Effekte der 1D-Wellengleichung auf nicht äquidistanten Gittern

Einführungsvortrag in die Bachelorarbeit von

Niklas Tittjung

Karlsruher Institut für Technologie

Ausgangsproblem: 1D-Wellengleichung mit Anfangs-und Randbedingungen:

$$
\begin{array}{lll}
 & u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \Omega = (0,1), t \geq 0 \\
u(x,0) = f^0(x), & u_t(x,0) = f^1(x) & x \in \overline{\Omega} \\
u(0,t) = 0, & u(1,t) = 0 & t \geq 0
\end{array}
$$

Zusätzliche Verallgemeinerung: 1D-Wellengleichung mit variablen Koeffizienten:

$$\rho(x)u_{tt} = (\sigma(x)u_x)_x, \;\; x \in \Omega = (0,1), t > 0$$

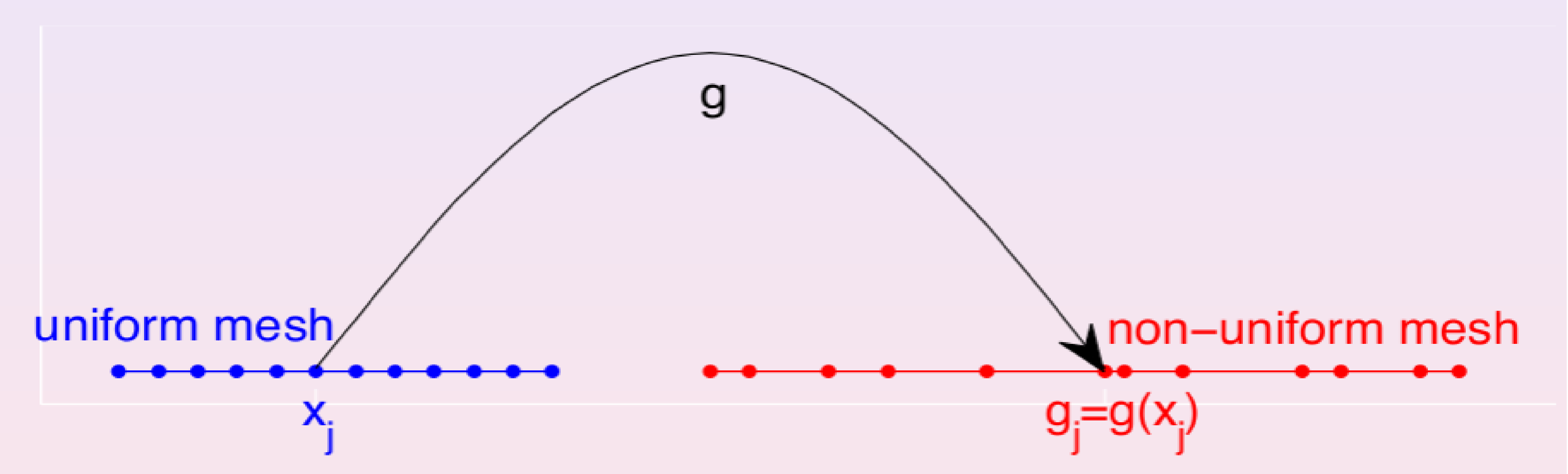
Verallgemeinerung auf nicht äquidistantes Gitter mithilfe der Funktion

$$g : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega},\ g \text{ stetig und s.m.w.}$$

und dem äquidistanten Gitter

$$x_j = hj, h = 1/N, j = 0, \ldots, N$$

Es ergibt sich das im Allgemeinen nicht äquidistante Gitter $g_j := g(x_j)$.



*) Grafik von Enrique Zuazua

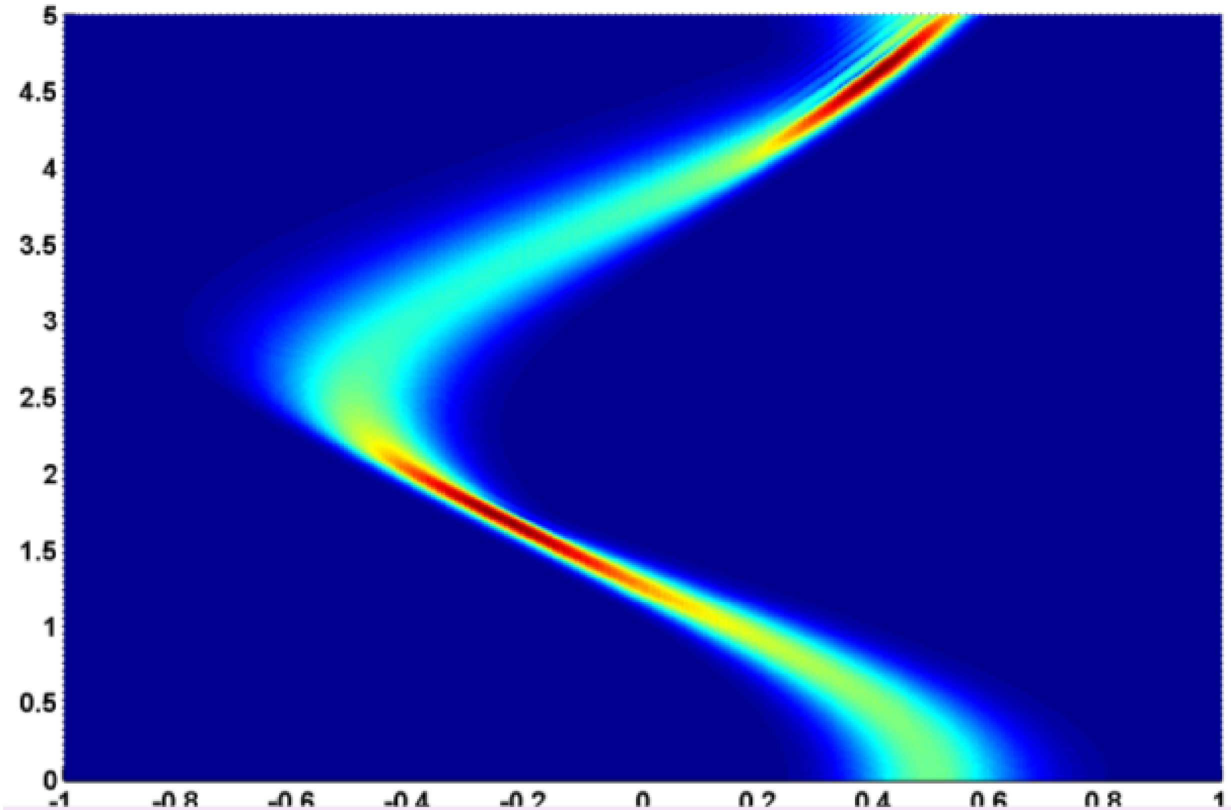
Ortsdiskretisierung:

$$\rho(x)u_{tt} = (\sigma(x)u_x)_x$$

$$\rho(g_j)\tilde{u}_{j,tt} = \frac{\sigma(g_{j+1/2})\frac{\tilde{u}_{j+1}(t)-\tilde{u}_j(t)}{g_{j+1}-g_j} - \sigma(g_{j-1/2})\frac{\tilde{u}_j(t)-\tilde{u}_{j-1}(t)}{g_j-g_{j-1}}}{\frac{g_{j+1}-g_{j-1}}{2}}$$

$$\tilde{u}_j(t) \approx u(g_j, t) \qquad j = 1, ..., N-1$$

Numerische Lösung einer Wellengleichung auf $\Omega = (-1, 1)$ mit $g(x) = \tan(\pi x/4)$



*) Grafik von Enrique Zuazua

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!