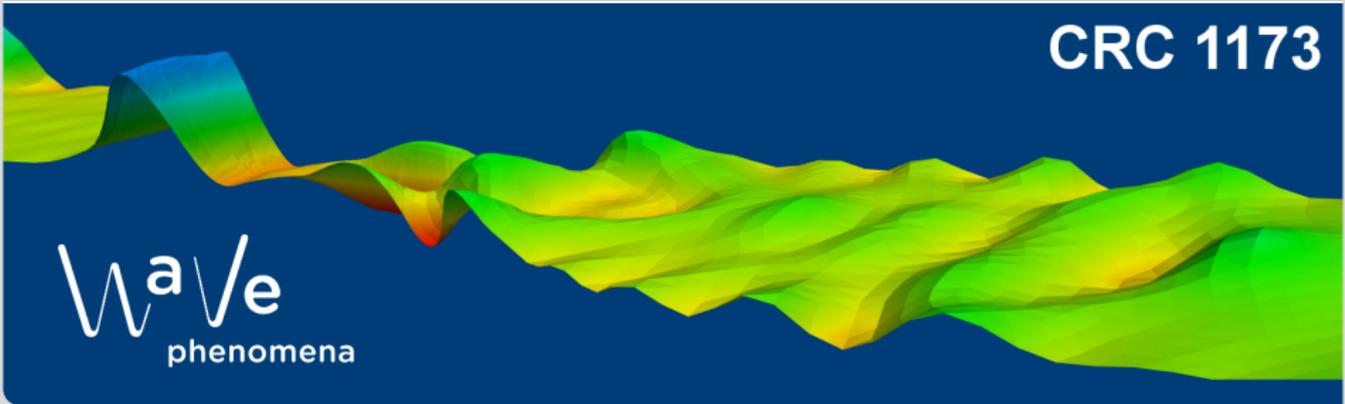


# Zeitintegration der heterogenen Mehrskalenmethode für die Maxwellgleichung

Bernhard Maier

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)



CRC 1173

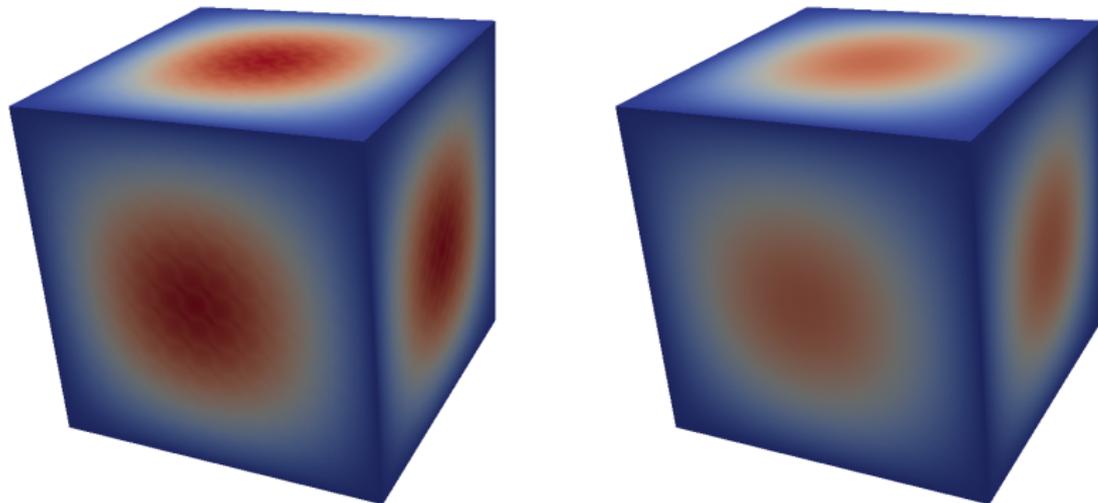
Wave  
phenomena

Motivation

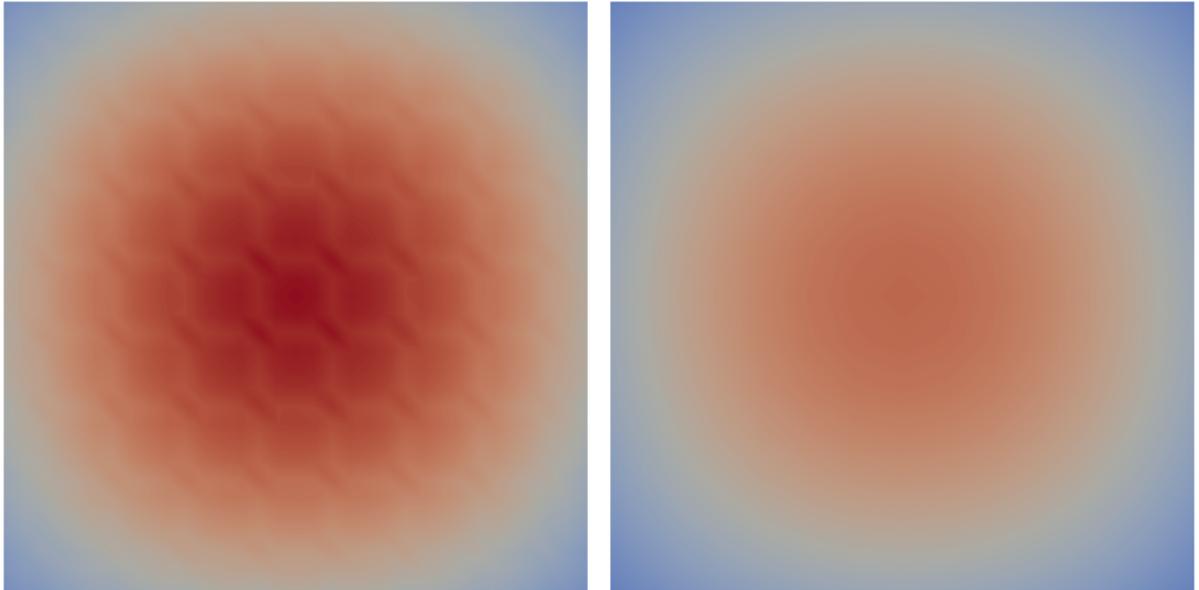
Gleichungen

Zeitintegration

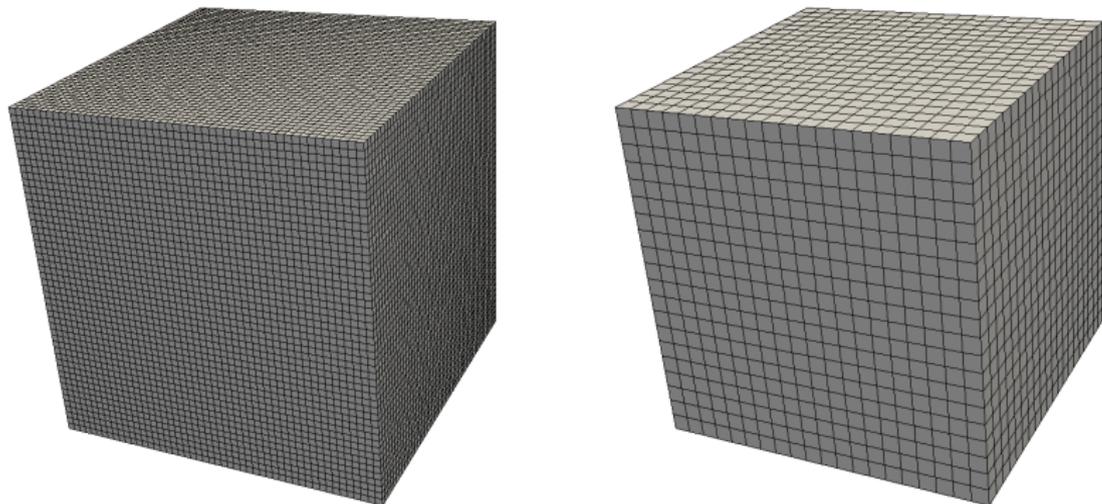
Numerische Beispiele



$|E^\eta|$  (links) und  $|E_H^{\text{HMM}}|$  (rechts).

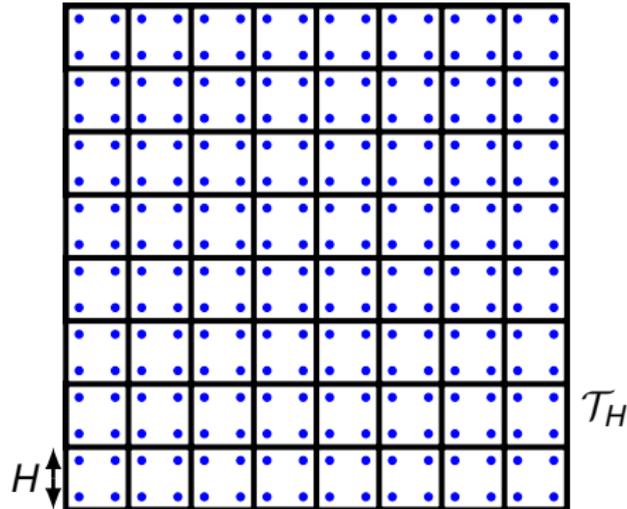


$|E^\eta|$  (links) und  $|E_H^{\text{HMM}}|$  (rechts).



Zerlegung des Einheitswürfels: 50 Zellen pro Raumrichtung (links) und 20 Zellen pro Raumrichtung (rechts).

# Motivation



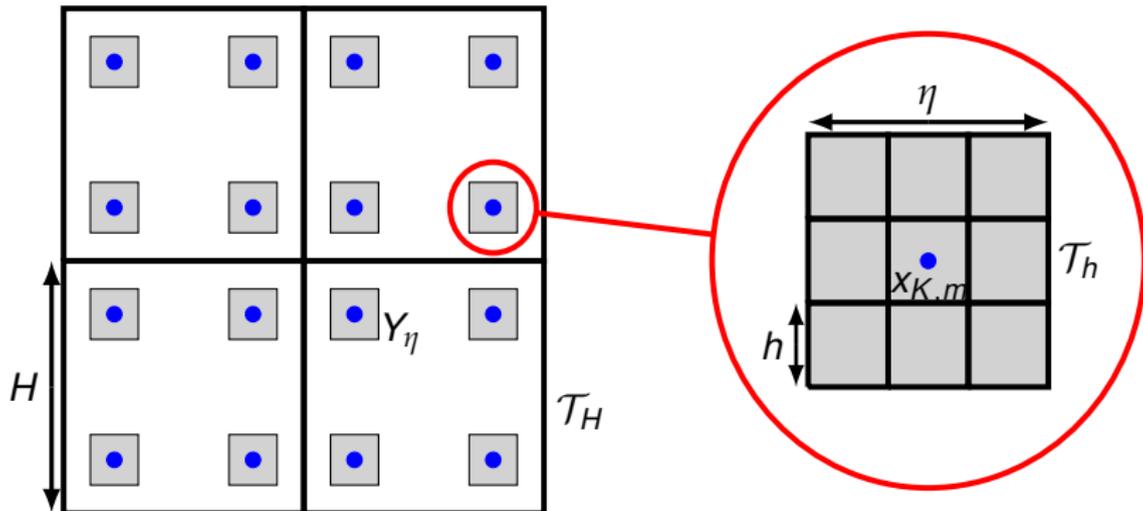


Abbildung basiert auf (Ciarlet 2017)

# Vorgehensweise

Mehrskalengleichung



Mehrskalenlösung

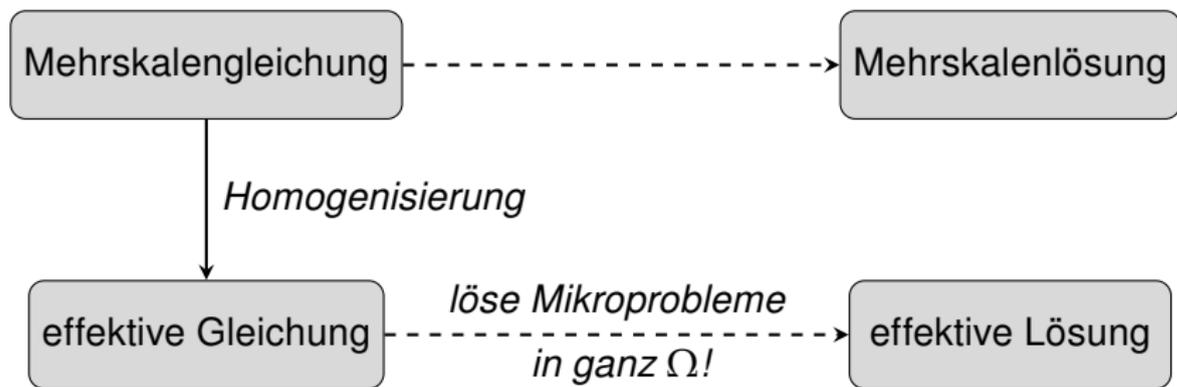
Finde  $H^\eta : (0, T) \rightarrow H(\text{curl}, \Omega)$ ,  $E^\eta : (0, T) \rightarrow H_0(\text{curl}, \Omega)$ , mit

$$\begin{aligned}\mu^\eta \partial_t H^\eta &= -\text{curl } E^\eta && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \varepsilon^\eta \partial_t E^\eta &= \text{curl } H^\eta - J_{\text{ext}} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \text{div} (\mu^\eta H^\eta) &= 0 && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \text{div} (\varepsilon^\eta E^\eta) &= \rho && \text{in } (0, T) \times \Omega\end{aligned}\tag{1}$$

+ Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \text{div } J_{\text{ext}} = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega$$

mit  $\mu^\eta, \varepsilon^\eta$  lokal  $Y_\eta$ -periodisch.



# Theorem - Effektive Maxwellgleichung (1)

$(H^\eta)_{\eta>0}, (E^\eta)_{\eta>0}$  Lösungen von (1). Dann:

$$H^\eta(x, t) \rightharpoonup H^{\text{eff}}(x, t), \quad E^\eta(x, t) \rightharpoonup E^{\text{eff}}(x, t),$$

für  $\eta \rightarrow 0$ , und

$$\mu^{\text{eff}}(x) \partial_t H^{\text{eff}}(x, t) = -\text{curl } E^{\text{eff}}(x, t),$$

$$\varepsilon^{\text{eff}}(x) \partial_t E^{\text{eff}}(x, t) = \text{curl } H^{\text{eff}}(x, t) - J_{\text{ext}}(x, t),$$

$$\text{div}(\mu^{\text{eff}}(x) H^{\text{eff}}(x, t)) = 0,$$

$$\text{div}(\varepsilon^{\text{eff}}(x) E^{\text{eff}}(x, t)) = \rho^{\text{eff}}(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega, t \in (0, T)$ .

## Theorem - Effektive Maxwellgleichung (2)

- Effektive Materialparameter:

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}}(x) = \int_{Y_\eta} \left( I - D_y \chi_\mu(x, \frac{y}{\eta}) \right)^T \boldsymbol{\mu}(x, \frac{y}{\eta}) \left( I - D_y \chi_\mu(x, \frac{y}{\eta}) \right) dy,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}}(x) = \int_{Y_\eta} \left( I - D_y \chi_\varepsilon(x, \frac{y}{\eta}) \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x, \frac{y}{\eta}) \left( I - D_y \chi_\varepsilon(x, \frac{y}{\eta}) \right) dy$$

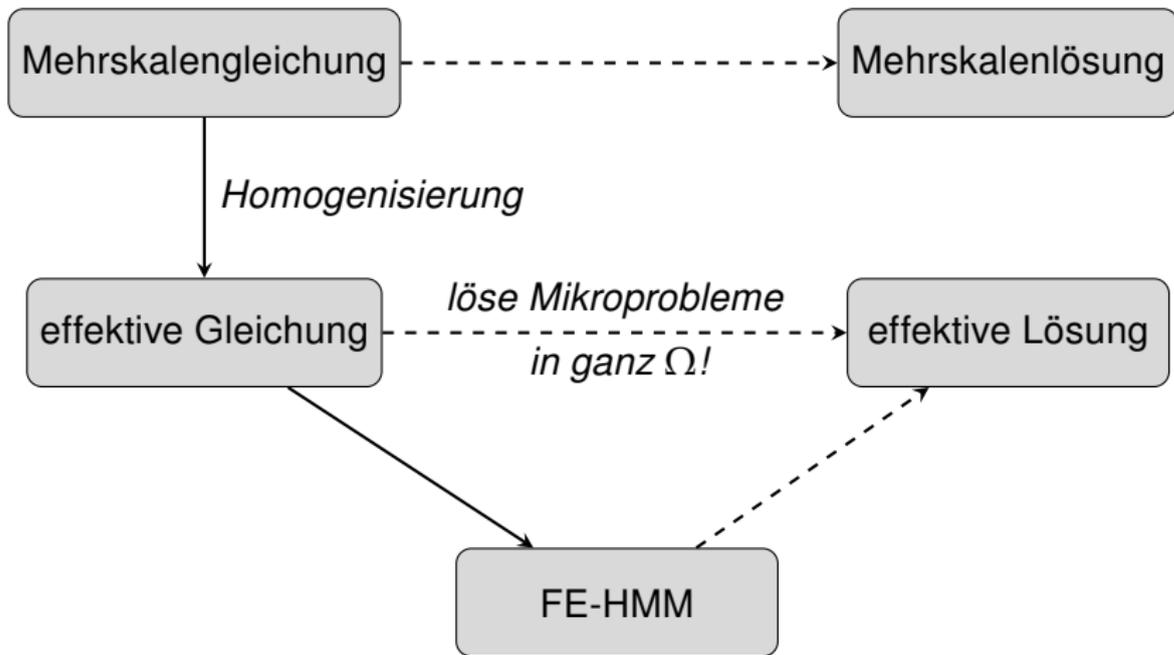
- Lokale Probleme: Finde  $\chi_\mu(x, \cdot), \chi_\varepsilon(x, \cdot) \in (W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R})^3$ , mit

$$\int_{Y_\eta} \left( \boldsymbol{\mu}(x, \frac{y}{\eta}) \left( I - D_y \chi_\mu(x, \frac{y}{\eta}) \right) \right)^T \text{grad}_y v\left(\frac{y}{\eta}\right) dy = 0,$$

$$\int_{Y_\eta} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(x, \frac{y}{\eta}) \left( I - D_y \chi_\varepsilon(x, \frac{y}{\eta}) \right) \right)^T \text{grad}_y v\left(\frac{y}{\eta}\right) dy = 0$$

für alle  $v \in W_{\#}^{1,2}(Y)/\mathbb{R}$ .

(Wellander 2001)



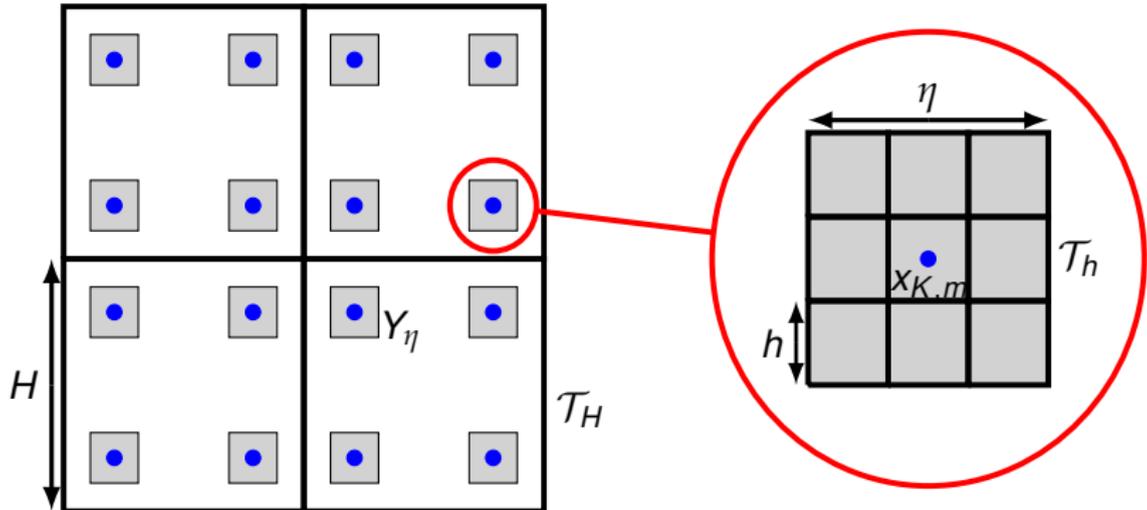


Abbildung basiert auf (Ciarlet 2017)

Finde  $H_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_H^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ ,  $E_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_{H,0}^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ , mit

$$\mu^{\text{HMM}}(x) \partial_t H_H^{\text{HMM}}(x, t) = -\text{curl } E_H^{\text{HMM}}(x, t),$$

$$\varepsilon^{\text{HMM}}(x) \partial_t E_H^{\text{HMM}}(x, t) = \text{curl } H_H^{\text{HMM}}(x, t) - J_{\text{ext},H}(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ .

- HMM-Materialparameter:

$$\mu^{\text{HMM}}(x) = \int_{Y_\eta(x)} (I - D_y \chi_{\mu,h}(x, y))^T \mu(x, \frac{y}{\eta}) (I - D_y \chi_{\mu,h}(x, y)) dy,$$

$$\varepsilon^{\text{HMM}}(x) = \int_{Y_\eta(x)} (I - D_y \chi_{\varepsilon,h}(x, y))^T \varepsilon(x, \frac{y}{\eta}) (I - D_y \chi_{\varepsilon,h}(x, y)) dy,$$

- Lokale Probleme: Finde  $\chi_{\mu,h}(x, \cdot), \chi_{\varepsilon,h}(x, \cdot) \in (\mathbf{S}_{\#}^k(\mathcal{T}_h)/\mathbb{R})^3$ , mit

$$\int_{Y_\eta(x)} \left( \mu(x, \frac{y}{\eta}) (I - D_y \chi_{\mu,h}(x, y)) \right)^T \text{grad}_y v_h(y) dy = 0 \quad \forall v_h \in \mathbf{S}_{\#}^k(\mathcal{T}_h),$$

$$\int_{Y_\eta(x)} \left( \varepsilon(x, \frac{y}{\eta}) (I - D_y \chi_{\varepsilon,h}(x, y)) \right)^T \text{grad}_y v_h(y) dy = 0 \quad \forall v_h \in \mathbf{S}_{\#}^k(\mathcal{T}_h)$$

für alle Quadraturpunkte  $x_K^m \in \Omega$ .

## FE-HMM (3)

Finde  $H_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_H^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ ,  $E_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_{H,0}^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ , mit

$$\mu^{\text{HMM}}(x) \partial_t H_H^{\text{HMM}}(x, t) = -\text{curl} E_H^{\text{HMM}}(x, t),$$

$$\varepsilon^{\text{HMM}}(x) \partial_t E_H^{\text{HMM}}(x, t) = \text{curl} H_H^{\text{HMM}}(x, t) - J_{\text{ext},H}(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ .

## FE-HMM (3)

Finde  $u_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_H^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H) \times V_{H,0}^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ , mit

$$\partial_t u_H^{\text{HMM}}(x, t) = C^{\text{HMM}} u_H^{\text{HMM}}(x, t) - f_H(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ .

Finde  $u_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_H^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H) \times V_{H,0}^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ , mit

$$\partial_t u_H^{\text{HMM}}(x, t) = C^{\text{HMM}} u_H^{\text{HMM}}(x, t) - f_H(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ .

- Fehlerabschätzung (Polynomgrad  $p_{\text{mac}} \leq \ell$ ,  $p_{\text{mic}} \leq k$ ):

$$\begin{aligned} & \|u_H^{\text{HMM}}(t) - u^{\text{eff}}(t)\|_{L^2(\Omega)^6} \\ & \leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0^{\text{eff}}\|_{L^2(\Omega)^6} + Ct \|f_H - \mathcal{P}_H f\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ & \quad + Ct \left(\frac{h}{\eta}\right)^{2k} \|\partial_t u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} + CH^\ell |u^{\text{eff}}(t)|_{W^{\ell+1,2}(\Omega)^6} \\ & \quad + CtH^\ell \left( |u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} + |\partial_t u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} \right). \end{aligned}$$

(basierend auf Hipp 2017)

Finde  $u_H^{\text{HMM}} : (0, T) \rightarrow V_H^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H) \times V_{H,0}^{\text{Néd}}(\mathcal{T}_H)$ , mit

$$\partial_t u_H^{\text{HMM}}(x, t) = C^{\text{HMM}} u_H^{\text{HMM}}(x, t) - f_H(x, t)$$

für fast alle  $x \in \Omega$ ,  $t \in (0, T)$ .

- Fehlerabschätzung (Polynomgrad  $p_{\text{mac}} \leq \ell$ ,  $p_{\text{mic}} \leq k$ ):

$$\begin{aligned} & \|u_H^{\text{HMM}}(t) - u^{\text{eff}}(t)\|_{L^2(\Omega)^6} \\ & \leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0^{\text{eff}}\|_{L^2(\Omega)^6} + Ct \|f_H - \mathcal{P}_H f\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} \\ & \quad + Ct \left(\frac{h}{\eta}\right)^{2k} \|\partial_t u^{\text{eff}}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^6)} + CH^\ell |u^{\text{eff}}(t)|_{W^{\ell+1,2}(\Omega)^6} \\ & \quad + CtH^\ell \left( |u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} + |\partial_t u^{\text{eff}}|_{L^\infty(0,t;W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} \right). \end{aligned}$$

(basierend auf Hipp 2017)

■ Bisherige Notation:

$$\partial_t u^{\text{eff}}(x, t) = \mathcal{C}^{\text{eff}} u^{\text{eff}}(x, t) - f(x, t),$$

$$\partial_t u_H^{\text{HMM}}(x, t) = \mathcal{C}^{\text{HMM}} u_H^{\text{HMM}}(x, t) - f_H(x, t),$$

$$\mathcal{C}^* = \begin{pmatrix} 0 & -(\mu^*)^{-1} \text{curl} \\ (\varepsilon^*)^{-1} \text{curl} & 0 \end{pmatrix}$$

## ■ Bisherige Notation:

$$\partial_t u^{\text{eff}}(x, t) = \mathcal{C}^{\text{eff}} u^{\text{eff}}(x, t) - f(x, t),$$

$$\partial_t u_H^{\text{HMM}}(x, t) = \mathcal{C}^{\text{HMM}} u_H^{\text{HMM}}(x, t) - f_H(x, t),$$

$$\mathcal{C}^* = \begin{pmatrix} 0 & -(\mu^*)^{-1} \text{curl} \\ (\epsilon^*)^{-1} \text{curl} & 0 \end{pmatrix}$$

## ■ Neue Notation:

$$u^n = u^{\text{eff}}(\cdot, t_n), \quad u_H^n \approx u_H^{\text{HMM}}(\cdot, t_n)$$

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{C}^{\text{eff}} u(x, t) - f(x, t),$$

$$\partial_t u_H(x, t) = \mathcal{C}^{\text{HMM}} u_H(x, t) - f_H(x, t)$$

# Runge-Kutta Methode

$$\dot{U}_H^{ni} = C^{\text{HMM}} U_H^{ni} + f_H^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$U_H^{ni} = u_H^n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{U}_H^{nj}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$u_H^{n+1} = u_H^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \dot{U}_H^{ni}, \quad \text{mit } u_H^0 = u_{H,0}^{\text{HMM}},$$

mit  $u_H^n \approx u_H^{\text{HMM}}(t_n)$ ,  $U_H^{ni} \approx u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau)$ ,  $\dot{U}_H^{ni} \approx \partial_t u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau)$ .

$$\dot{U}_H^{ni} = C^{\text{HMM}} U_H^{ni} + f_H^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$U_H^{ni} = u_H^n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{U}_H^{nj}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$u_H^{n+1} = u_H^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \dot{U}_H^{ni}, \quad \text{mit } u_H^0 = u_{H,0}^{\text{HMM}},$$

mit  $u_H^n \approx u_H^{\text{HMM}}(t_n)$ ,  $U_H^{ni} \approx u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau)$ ,  $\dot{U}_H^{ni} \approx \partial_t u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau)$ .

- Ordnung:  $p \geq s + 1$
- algebraisch stabil:
  - $b_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, s$
  - $\mathcal{M} = (b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j)_{i,j=1}^s$  ist positiv semidefinit
- koerziv:  $\exists \beta > 0$ ,  $\mathcal{D}$  diagonal und positiv definit, mit

$$(\mathcal{D} \mathcal{A}^{-1} v) \cdot v \geq \beta (\mathcal{D} v) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^s$$

# Volldiskrete Fehlerabschätzungen (1)

Sei  $u \in C^1(0, T; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)$ ,  $\partial_t^{s+1} u \in L^2(0, T; V)$ ,  $\partial_t^{s+2} u \in L^2(0, T; X)$ .  
Für  $n = 1, \dots, N$  gilt:

$$\|u_H^n - u(t_n)\|_{0,\Omega} \leq ???$$

Stabilität + Beschränktheit der rechten Seite

$$\dot{U}^{ni} = C^{\text{eff}} U^{ni} + f_H^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$U^{ni} = u^n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{U}^{nj} + \Delta^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \dot{U}^{ni} + \delta^{n+1}, \quad \text{mit } u^0 = u_0,$$

mit  $u^n = u^{\text{eff}}(t_n)$ ,  $U^{ni} = u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau)$ ,  $\dot{U}^{ni} = \partial_t u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau)$ .

$$\dot{E}_H^{ni} = C^{\text{HMM}} E_H^{ni} + g_H^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$E_H^{ni} = e_H^n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{E}_H^{nj} - \mathcal{I}_H \Delta^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$e_H^{n+1} = e_H^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \dot{E}_H^{ni} - \mathcal{I}_H \delta^{n+1}, \quad \text{mit } e_H^0 = u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0,$$

mit  $e_H^n = u_H^{\text{HMM}}(t_n) - \mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(t_n),$

$$E_H^{ni} = u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau) - \mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau),$$

$$\dot{E}_H^{ni} = \partial_t u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau) - \mathcal{I}_H \partial_t u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau)$$

und  $g_H^{ni} := (C^{\text{HMM}} \mathcal{I}_H - \mathcal{I}_H C^{\text{eff}}) U^{ni} + f_H^{ni} - \mathcal{I}_H f^{ni}.$

# Volldiskrete Fehlerabschätzungen (1)

Sei  $u \in C^1(0, T; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)$ ,  $\partial_t^{s+1} u \in L^2(0, T; V)$ ,  $\partial_t^{s+2} u \in L^2(0, T; X)$ .  
Für  $n = 1, \dots, N$  gilt:

## ■ Stabilität

$$\|e_H^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|e_H^0\|_{0,\Omega}^2 + C(1+T) \left( \tau^{2(s+1)} B(u, s, t_n) + \tau \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|g_H^{ri}\|_{0,\Omega}^2 \right),$$

$$B(u, s, t_*) = \int_0^{t_*} \|u^{(s+1)}(t)\|_V^2 + \|u^{(s+2)}(t)\|_{0,\Omega}^2 dt.$$

# Volldiskrete Fehlerabschätzungen (1)

Sei  $u \in C^1(0, T; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)$ ,  $\partial_t^{s+1} u \in L^2(0, T; V)$ ,  $\partial_t^{s+2} u \in L^2(0, T; X)$ .  
Für  $n = 1, \dots, N$  gilt:

## ■ Stabilität

$$\|e_H^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|e_H^0\|_{0,\Omega}^2 + C(1+T) \left( \tau^{2(s+1)} B(u, s, t_n) + \tau \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|g_H^{ri}\|_{0,\Omega}^2 \right),$$

$$B(u, s, t_*) = \int_0^{t_*} \|u^{(s+1)}(t)\|_V^2 + \|u^{(s+2)}(t)\|_{0,\Omega}^2 dt.$$

## ■ Beschränktheit rechte Seite

$$\|g_H^{ni}\|_{0,\Omega} \leq \|f_H^{ni} - \mathcal{P}_H f^{ni}\|_{0,\Omega} + C \sup_{\|v_H\|_{V_H^\ell}=1} \|\Delta m(\mathcal{I}_H \partial_t u, v_H)\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; X)} \\ + C \|(I - \mathcal{I}_H) \partial_t u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; X)} + C \|(I - \mathcal{I}_H) u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; V)}.$$

# Volldiskrete Fehlerabschätzungen (1)

Sei  $u \in C^1(0, T; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)$ ,  $\partial_t^{s+1} u \in L^2(0, T; V)$ ,  $\partial_t^{s+2} u \in L^2(0, T; X)$ .  
Für  $n = 1, \dots, N$  gilt:

$$\begin{aligned} \|u_H^n - u(t_n)\|_{0,\Omega} &\leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - u(0)\|_{0,\Omega} + C \max_{\substack{r=0,\dots,n-1 \\ i=1,\dots,s}} \|f_H^r - \mathcal{P}_H f^r\|_{0,\Omega} \\ &\quad + C \tau^{s+1} B(u, s, t_n) + C \left(\frac{h}{\eta}\right)^{2k} \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,t_n; L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + C H^\ell (\|u\|_{L^\infty(0,t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0,t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)}), \end{aligned}$$

$$B(u, s, t_*) = \int_0^{t_*} \|u^{(s+1)}(t)\|_V^2 + \|u^{(s+2)}(t)\|_{0,\Omega}^2 dt.$$

## Volldiskrete Fehlerabschätzungen (2)

Sei  $u \in C(0, T; V) \cap C^3(0, T; L^2(\Omega)^6)$ .

- Für Crank-Nicolson gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_H^n - u(t_n)\|_{0,\Omega} &\leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - u(0)\|_{0,\Omega} + C \max_{r=0,\dots,n-1} \|f_H^r - \mathcal{P}_H f^r\|_{0,\Omega} \\ &\quad + C\tau^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega)^6)} + C\left(\frac{h}{\eta}\right)^{2k} \|\partial_t u\|_{L^\infty(0, t_n; L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + CH^\ell \left( \|u\|_{L^\infty(0, t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0, t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} \right). \end{aligned}$$

## Volldiskrete Fehlerabschätzungen (2)

Sei  $u \in C(0, T; V) \cap C^3(0, T; L^2(\Omega)^6)$ .

- Für Crank-Nicolson gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_H^n - u(t_n)\|_{0,\Omega} &\leq C \|u_{H,0}^{\text{HMM}} - u(0)\|_{0,\Omega} + C \max_{r=0,\dots,n-1} \|f_H^r - \mathcal{P}_H f^r\|_{0,\Omega} \\ &\quad + C \tau^2 \|\partial_t u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(\Omega)^6)} + C \left(\frac{h}{\eta}\right)^{2k} \|\partial_t u\|_{L^\infty(0, t_n; L^2(\Omega)^6)} \\ &\quad + C H^\ell \left( \|u\|_{L^\infty(0, t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(0, t_n; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)} \right). \end{aligned}$$

- Für Leapfrog selbe Abschätzung unter

$$\tau \leq \frac{2\theta}{C_{\text{CFL}} C_\infty} \min_{K \in \mathcal{T}_H} H_K.$$

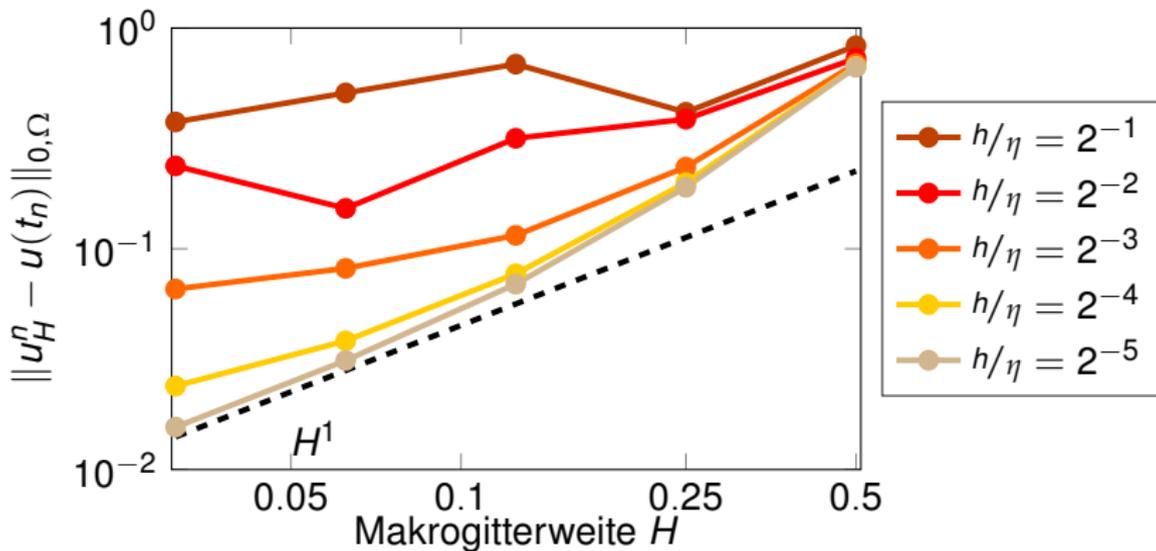
- $\mu^\eta(x) = \varepsilon^\eta(x) = \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi\frac{x_1}{\eta}\right)\right) \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi\frac{x_2}{\eta}\right)\right) \left(\sqrt{2} + \sin\left(2\pi\frac{x_3}{\eta}\right)\right)$   
( $\eta = 0.00625$ )
- $\mu^{\text{eff}} \equiv \mathbf{I}_3, \quad \varepsilon^{\text{eff}} \equiv \mathbf{I}_3$  (Jikov 1994)
- No right hand side:  $J_{\text{ext}} \equiv 0$
- Exact solutions:

$$H^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} -\pi^2\sqrt{3} \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ 2\pi^2\sqrt{3} \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ \pi^2\sqrt{3} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \sin\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$E^{\text{eff}}(x, t) = \begin{pmatrix} -\cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) \cos\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \\ 0 \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3) \cos\left(\frac{1}{\pi\sqrt{3}}t\right) \end{pmatrix}.$$

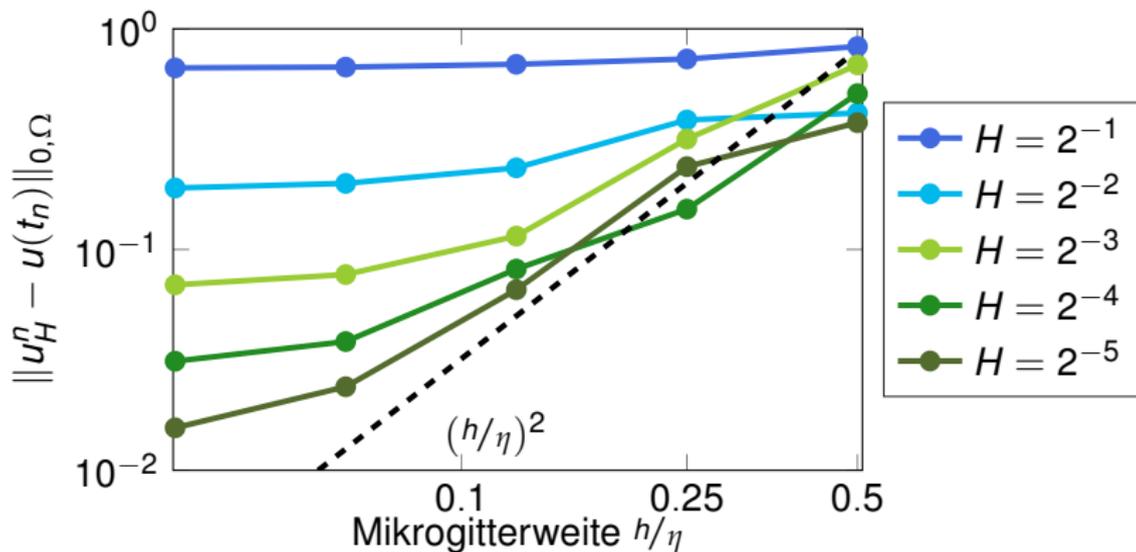
- Time integration: Leapfrog with timestep  $\tau = \frac{1}{100}$  and final time  $T = 1$

## Numerische Beispiele (2)



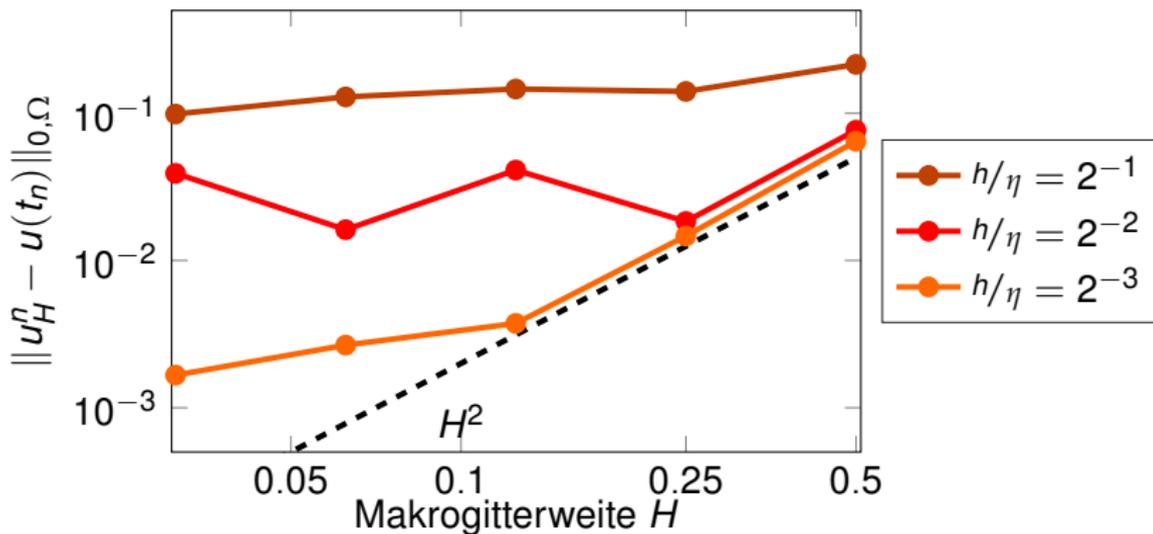
Makrofehler für Polynomgrade  $\ell = k = 1$

# Numerische Beispiele (3)



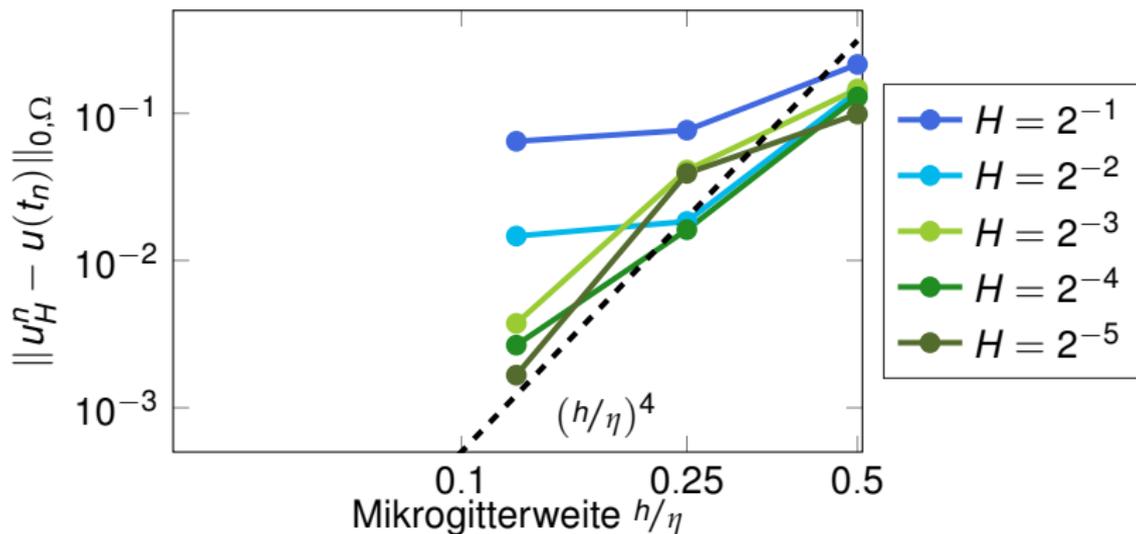
Mikrofehler für Polynomgrade  $\ell = k = 1$

# Numerische Beispiele (4)



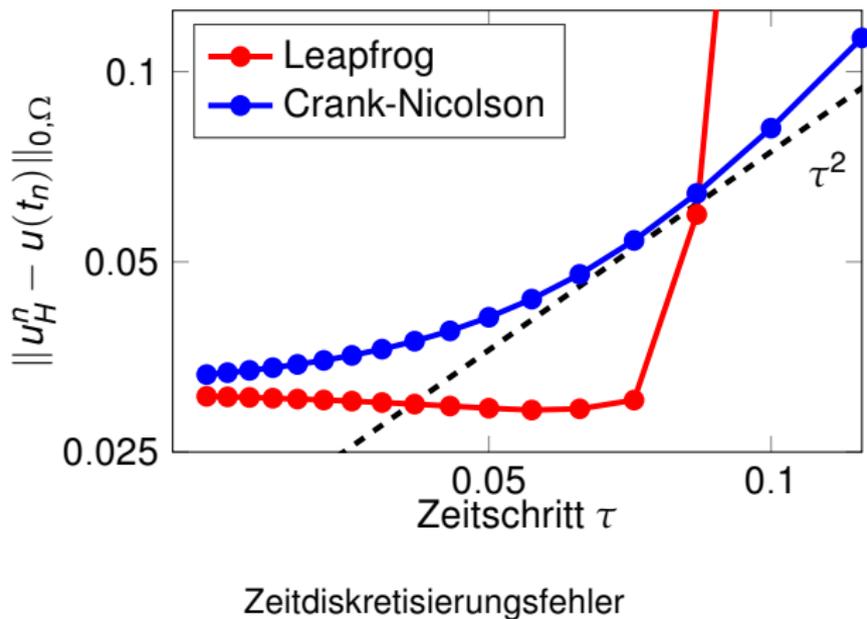
Mikrofehler für Polynomgrade  $\ell = k = 2$

# Numerische Beispiele (5)



Mikrofehler für Polynomgrade  $\ell = k = 2$

# Numerische Beispiele (6)



- Herleitung der FE-HMM für die Maxwell-Gleichung
- Fehleranalyse für Ortsdiskretisierung
- Fehleranalyse für Volldiskretisierung mit
  - algebraisch stabilen Runge-Kutta Verfahren
  - Crank-Nicolson
  - Leapfrog
- Analyse übertragbar auf discontinuous Galerkin

# Volldiskrete Fehlerabschätzungen (1)

Sei  $u \in C^1(0, T; W^{\ell+1,2}(\Omega)^6)$ ,  $\partial_t^{s+1} u \in L^2(0, T; V)$ ,  $\partial_t^{s+2} u \in L^2(0, T; X)$ .  
Für  $n = 1, \dots, N$  gilt:

## ■ Stabilität

$$\|e_H^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|e_H^0\|_{0,\Omega}^2 + C(1+T) \left( \tau^{2(s+1)} B(u, s, t_n) + \tau \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|g_H^{ri}\|_{0,\Omega}^2 \right),$$

$$B(u, s, t_*) = \int_0^{t_*} \|u^{(s+1)}(t)\|_V^2 + \|u^{(s+2)}(t)\|_{0,\Omega}^2 dt.$$

## ■ Beschränktheit rechte Seite

$$\begin{aligned} \|g_H^{ni}\|_{0,\Omega} &\leq \|f_H^{ni} - \mathcal{P}_H f^{ni}\|_{0,\Omega} + C \sup_{\|v_H\|_{V_H^\ell}=1} \|\Delta m(\mathcal{I}_H \partial_t u, v_H)\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; X)} \\ &\quad + C \|(I - \mathcal{I}_H) \partial_t u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; X)} + C \|(I - \mathcal{I}_H) u\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; V)}. \end{aligned}$$

$$\dot{E}_H^{ni} = C^{\text{HMM}} E_H^{ni} + g_H^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$E_H^{ni} = e_H^n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{E}_H^{nj} - \mathcal{I}_H \Delta^{ni}, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$e_H^{n+1} = e_H^n + \tau \sum_{i=1}^s b_i \dot{E}_H^{ni} - \mathcal{I}_H \delta^{n+1}, \quad \text{mit } e_H^0 = u_{H,0}^{\text{HMM}} - \mathcal{I}_H u_0,$$

mit  $e_H^n = u_H^{\text{HMM}}(t_n) - \mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(t_n),$

$$E_H^{ni} = u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau) - \mathcal{I}_H u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau),$$

$$\dot{E}_H^{ni} = \partial_t u_H^{\text{HMM}}(t_n + c_i \tau) - \mathcal{I}_H \partial_t u^{\text{eff}}(t_n + c_i \tau)$$

und  $g_H^{ni} := (C^{\text{HMM}} \mathcal{I}_H - \mathcal{I}_H C^{\text{eff}}) U^{ni} + f_H^{ni} - \mathcal{I}_H f^{ni}.$