\ g(t) & g(t) + \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow A'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) & f'(t) + \varepsilon_1'(t) \\ g'(t) & g'(t) + \varepsilon_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Ansatz 2: Rang- r -Bestapproximation von A''

- Gegeben: $A'' = F(A)$.
- Idee: Suche $Y''(t)$ in Tangentialraum mit $\|Y''(t) - A''(t)\|_F \stackrel{!}{=} \min$.
 $\Rightarrow Y = USV^T$, $Y'' = P(Y)A'' = A''VV^T - UU^T A''VV^T - UU^T A''$.
- Lie-Trotter-Splitting („Lie-Trotter vor Störmer-Verlet“):
 - Löse $Y_I'' = A''V_I V_I^T$, $Y_I(t_0) = Y_0$, $Y_I'(t_0) = Y_0'$,
 - Löse $Y_{II}'' = -U_{II}U_{II}^T A''V_{II}V_{II}^T$, $Y_{II}(t_0) = Y_I(t_1)$, $Y_{II}'(t_0) = Y_I'(t_1)$,
 - Löse $Y_{III}'' = U_{III}U_{III}^T A''$, $Y_{III}(t_0) = Y_{II}(t_1)$, $Y_{III}'(t_0) = Y_{II}'(t_1)$.

Ansatz 3: Störmer-Verlet vor Lie-Trotter

- Gegeben: $A'' = F(A)$.
- Idee: Verwende zwei Rang- r -Approximationen

$$A \approx Y = USV^T, \quad A' \approx Z = TRW^T,$$

und löse $Y'' = F(Y)$ mit Störmer-Verlet:

$$Z' = F(Y) \text{ in } [t_0, t_0 + \frac{h}{2}] \text{ mit expl. Euler,}$$

for $k = 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{cases} Y' = Z \text{ in } [t_{k-1}, t_k] \text{ mit MP-Verfahren,} \\ Z' = F(Y) \text{ in } [t_{k-\frac{1}{2}}, t_{k+\frac{1}{2}}] \text{ mit MP-Verfahren,} \end{cases}$$

$$Y' = Z \text{ in } [t_{n-\frac{1}{2}}, t_n] \text{ mit impl. Euler.}$$

Ansatz 3: Störmer-Verlet vor Lie-Trotter

- Gegeben: $A'' = F(A)$.
- Idee: Verwende zwei Rang- r -Approximationen

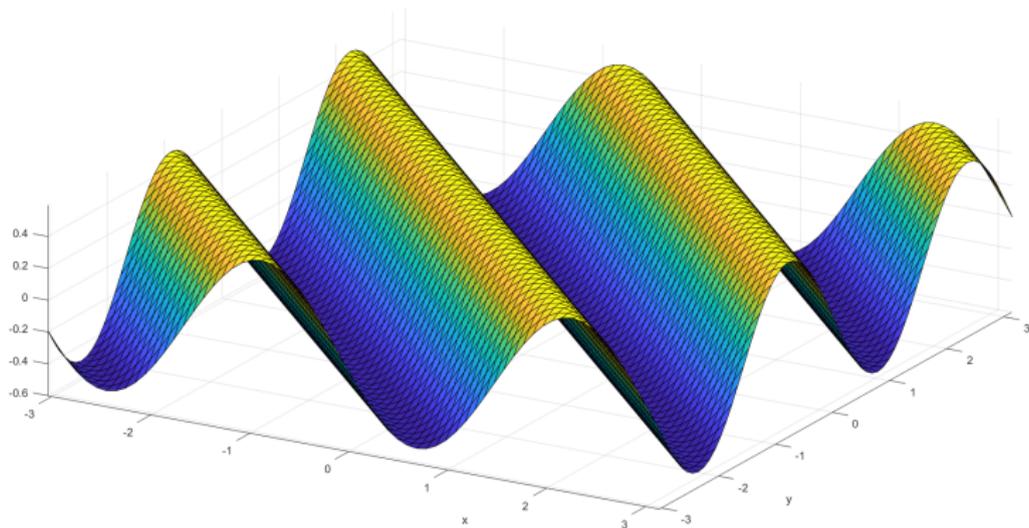
$$A \approx Y = USV^T, \quad A' \approx Z = TRW^T,$$

und löse $Y'' = F(Y)$ mit Störmer-Verlet.

- Jedes AWP $Z' = F(Y)$, $Y' = Z$ lösbar mit Lie-Trotter-Splitting.
- Gute Langzeitintegration in (wenigen) numerischen Beispielen.

Numerische Beispiele

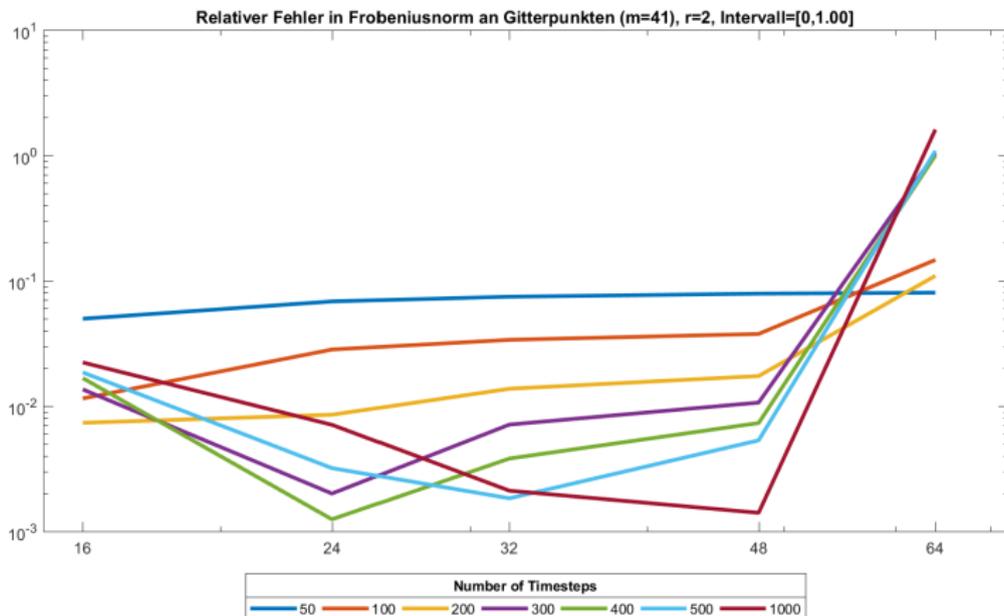
- $m=4a$: LT-Splitting für DGL erster Ordnung/transformierte DGL zweiter Ordnung
- $m=4b$: Symmetrisches LT-Splitting für DGL erster Ordnung/transformierte DGL zweiter Ordnung
- $m=4c$: wie $m=4a$, aber mit Integrator zweiter Ordnung
- $m=6$: Störmer-Verlet vor LT-Splitting
- $m=7$: LT-Splitting vor Störmer-Verlet
- $f=4$: stationäre 2D-Welle entlang erste Winkelhalbierende
- $f=7$: ebene Welle, Ausbreitungsrichtung erste Winkelhalbierende



2D-Welle

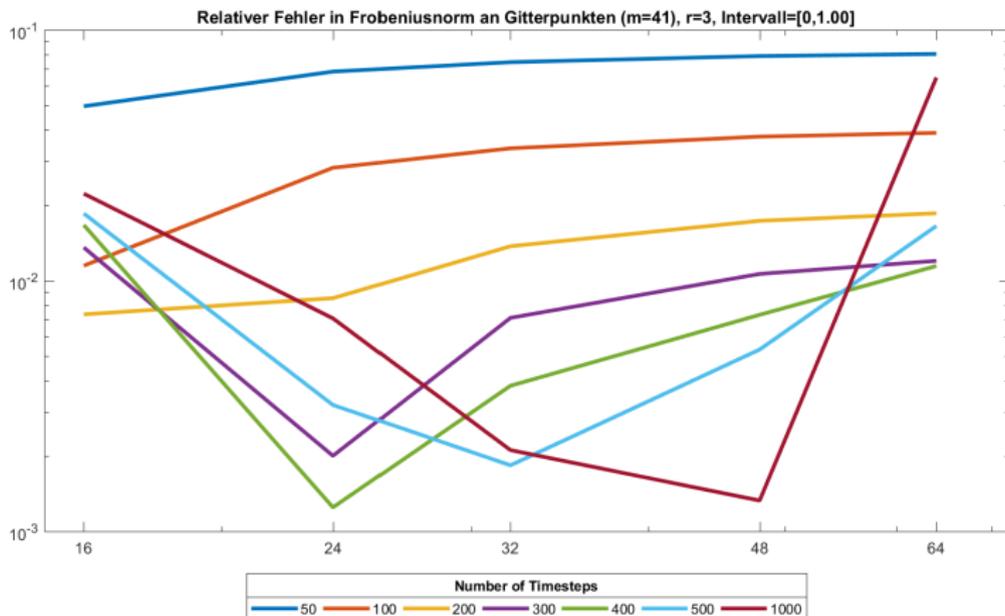
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=4a$, $r = 2$



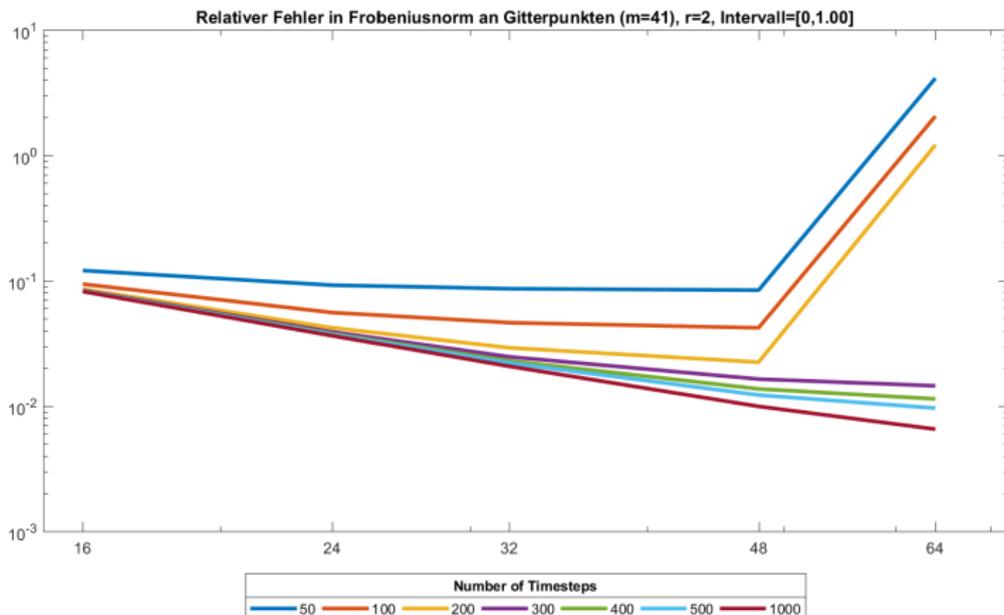
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=4a$, $r = 3$



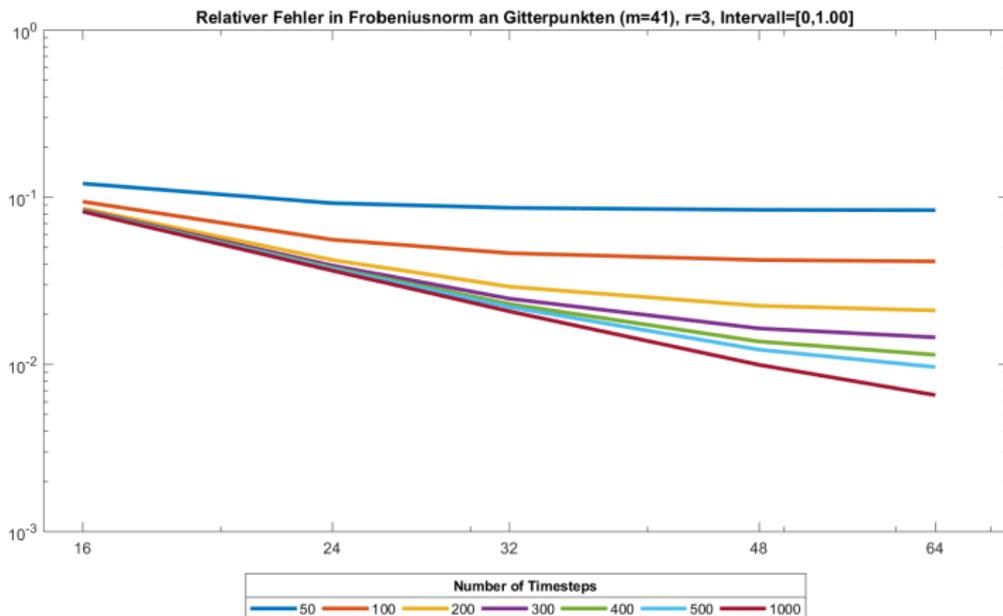
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=4a$, $r = 2$



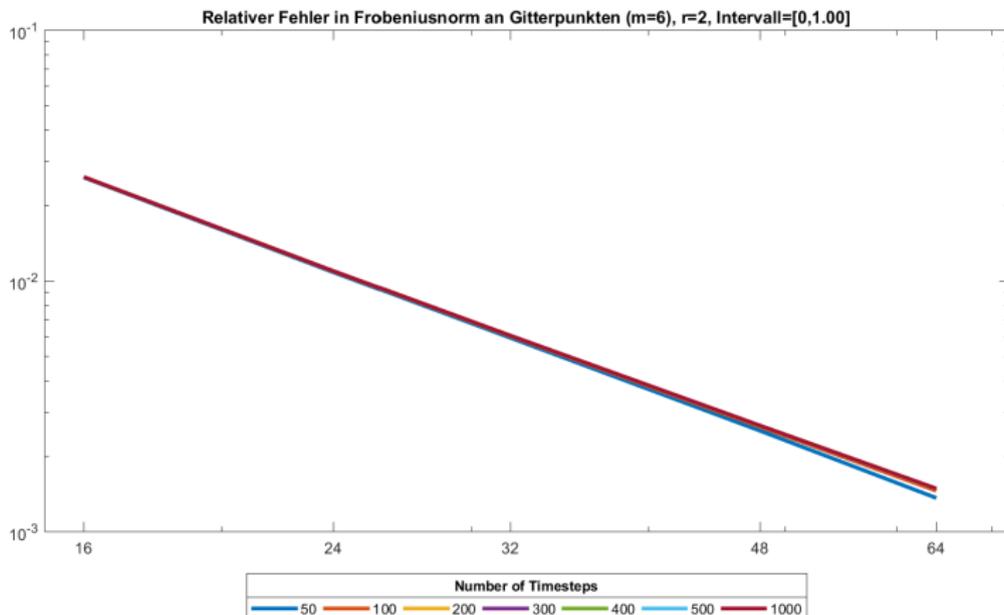
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=4a$, $r = 3$



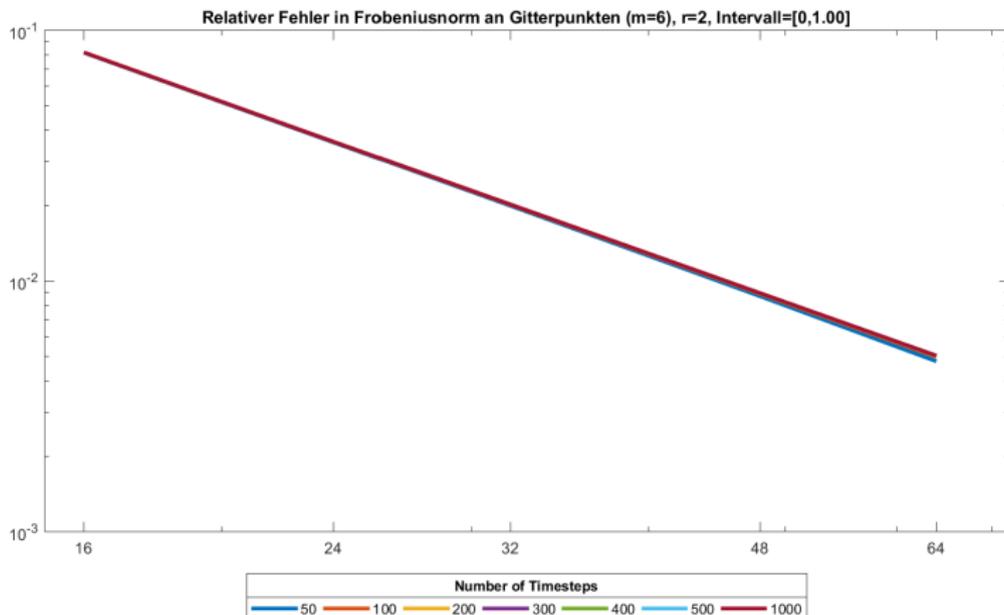
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=6$, $r = 2$



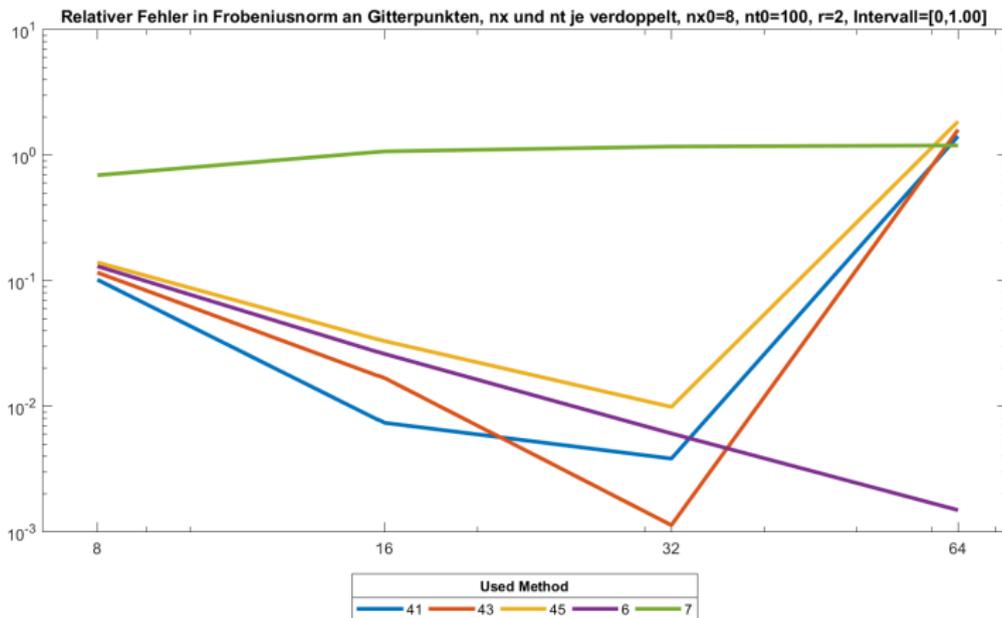
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$, Methode $m=6$, $r = 2$



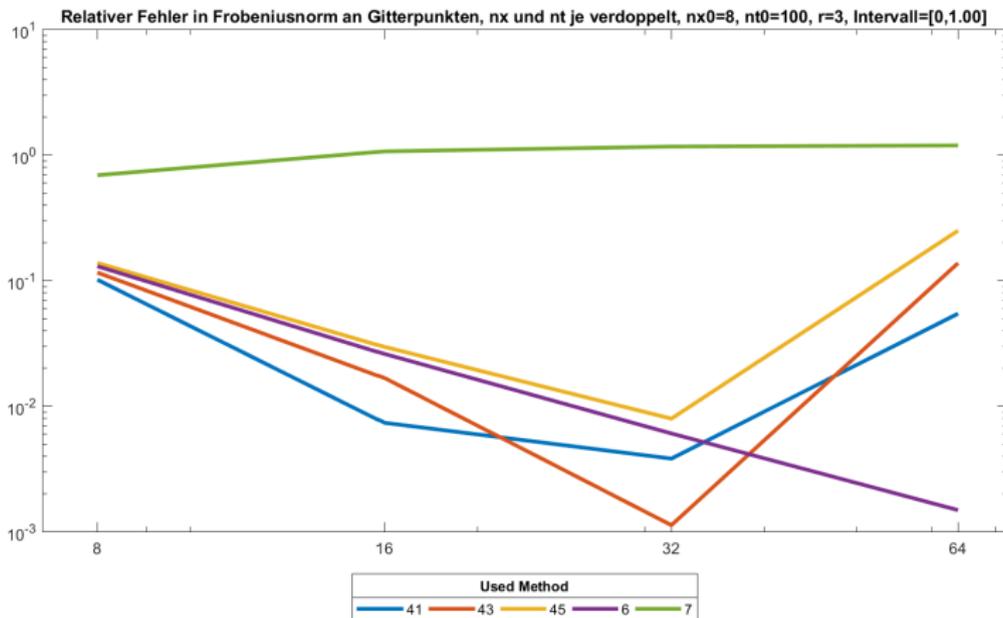
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$, $\frac{n_x}{n_t} = \text{const.}$, $r = 2$



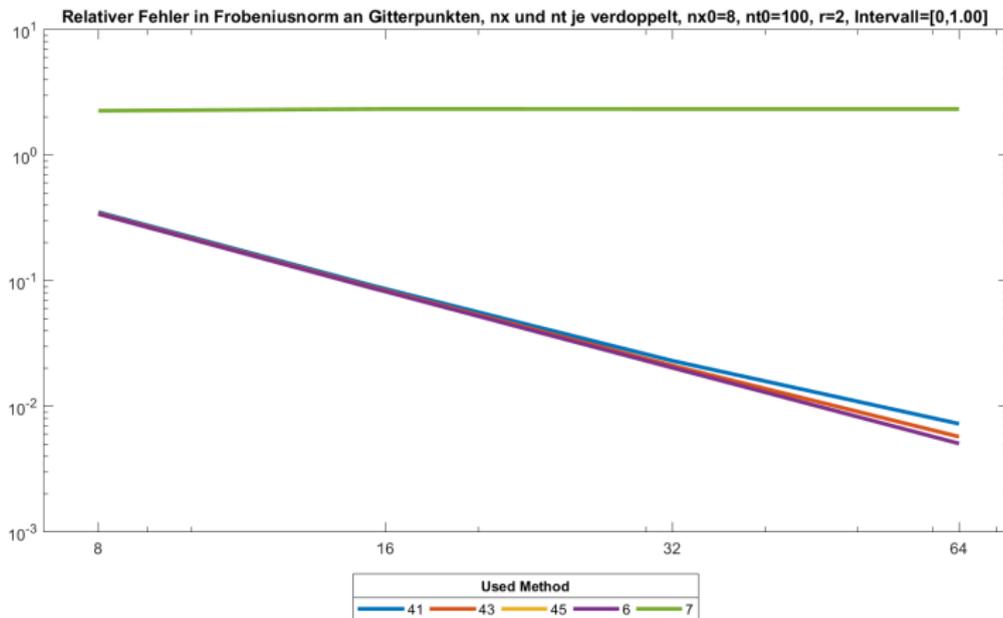
Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$, $\frac{n_x}{n_t} = \text{const.}$, $r = 3$

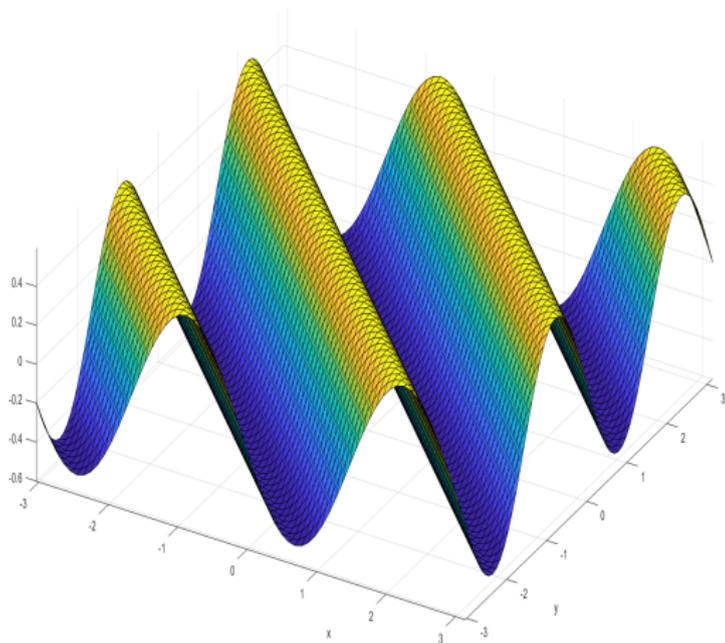


Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

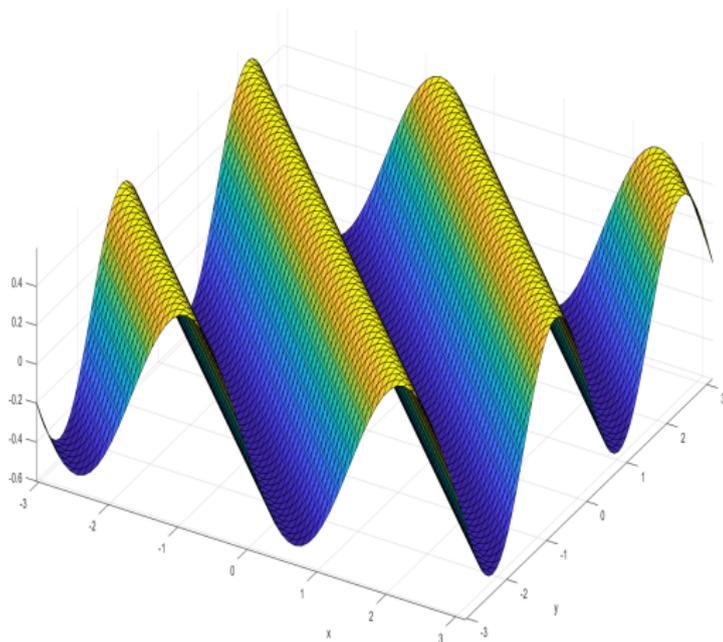
Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$, $\frac{n_x}{n_t} = \text{const.}$, $r = 2$



Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

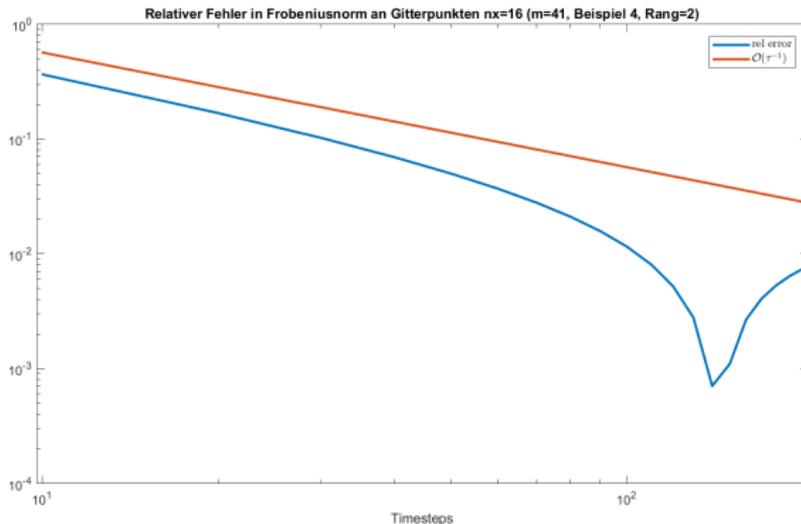


Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$



Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

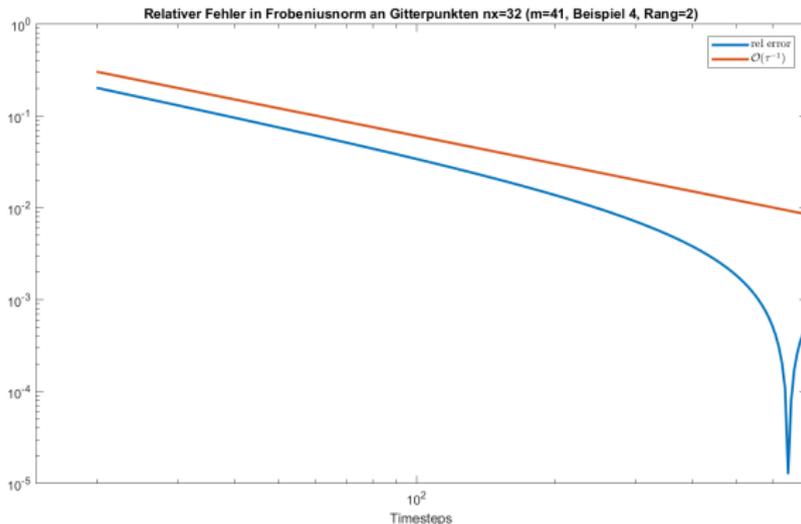
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 16$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten, $t = 1$

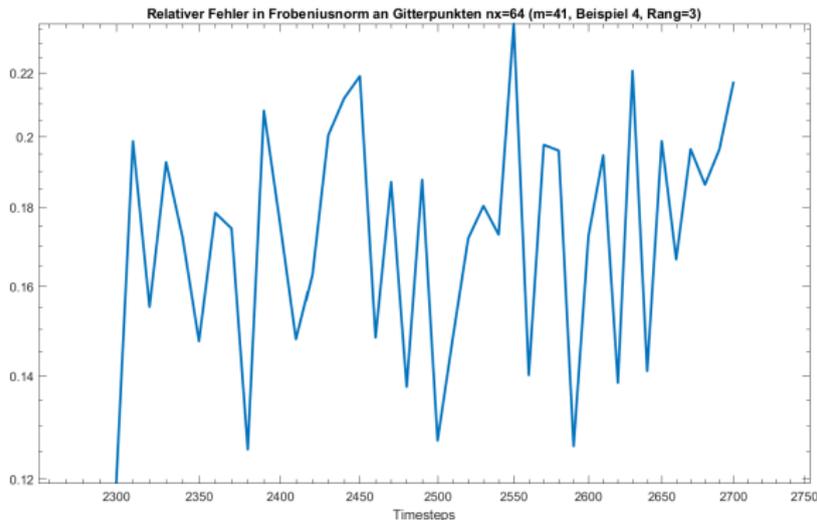
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

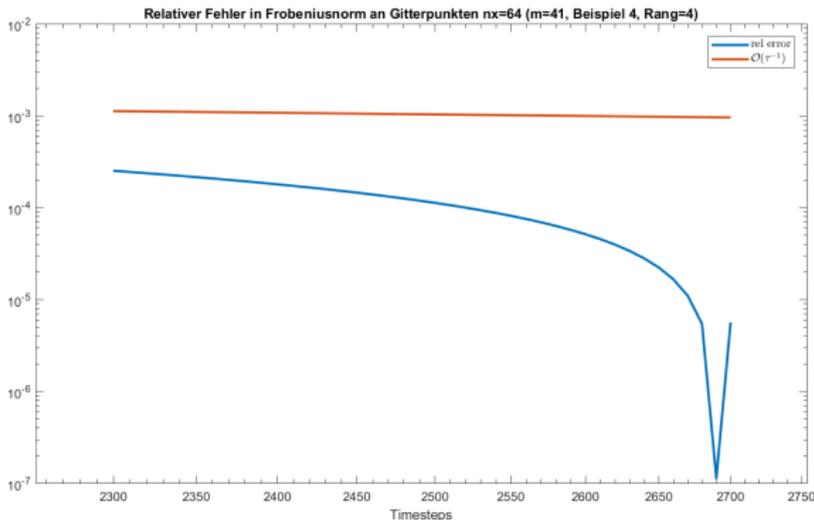
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 3, m=4a, n_x = 64$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

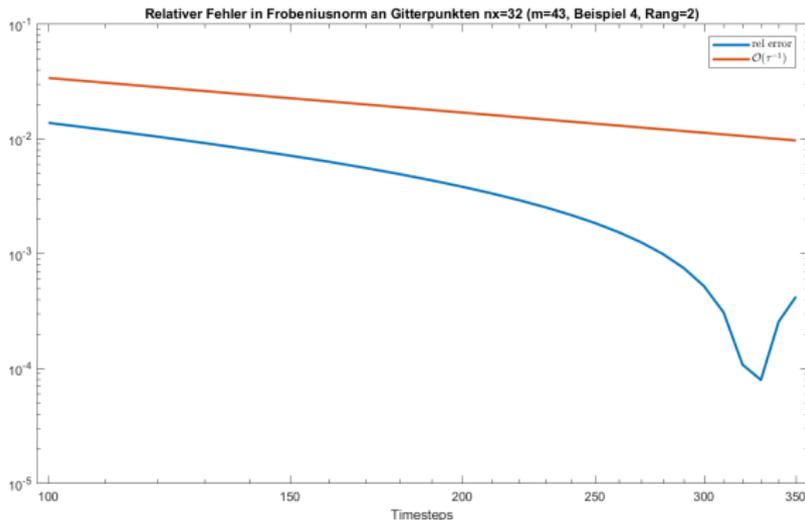
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 4, m=4a, n_x = 64$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

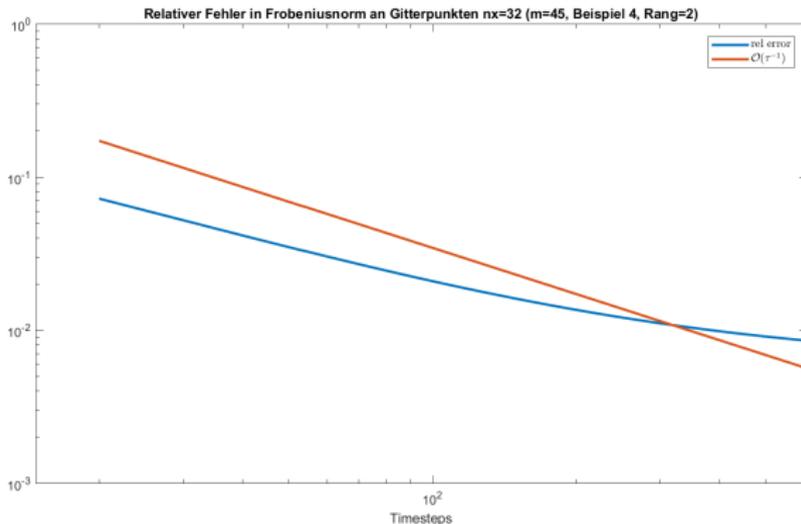
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4b, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

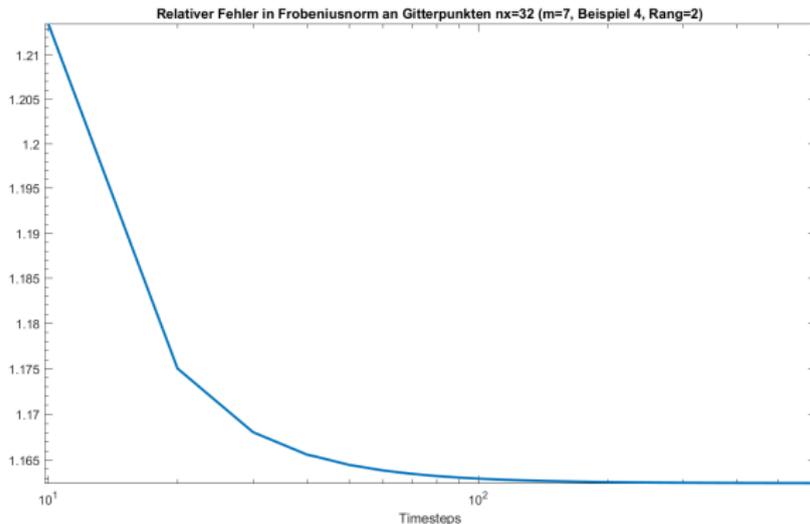
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4c, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

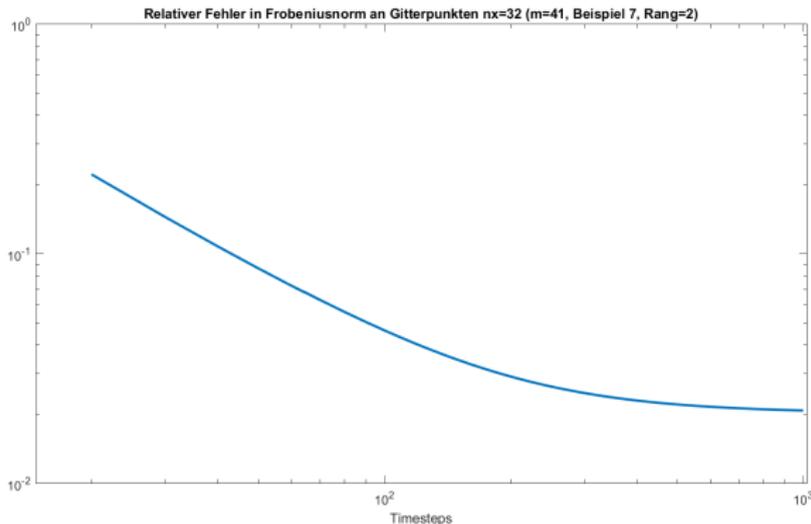
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m = 7, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

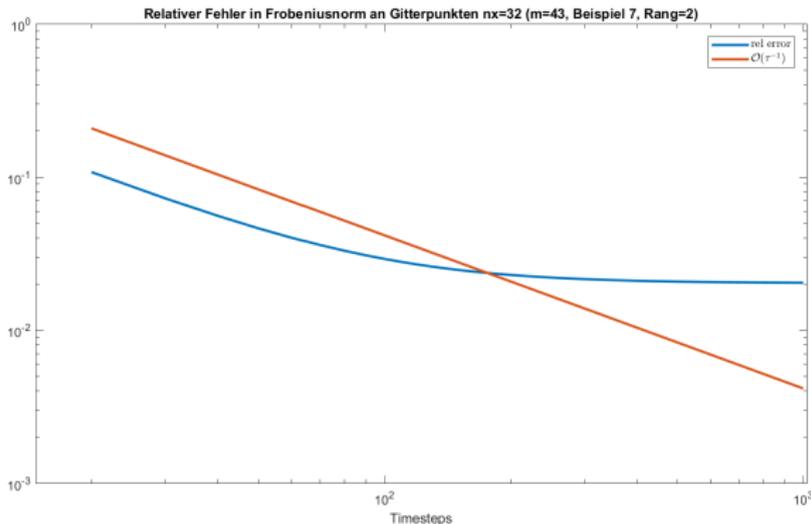
Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

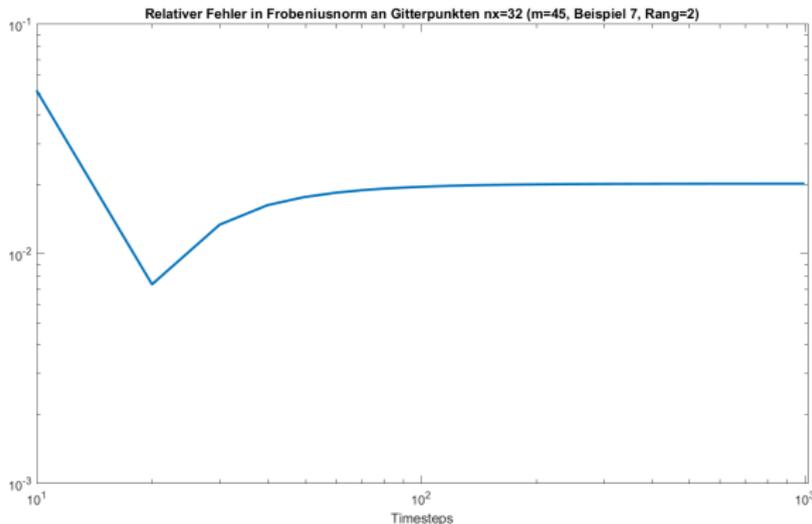
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4b, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

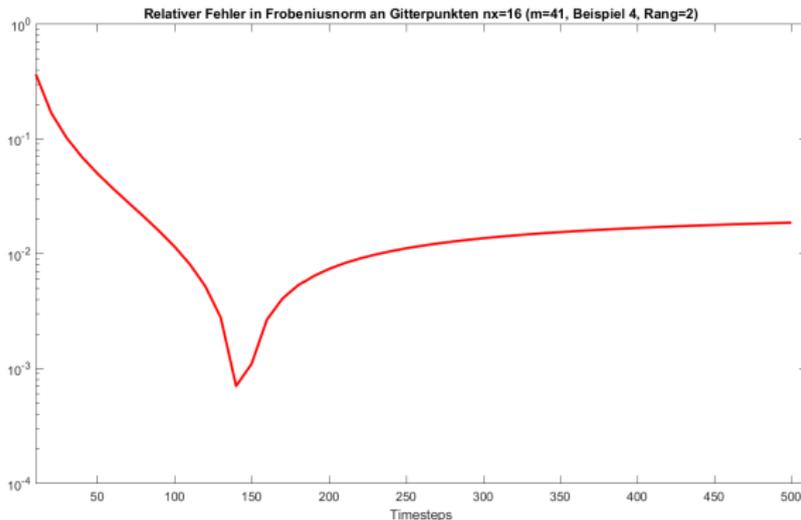
Beispiel $f = 7$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4c, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

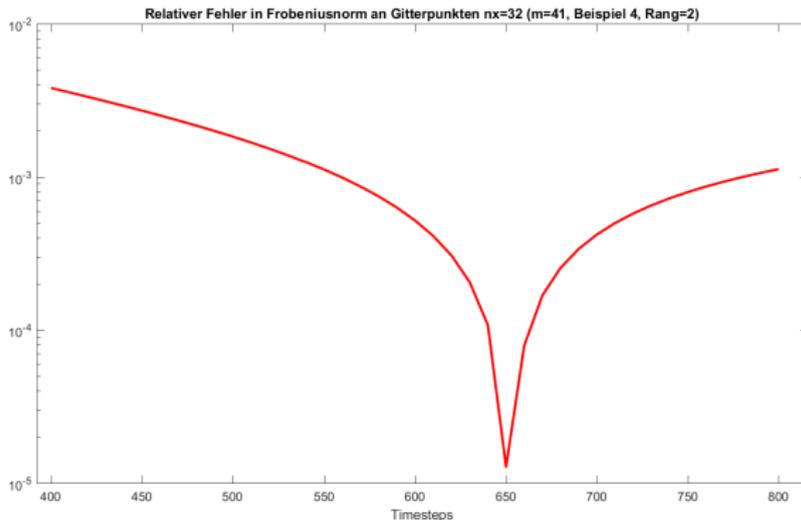
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 16$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

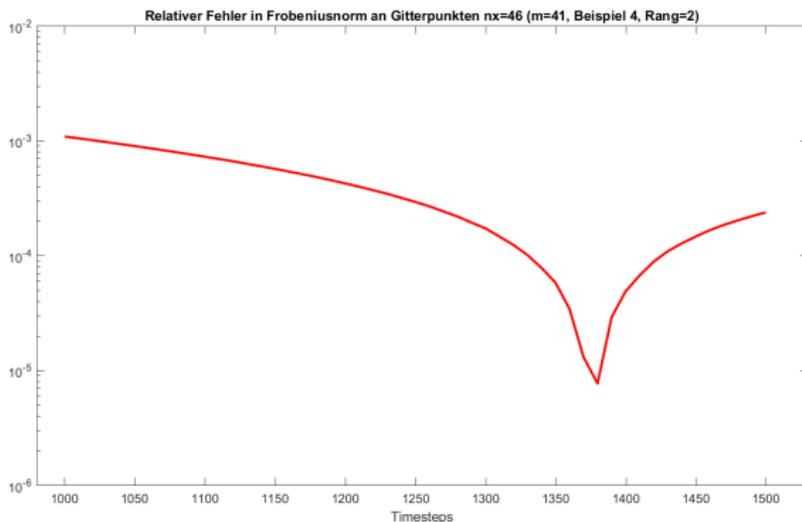
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 32$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

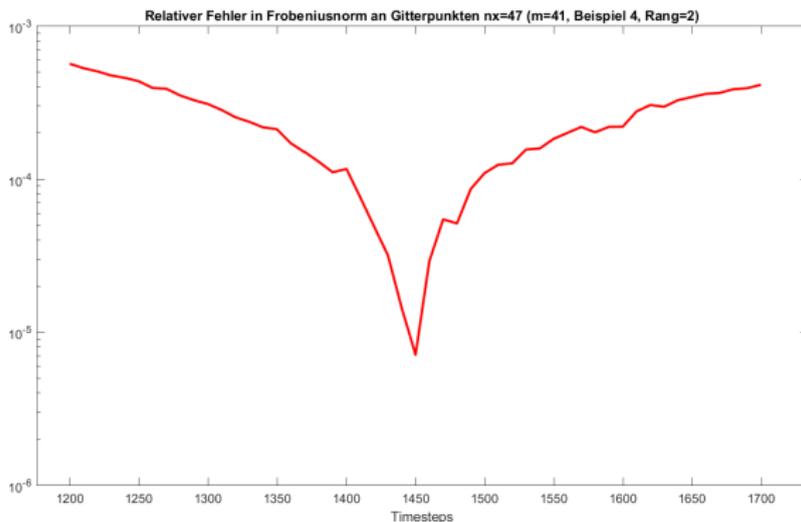
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 46$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

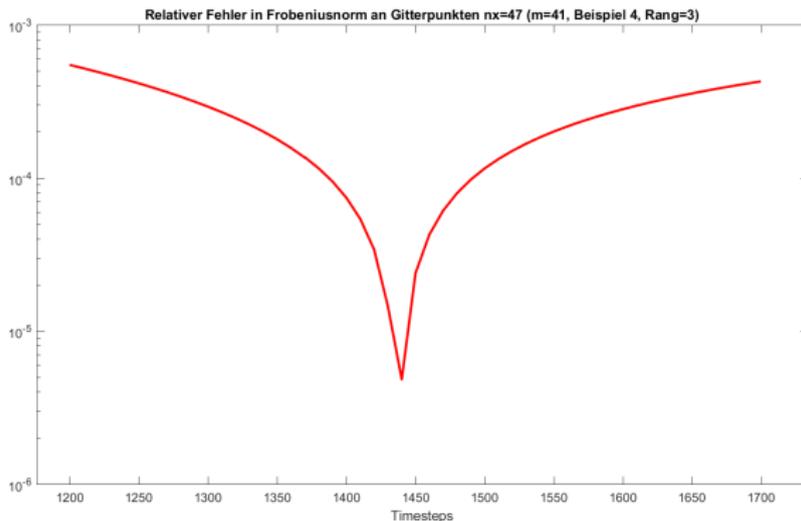
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 2, m=4a, n_x = 47$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

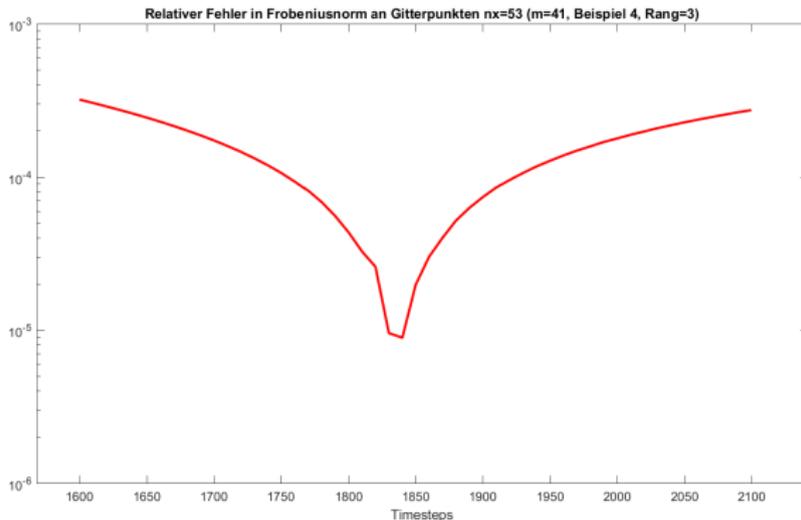
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 3, m=4a, n_x = 47$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

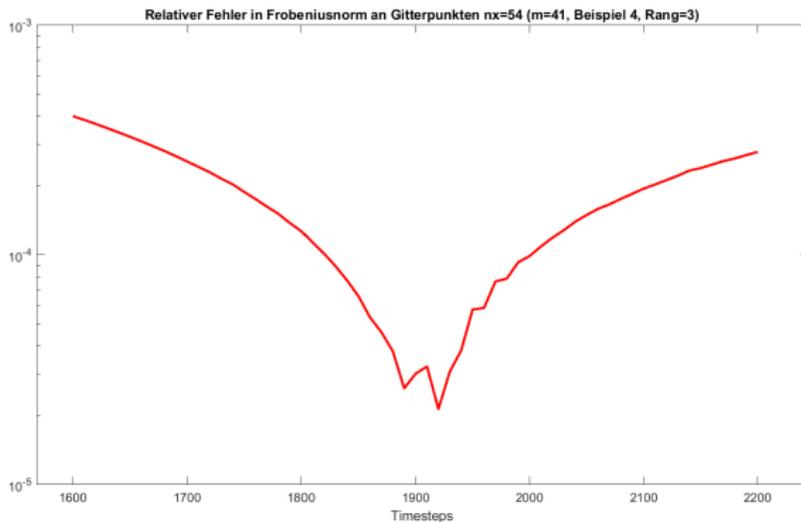
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 3, m=4a, n_x = 53$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

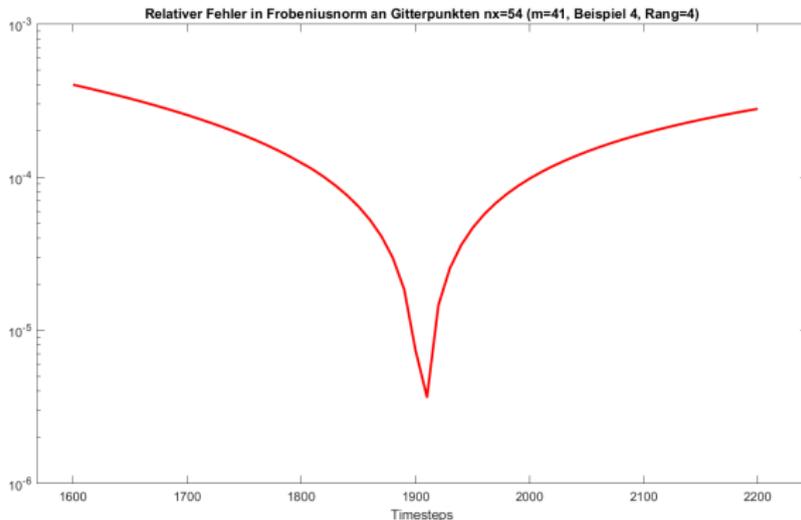
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 3, m=4a, n_x = 54$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

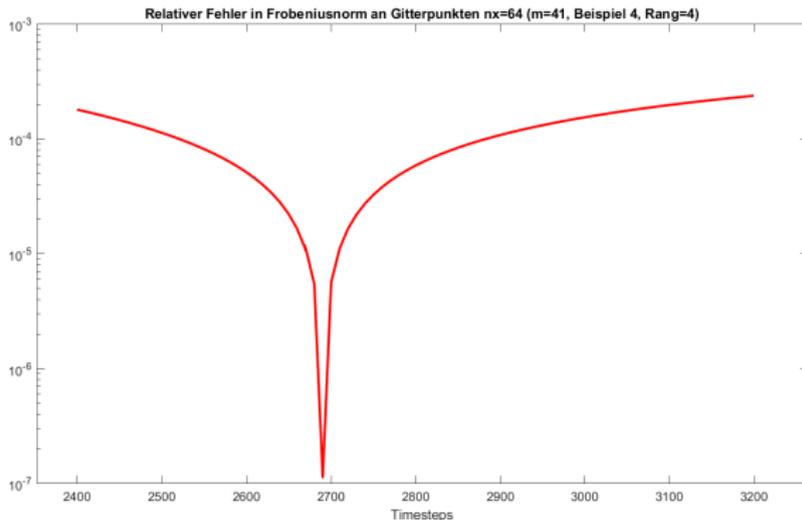
Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 4, m=4a, n_x = 54$$

Relativer Fehler an Gitterpunkten

Beispiel $f = 4$, Integrationsintervall $[0, 1]$



$$r = 4, m=4a, n_x = 64$$