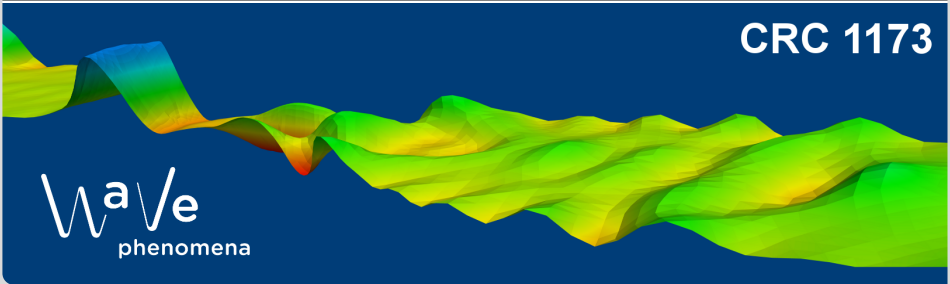


Die ADI-Methode angewandt auf eine Discontinuous Galerkin Diskretisierung

Jonas Köhler

Kompaktseminar Annweiler am Trifels



CRC 1173

Wave
phenomena

Alternating Direction Implicit (ADI) Methode

Discontinuous Galerkin (dG) Diskretisierung

Fazit und Ausblick

Alternating Direction Implicit (ADI) Methode

Discontinuous Galerkin (dG) Diskretisierung

Fazit und Ausblick

- Operator Splitting Methode
- Splitting nach Koordinatenrichtung
 - geometrisches Splitting
 - Ziel: Problem zerfällt in 1D-Probleme
- Meist in Verbindung mit Finite Differenzen
- Verschiedene Ausführungen:
Peaceman-Rachford, Douglas-Rachford, . . .

Differentialgleichung:

$$\partial_t u = Lu = (A + B)u$$

Peaceman-Rachford Splitting

$$\begin{aligned}(I - \frac{\tau}{2}A)u^{n+1/2} &= (I + \frac{\tau}{2}B)u^n \\ (I - \frac{\tau}{2}B)u^{n+1} &= (I + \frac{\tau}{2}A)u^{n+1/2}\end{aligned}$$

oder

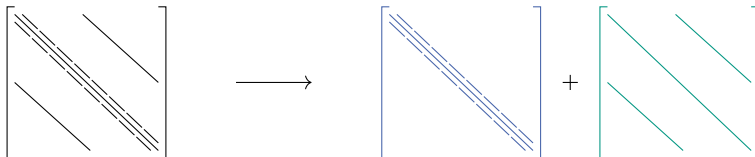
$$u^{n+1} = (I - \frac{\tau}{2}B)^{-1} (I + \frac{\tau}{2}A) (I - \frac{\tau}{2}A)^{-1} (I + \frac{\tau}{2}B) u^n$$

Eigenschaften:

- bedingungslos stabil für dissipative Operatoren
- (klassische) Ordnung zwei
- nicht trivial auf mehr als zwei Dimensionen erweiterbar

Finite Differenzen:

- Teilprobleme zerfallen in Tridiagonalmatrizen
- Entkopplung der einzelnen Linien in Koordinatenrichtung



Finite Elemente:

- Rechteckselemente nötig
- Ausnutzung der Tensorstruktur:
 - Basisfunktionen $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$
 - Steifigkeitsmatrix hat Struktur: $T \otimes M + M \otimes T$
 - T : 1D-Steifigkeitsmatrix
 - M : 1D-Massematrix
- Teilprobleme effizient lösbar, da

$$(T \otimes M)^{-1} = T^{-1} \otimes M^{-1}$$

Discontinuous Galerkin?

Alternating Direction Implicit (ADI) Methode

Discontinuous Galerkin (dG) Diskretisierung

Fazit und Ausblick

- Ortsdiskretisierungsverfahren
- Approximation unstetig entlang Elementrändern
- Basisfunktionen des Ansatzraumes “leben” auf Elementen
- Kopplung über Ränder der Elemente

homogene, lineare 2D-Advektionsgleichung in Rechtecksgebiet Ω

$$\begin{aligned}\partial_t u &= a \cdot \nabla u && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, y, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ u(x, y, t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega^- \times (0, T).\end{aligned}$$

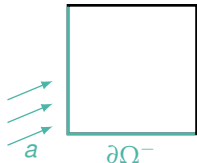
$$\partial\Omega^- = \{(x, y) \in \partial\Omega \mid a \cdot n(x, y) < 0\}.$$

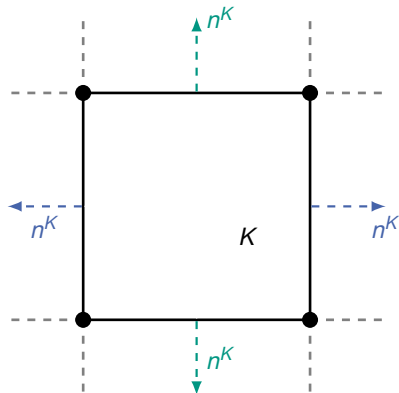
Splitting:

$$a \cdot \nabla = a_x \partial_x + a_y \partial_y$$

$$A := a_x \partial_x$$

$$B := a_y \partial_y$$

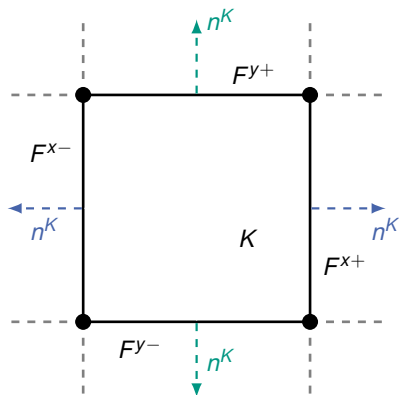




$$\mathcal{F}_K = \{F^{x-}, F^{x+}, F^{y-}, F^{y+}\}$$

$$\mathcal{F}_K^x = \{F^{x-}, F^{x+}\}$$

$$\mathcal{F}_K^y = \{F^{y-}, F^{y+}\}$$



$$\mathcal{F}_K = \{F^{x-}, F^{x+}, F^{y-}, F^{y+}\}$$

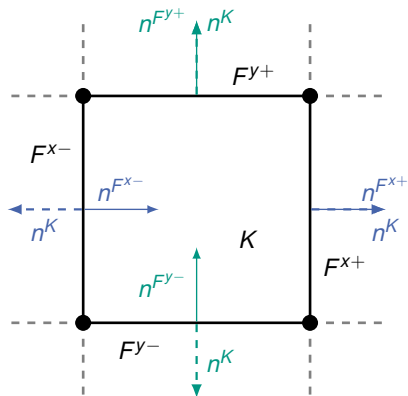
$$\mathcal{F}_K^x = \{F^{x-}, F^{x+}\}$$

$$\mathcal{F}_K^y = \{F^{y-}, F^{y+}\}$$

$$\varepsilon_{KF} = n^K \cdot n^F \in \{-1, 1\}$$

$$n^{F^{x-}} = n^{F^{x+}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^{F^{y-}} = n^{F^{y+}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$u^K = u|_K$$

Mittelwert über die Kante F :

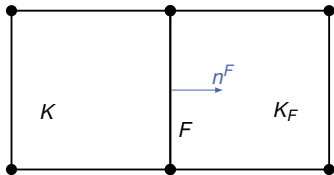
$$\{\{u\}\}_F = \frac{u^K + u^{K_F}}{2}$$

Sprung über die Kante F :

$$[[u]]_F = u^K - u^{K_F}$$

Es gilt:

$$\{\{u\}\}_F - u^K = -\frac{\varepsilon_{KF}}{2} [[u]]_F$$



$$\mathcal{T} = \{K\}$$

Menge der Elemente

$$\mathcal{F}^x = \cup \mathcal{F}_K^x$$

Menge der Ränder mit Normalen in x -Richtung

$$\mathcal{F}^y = \cup \mathcal{F}_K^y$$

Menge der Ränder mit Normalen in y -Richtung

Bilinearform zu A

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} a_x (\partial_x u, v)_K - \sum_{F \in \mathcal{F}^x} a_x ([u]_F, \{\{v\}\}_F)_F$$

Bilinearform zu B

$$b(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} a_y (\partial_y u, v)_K - \sum_{F \in \mathcal{F}^y} a_y ([u]_F, \{\{v\}\}_F)_F$$

- Einsetzen von Elementbasisfunktionen mit lokalem Träger
⇒ Elementmatrizen
- Kopplung benachbarter Elementen (im Sinne von Rändern) über $[[u]]_F$
- Assemblierung aller Elementmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix
- Im Folgenden: lineare Finite Elemente, gleichmäßiges Gitter

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} a_x (\partial_x u, v)_K - \sum_{F \in \mathcal{F}^x} a_x ([u]_F, \{\{v\}\}_F)_F$$

Nach Einsetzen der Element-Basisfunktionen:

$$(\mathbf{D}^x - \mathbf{S}^K) u^K + \mathbf{S}^{x+} u^{x+} - \mathbf{S}^{x-} u^{x-}$$

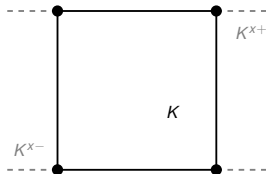
$\mathbf{D}^x$: Elementsteifigkeitsmatrix

$\mathbf{S}^K$: Randmatrix bzgl. K

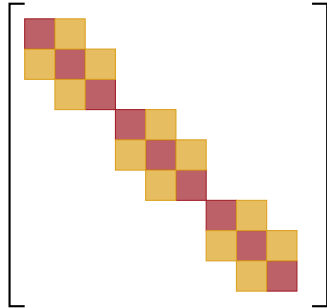
$\mathbf{S}^{x\pm}$: Randmatrix bzgl. $K^{x\pm}$

u^K : Freiheitsgrade des Elements K

$u^{x\pm}$: Freiheitsgrade des Elements $K^{x\pm}$



$$(D^x - S^K)u^K + S^{x+}u^{x+} - S^{x-}u^{x-} \longrightarrow$$

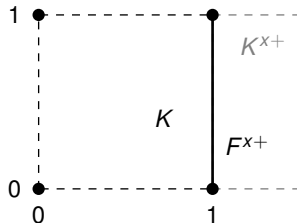


Dabei, mit $K = [0, 1] \times [0, 1]$ und $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}^x)_{ijkl} &= (\partial_x(\phi_i\phi_k), \phi_j\phi_l)_K = \int_0^1 \int_0^1 (\partial_x\phi_i(x))\phi_k(y)\phi_j(x)\phi_l(y) \, dy \, dx \\&= \int_0^1 \partial_x\phi_i(x)\phi_j(x) \, dx \int_0^1 \phi_k(y)\phi_l(y) \, dy \\&= (\partial_x\phi_i, \phi_j)_{[0,1]} (\phi_k, \phi_l)_{[0,1]}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{D}^x$ hat Tensorstruktur $D_{1d}^x \otimes M_{1d}^y$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S}^{x+})_{ijkl} &= \left(\phi_i \phi_k, \phi_j^{x+} \phi_l^{x+} \right)_{F^{x+}} \\
 &= \phi_i(1) \phi_j^{x+}(1) \int_0^1 \phi_k(y) \phi_l^{x+}(y) dy \\
 &= \phi_i(1) \phi_j^{x+}(1) (\phi_k(y), \phi_l^{x+}(y))_{[0,1]}
 \end{aligned}$$



$\Rightarrow \mathbf{S}^{x+}$ hat Tensorstruktur $E_{21} \otimes M_{1d}^y$

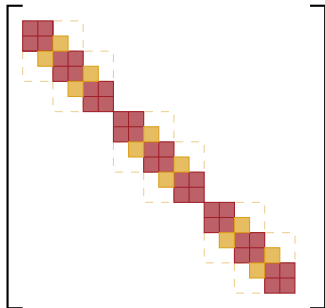
$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}^x \rightarrow D_{1d}^x \otimes M_{1d}^y$$

$$\mathbf{S}^K \rightarrow (E_{22} - E_{11}) \otimes M_{1d}^y$$

$$\mathbf{S}^{x+} \rightarrow E_{21} \otimes M_{1d}^y$$

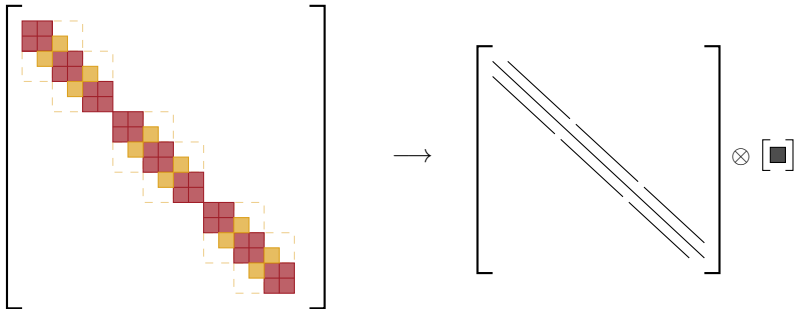
$$\mathbf{S}^{x-} \rightarrow E_{12} \otimes M_{1d}^y$$



D_{1d}^x : 1D-Elementsteifigkeitsmatrix

M_{1d}^y : 1D-Elementmassematrix

E_{ij} : Elementarmatrix



Alternating Direction Implicit (ADI) Methode

Discontinuous Galerkin (dG) Diskretisierung

Fazit und Ausblick

Fazit:

ADI auch für dG effizient, da:

- Teilprobleme zerfallen in entkoppelte 1D-Probleme
- Kroneckerproduktstruktur der Steifigkeitsmatrizen

Fazit:

ADI auch für dG effizient, da:

- Teilprobleme zerfallen in entkoppelte 1D-Probleme
- Kroneckerproduktstruktur der Steifigkeitsmatrizen

Ausblick:

- Ungleichmäßiges Gitter
- Unterschiedliche Polynomgrade
- ADI für Maxwell