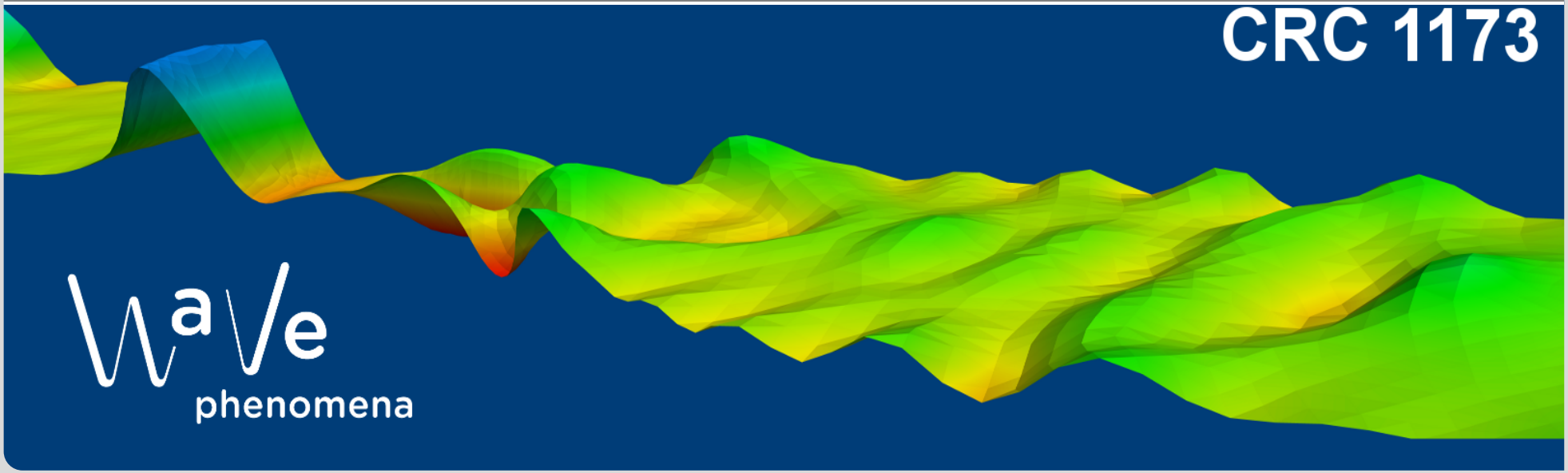
Karlsruher Institut für Technologie

Fehleranalyse trigonometrischer Integratoren für die semilineare Wellengleichung

Autor: Ludwig Gauckler, Vortrag: Simone Buchholz

Institut für angewandte und numerische Mathematik



Hochoszillatorische Probleme

Betrachte für $p \geq 2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u^p, \qquad u = u(x,t)$$

- 2π-periodische Randbedingungen $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \{2\pi\mathbb{Z}\}$
- Anfangswerte $u(\cdot,0) \in H^{s+1} = H^{s+1}(\mathbb{T}),\ u_t(\cdot,0) \in H^s$, $s \geq 0$.

Hochoszillatorische Probleme

Betrachte für $p \geq 2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u^p, \qquad u = u(x,t)$$

- 2π-periodische Randbedingungen $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \{2\pi\mathbb{Z}\}$
- Anfangswerte $u(\cdot,0) \in H^{s+1} = H^{s+1}(\mathbb{T}),\ u_t(\cdot,0) \in H^s$, $s \geq 0$.

Semidiskretisierung im Ort:

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y + f(y)$$

- Ω^2: diskrete zweite Ortsableitung
- $f(y)$: polynomiale Nichtlinearität

Hochoszillatorische Probleme

Betrachte für $p \geq 2$

$$u_{tt} = u_{xx} + u^p, \qquad u = u(x,t)$$

- 2π-periodische Randbedingungen $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \{2\pi\mathbb{Z}\}$
- Anfangswerte $u(\cdot,0) \in H^{s+1} = H^{s+1}(\mathbb{T}),\ u_t(\cdot,0) \in H^s$, $s \geq 0$.

Semidiskretisierung im Ort:

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y + f(y)$$

- Ω^2: diskrete zweite Ortsableitung
- $f(y)$: polynomiale Nichtlinearität
- Eigenwerte von Ω variieren stark, $\|\Omega\| \gg 1$
  $\Longrightarrow$ Lösung hat hoch- und niederfrequente Anteile

Beispiel: hochoszillatorisches Problem

$\|\Omega\| = 2^9$, polynomiale Nichtlinearität $p = 2$:

Übersicht

Vorgehen:

- Diskretisierung der Zeit: trigonometrischer Integrator
- Ziel: Fehleranalyse
  - Fehlerkonstante unabhängig von $\|\Omega\|$
  - niedrige Regularität ($s = 0$) der Lösung: $(u, u_t) \in H^1 \times H^0$

Übersicht

Vorgehen:

- Diskretisierung der Zeit: trigonometrischer Integrator
- Ziel: Fehleranalyse
  - Fehlerkonstante unabhängig von $\|\Omega\|$
  - niedrige Regularität ($s = 0$) der Lösung: $(u, u_t) \in H^1 \times H^0$

Bekannte Fehleranalysen für

- Impuls Methode (Deuflhard)
- gemilderte Impuls Methode (Garcia-Archilla, Sanz-Serna und Skeel)
- Trigonometrische Methoden (Hairer und Lubich)
- exponentieller Integrator (Grimm und Hochbruck)

Neu: Nichtlinearität ist nicht Lipschitz stetig!

Trigonometrischer Integrator

Ortsdiskretisierung:

Differenzialgleichung $u_{tt} = u_{xx} + u^p$

Ansatz: diskrete Fourier-Transformation

$$u_{\mathcal{K}}(x,t) = \sum_{j \in \mathcal{K}} y_j(t) e^{ijx}, \quad \text{mit } \mathcal{K} = \{-K, \ldots, K-1\}$$

Trigonometrischer Integrator

Karlsruher Institut für Technologie

Ortsdiskretisierung:

Differenzialgleichung $\qquad u_{tt} = u_{xx} + u^p$

Ansatz: diskrete Fourier-Transformation

$$u_{\mathcal{K}}(x,t) = \sum_{j\in\mathcal{K}} y_j(t) e^{ijx}, \quad \text{mit } \mathcal{K} = \{-K, \dots, K-1\}$$

Auswertung an den Kollokationspunkten $x_k = \frac{\pi k}{K}$ liefert

$$\ddot{y}(t) = -\Omega^2 y(t) + f(y(t)), \qquad y(t) = (y_j(t))_{j\in\mathcal{K}}$$

- $\Omega = \mathrm{diag}(|j|)_{j\in\mathcal{K}}$
- $f(y) = \underbrace{y * \cdots * y}_{p \text{ mal}}$

Trigonometrischer Integrator

Ortsdiskretisierung:

Differenzialgleichung $\qquad u_{tt} = u_{xx} + u^p$

Ansatz: diskrete Fourier-Transformation

$$u_{\mathcal{K}}(x,t) = \sum_{j\in\mathcal{K}} y_j(t) e^{ijx}, \quad \text{mit } \mathcal{K} = \{-K, \dots, K-1\}$$

Auswertung an den Kollokationspunkten $x_k = \frac{\pi k}{K}$ liefert

$$\ddot{y}(t) = -\Omega^2 y(t) + f(y(t)), \qquad y(t) = (y_j(t))_{j\in\mathcal{K}}$$

- $\Omega = \mathrm{diag}(|j|)_{j\in\mathcal{K}}$
- $f(y) = \underbrace{y * \cdots * y}_{p \text{ mal}}$

Exakte Lösung gegeben durch Variation-der-Konstanten Formel

Trigonometrischer Integrator

Variation-der-Konstanten Formel

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = R(t) \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t R(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ f(y(\tau)) \end{bmatrix} d\tau$$

mit

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\Omega) & t\mathrm{sinc}(t\Omega) \\ -\Omega \sin(t\Omega) & \cos(t\Omega) \end{bmatrix}$$

Trigonometrischer Integrator

Variation-der-Konstanten Formel

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = R(t) \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t R(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ f(y(\tau)) \end{bmatrix} d\tau$$

mit

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\Omega) & t\operatorname{sinc}(t\Omega) \\ -\Omega \sin(t\Omega) & \cos(t\Omega) \end{bmatrix}$$

Zeitdiskretisierung: Für $y^n \approx y(t_n)$ mit $t_n = nh$:

$$\begin{bmatrix} y^{n+1} \\ \dot{y}^{n+1} \end{bmatrix} = R(h) \begin{bmatrix} y^n \\ \dot{y}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} h^2 \Psi f(\Phi y^n) \\ \frac{1}{2} h(\Psi_0 f(\Phi y^n) + \Psi_1 f(\Phi y^{n+1})) \end{bmatrix}$$

Filterfunktionen: $\Phi = \phi(h\Omega)$, $\Psi = \psi(h\Omega)$, $\Psi_1 = \psi_1(h\Omega)$, $\Psi_0 = \psi_0(h\Omega)$ mit $\psi(0) = \phi(0) = \psi_1(0) = \psi_0(0) = 1$.

Filterfunktion

Bedingung für symmetrisches Verfahren: gerade Filterfunktionen und

$$\psi(\xi) = \text{sinc}(\xi)\psi_1(\xi), \qquad \psi_0(\xi) = \cos(\xi)\psi_1(\xi) \tag{1}$$

Mögliche Filterfunktionen:

(B)	$\psi(\xi) = \text{sinc}(\xi)$,	$\phi(\xi) = 1$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(C)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^2(\xi)$,	$\phi(\xi) = sinc(\xi)$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(E)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^2(\xi)$,	$\phi(\xi) = 1$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(G)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^3(\xi)$,	$\phi(\xi) = sinc(\xi)$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1).

(B): Deuflhard, (C): Gracia-Archilla, Sanz-Serena, Skeel,
(E): Hairer, Lubich, (G) Grimm, Hochbruck

Filterfunktion

Bedingung für symmetrisches Verfahren: gerade Filterfunktionen und

$$\psi(\xi) = \text{sinc}(\xi)\psi_1(\xi), \qquad \psi_0(\xi) = \cos(\xi)\psi_1(\xi) \tag{1}$$

Mögliche Filterfunktionen:

(B)	$\psi(\xi) = \text{sinc}(\xi)$,	$\phi(\xi) = 1$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(C)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^2(\xi)$,	$\phi(\xi) = sinc(\xi)$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(E)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^2(\xi)$,	$\phi(\xi) = 1$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1),
(G)	$\psi(\xi) = \text{sinc}^3(\xi)$,	$\phi(\xi) = sinc(\xi)$,	ψ_0, ψ_1 wie in (1).

(B): Deuflhard, (C): Gracia-Archilla, Sanz-Serena, Skeel,
(E): Hairer, Lubich, (G) Grimm, Hochbruck

Gautschi Methoden passen nicht in das Schema

Konvergenzresultat

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem (L. Gauckler, 2015)

Voraussetzungen:

- $s \geq 0, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$
- exakte Lösung erfüllt $\qquad \|y(t)\|_{s+1} + \|\dot{y}(t)\|_s \leq M \quad$ für $0 \leq t \leq T$
- Filterfunktionen erfüllen Annahme $[A]$ für $\beta = 0$ und $\beta = \alpha$

Dann existiert $h_0 > 0$ für alle $h \leq h_0$ gilt

$$\|y(t_n) - y^n\|_{s+1-\alpha} + \|\dot{y}(t_n) - \dot{y}^n\|_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

für $0 \leq t \leq T$. C ist unabhängig von $\|\Omega\|$

Konvergenzresultat

Theorem (L. Gauckler, 2015)

Voraussetzungen:

- $s \geq 0, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$
- exakte Lösung erfüllt $\quad \|y(t)\|_{s+1} + \|\dot{y}(t)\|_s \leq M \quad$ für $0 \leq t \leq T$
- Filterfunktionen erfüllen Annahme $[A]$ für $\beta = 0$ und $\beta = \alpha$

Dann existiert $h_0 > 0$ für alle $h \leq h_0$ gilt

$$\|y(t_n) - y^n\|_{s+1-\alpha} + \|\dot{y}(t_n) - \dot{y}^n\|_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

für $0 \leq t \leq T$. C ist unabhängig von $\|\Omega\|$

α :	-1		0		1
Fehlernorm ggü Regularität	$+1$	abnehmend	$+0$	abnehmend	-1
Ordnung	0	zunehmend	1	zunehmend	2

Konvergenzresultat

Diskrete Sobolev-Norm:

$$\|y\|_s = \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} \langle j \rangle^{2s} \left| y_j \right|^2 \right)^{1/2}, \qquad \langle j \rangle = \max(1, |j|), y \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$$

Konvergenzresultat

Karlsruher Institut für Technologie

Diskrete Sobolev-Norm:

$$\|y\|_s = \left(\sum_{j \in \mathcal{K}} \langle j \rangle^{2s} \left| y_j \right|^2 \right)^{1/2}, \qquad \langle j \rangle = \max(1, |j|), y \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$$

Annahmen $[A]$:

Für $-1 \leq \beta \leq 1$ existiert $c > 0$ für alle $\xi = h\,|j|\,,\ \ j \in \mathcal{K} \backslash \{0\}$ gilt:

(i) $|\phi(\xi)| \leq c,$

(ii) $|\psi(\xi)| \leq c\xi^{\beta}$ falls $-1 \leq \beta \leq 0,$

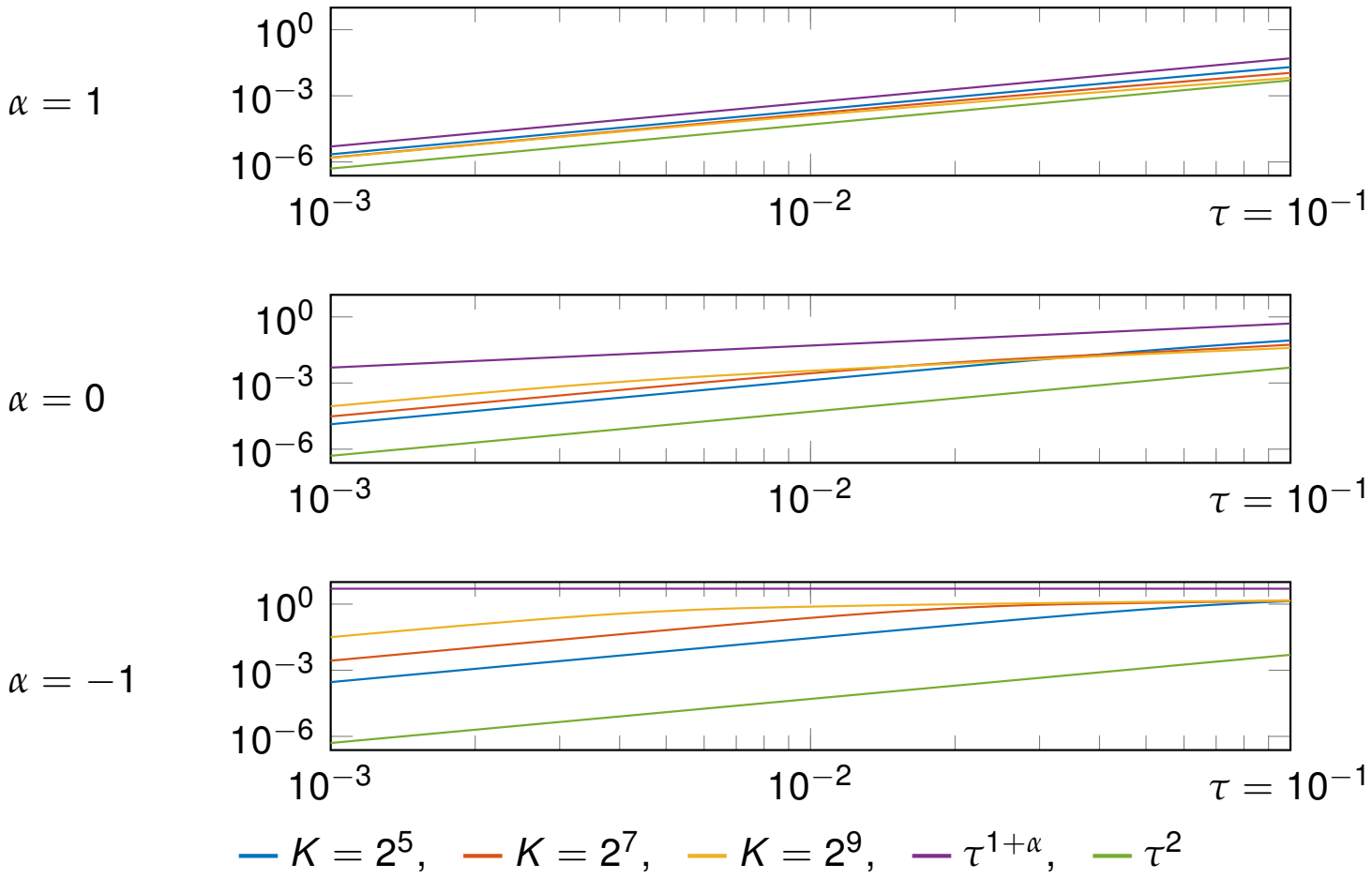
(iii) $|1 - \psi(\xi)| \leq c\xi^{\beta},$ falls $0 < \beta \leq 1,$

(iv) $|1 - \chi(\xi)| \leq c\xi^{1+\beta}$ für $\chi = \phi, \psi_0, \psi_1.$

(B), (C), (E) und (G) erfüllen $[A]$ gleichmäßig für alle $-1 \leq \beta \leq 1$

numerische Tests

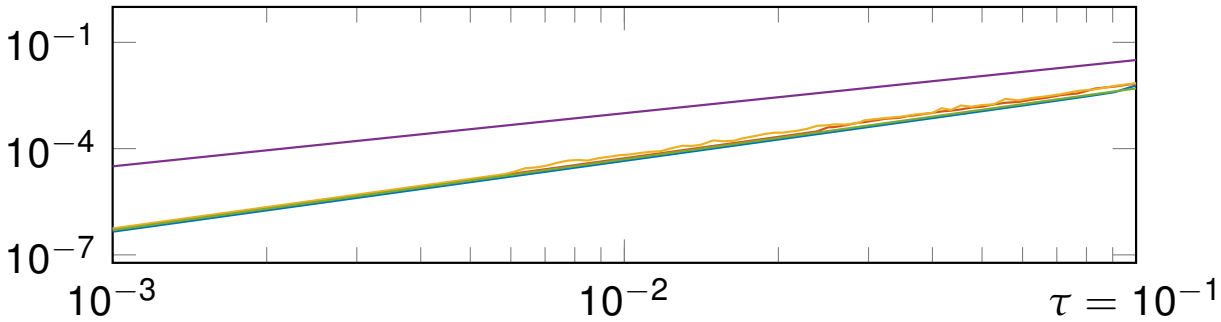
$p = 2, \quad s = 0, \quad$ Filter: gemilderte Impuls Methode



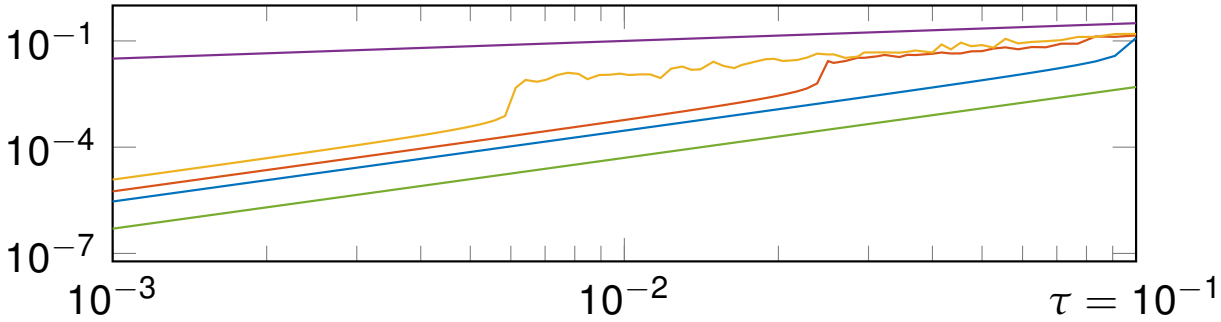
numerische Tests

$p = 2, \quad s = 0, \quad$ Filter: Deulfhardt

$\alpha = \frac{1}{2}$



$\alpha = -\frac{1}{2}$



$K = 2^5$, $K = 2^7$, $K = 2^9$, $\tau^{1+\alpha}$, τ^2

Beweistechnik

1. lokaler Fehler
2. Fehlerfortpflanzung

Beweistechnik

$$\left.\begin{array}{c}\text{1. lokaler Fehler}\\ \text{2. Fehlerfortpflanzung}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{c}\text{Lady Windermeres Fächer}\\ \Rightarrow \text{Konvergenz}\end{array}$$

Beweistechnik

$$\begin{array}{c}\|y^1\|_{s+1}\\ \text{beschränkt}\end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c}\text{1. lokaler Fehler}\\ \text{2. Fehlerfortpflanzung}\end{array} \right\} \begin{array}{c}\text{Lady Windermeres Fächer}\\ \Rightarrow \text{Konvergenz}\end{array}$$

Beweistechnik

$\|y^1\|_{s+1}$ beschränkt $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{1. lokaler Fehler} \\ \text{2. Fehlerfortpflanzung} \end{array} \right\}$ Lady Windermeres Fächer $\Rightarrow$ Konvergenz

Lemma: Regularitätserhaltung über einen Zeitschritt

Voraussetzungen:

- $s \geq 0, \quad -1 \leq \alpha \leq 0$
- Annahmen $[A]$ sind erfüllt für $\beta = \alpha$
- $\|y^0\|_{s+1} + \|\dot{y}^0\|_s \leq M$

Dann ist

$$\left\|y^1\right\|_{s+1} \leq C.$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \dot{y}^1 \end{bmatrix} = R(h) \begin{bmatrix} y^0 \\ \dot{y}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0) \\ \frac{1}{2}h(\Psi_0 f(\Phi y^0) + \Psi_1 f(\Phi y^1)) \end{bmatrix}$$

mit

$$R(h) = \begin{bmatrix} \cos(h\Omega) & h\mathrm{sinc}(h\Omega) \\ -\Omega\sin(h\Omega) & \cos(h\Omega) \end{bmatrix}$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$y^1 = \cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \frac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &= \left\|\cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \tfrac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq \left\|y^0\right\|_{s+1} + h\left\|sinc(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \tfrac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &= \left\|\cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \tfrac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq \underbrace{\left\|y^0\right\|_{s+1}}_{\leq M} + h\left\|sinc(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \tfrac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &= \left\|\cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \tfrac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq \underbrace{\left\|y^0\right\|_{s+1}}_{\leq M} + h\left\|sinc(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \tfrac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}\end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{sinc}(h\,|j|) \leq (h\langle j\rangle)^{-1}$, damit

$$h\left\|\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} = h\left(\sum_{j\in\mathcal{K}}\langle j\rangle^{2s+2}\left|\mathrm{sinc}(h\,|j|)\dot{y}_j^0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &= \left\|\cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \tfrac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq \underbrace{\left\|y^0\right\|_{s+1}}_{\leq M} + h\left\|sinc(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \tfrac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}\end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{sinc}(h\,|j|) \leq (h\langle j\rangle)^{-1}$, damit

$$\begin{aligned}h\left\|\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} &= h\left(\sum_{j\in\mathcal{K}}\langle j\rangle^{2s+2}\left|\mathrm{sinc}(h\,|j|)\dot{y}_j^0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq h\left(\sum_{j\in\mathcal{K}}\langle j\rangle^{2s+2-2}h^{-2}\left|\dot{y}_j^0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|\dot{y}^0\right\|_s \leq M\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Für y^1 gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &= \left\|\cos(h\Omega)y^0 + h\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 + \tfrac{1}{2}\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq \underbrace{\left\|y^0\right\|_{s+1}}_{\leq M} + \underbrace{h\left\|sinc(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1}}_{\leq M} + \tfrac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}\end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{sinc}(h\,|j|) \leq (h\langle j\rangle)^{-1}$, damit

$$\begin{aligned}h\left\|\mathrm{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} &= h\left(\sum_{j\in\mathcal{K}}\langle j\rangle^{2s+2}\left|\mathrm{sinc}(h\,|j|)\dot{y}_j^0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq h\left(\sum_{j\in\mathcal{K}}\langle j\rangle^{2s+2-2}h^{-2}\left|\dot{y}_j^0\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|\dot{y}^0\right\|_s \leq M\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Für $\sigma \geq 1$, $y, z \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$ gilt

$$\|y * z\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma \|z\|_\sigma$$

Für $\|y\|_\sigma \leq M$ folgt daher $\|f(y)\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma$.

Beweis Lemma

Für $\sigma \geq 1$, $y, z \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$ gilt

$$\|y * z\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma \|z\|_\sigma$$

Für $\|y\|_\sigma \leq M$ folgt daher $\|f(y)\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma$.
Es gilt $[A]$: $|\psi(h|j|)| \leq \max(1, c)(h\langle j\rangle)^\alpha$, also ist

$$\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} = \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} \langle j\rangle^{2s+2} \left|\psi(h|j|) f(\phi(h|j|) y_j^0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis Lemma

Für $\sigma \geq 1$, $y, z \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$ gilt

$$\|y * z\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma \|z\|_\sigma$$

Für $\|y\|_\sigma \leq M$ folgt daher $\|f(y)\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma$.
Es gilt $[A]$: $|\psi(h|j|)| \leq \max(1, c)(h\langle j\rangle)^\alpha$, also ist

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} &= \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} \langle j\rangle^{2s+2} \left|\psi(h|j|) f(\phi(h|j|) y_j^0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max(1, c) h^\alpha \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} \langle j\rangle^{2s+2+2\alpha} \left|f(\phi(h|j|) y_j^0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \max(1, c) h^\alpha \left\|f(\Phi y^0)\right\|_{s+1+\alpha} \leq \max(1, c) h^\alpha \left\|f(\Phi y^0)\right\|_{s+1}
\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Für $\sigma \geq 1$, $y, z \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}}$ gilt

$$\|y * z\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma \|z\|_\sigma$$

Für $\|y\|_\sigma \leq M$ folgt daher $\|f(y)\|_\sigma \leq C \|y\|_\sigma$.
Es gilt $[A]$: $|\psi(h|j|)| \leq \max(1, c)(h\langle j\rangle)^\alpha$, also ist

$$\begin{aligned}
\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} &= \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} \langle j\rangle^{2s+2} \left|\psi(h|j|) f(\phi(h|j|) y_j^0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max(1, c) h^\alpha \left(\sum_{j\in\mathcal{K}} \langle j\rangle^{2s+2+2\alpha} \left|f(\phi(h|j|) y_j^0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \max(1, c) h^\alpha \left\|f(\Phi y^0)\right\|_{s+1+\alpha} \leq \max(1, c) h^\alpha \left\|f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\
&\leq \max(1, c) h^\alpha \left\|\Phi y^0\right\|_{s+1} \leq \max(c, c^2) h^\alpha \left\|y^0\right\|_{s+1} \leq \max(c, c^2) h^\alpha M
\end{aligned}$$

Beweis Lemma

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\left\| y^1 \right\|_{s+1} &\leq \left\| y^0 \right\|_{s+1} + h \left\| \operatorname{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0 \right\|_{s+1} + \frac{1}{2} h^2 \left\| \Psi f(\Phi y^0) \right\|_{s+1} \\
&\leq M + M + \frac{1}{2} \max(c, c^2) h^{2+\alpha} M \\
&\leq C
\end{aligned}
$$

Beweis Lemma

Damit gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &\leq \left\|y^0\right\|_{s+1} + h\left\|\operatorname{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \frac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq M + M + \frac{1}{2}\max(c, c^2)h^{2+\alpha}M \\ &\leq C\end{aligned}$$

Frage: Was ist für $0 < \alpha \leq 1$?

Beweis Lemma

Damit gilt

$$\begin{aligned}\left\|y^1\right\|_{s+1} &\leq \left\|y^0\right\|_{s+1} + h\left\|\operatorname{sinc}(h\Omega)\dot{y}^0\right\|_{s+1} + \frac{1}{2}h^2\left\|\Psi f(\Phi y^0)\right\|_{s+1} \\ &\leq M + M + \frac{1}{2}\max(c, c^2)h^{2+\alpha}M \\ &\leq C\end{aligned}$$

Frage: Was ist für $0 < \alpha \leq 1$?

Vereinfachte Schreibweise:

$$|||(y, \dot{y})|||_\sigma = \left(\|y\|_{\sigma+1}^2 + \|\dot{y}\|_\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bausteine für Lady Windermeres Fächer

Voraussetzungen

- $s \geq 0$,
- $-1 \leq \alpha \leq 0$,
- Annahme $[A]$ ist erfüllt für $\beta = \alpha$

Proposition: Lokaler Fehler

Sei $|||(y(\tau), \dot{y}(\tau)|||_s \leq M$ für $0 \leq \tau \leq h$, dann gilt

$$\left|\left|\left|(y(h), \dot{y}(h)) - (y^1, \dot{y}^1)\right|\right|\right|_{s-\alpha} \leq C_1 h^{2+\alpha}$$

Bausteine für Lady Windermeres Fächer

Voraussetzungen

- $s \geq 0$,
- $-1 \leq \alpha \leq 0$,
- Annahme $[A]$ ist erfüllt für $\beta = \alpha$

Proposition: Lokaler Fehler

Sei $|||(y(\tau), \dot{y}(\tau)|||_s \leq M$ für $0 \leq \tau \leq h$, dann gilt

$$\left|\left|\left|(y(h), \dot{y}(h)) - (y^1, \dot{y}^1)\right|\right|\right|_{s-\alpha} \leq C_1 h^{2+\alpha}$$

Proposition: Stabilität

Seien $|||y^0, \dot{y}^0|||_s \leq M$ und $|||(z^0, \dot{z}^0)|||_s \leq M$, dann gilt

$$\left|\left|\left|(y^1, \dot{y}^1) - (z^1, \dot{z}^1)\right|\right|\right|_{s-\alpha} \leq (1 + C_2 h)\left|\left|\left|(y^0, \dot{y}^0) - (z^0, \dot{z}^0)\right|\right|\right|_{s-\alpha}$$

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Sei $n > 0$ und $\mathcal{S}$ der trigonometrische Integrator

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Sei $n > 0$ und $\mathcal{S}$ der trigonometrische Integrator

$$|||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq \left|\left|\left|\mathcal{S}(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1}) - \mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1}))\right|\right|\right|_{s-\alpha}$$

$$+ |||\mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1})) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha}$$

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Sei $n > 0$ und $\mathcal{S}$ der trigonometrische Integrator

$$|||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq \underbrace{\left|\left|\left|\mathcal{S}(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1}) - \mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1}))\right|\right|\right|_{s-\alpha}}_{\text{Stabilität}}$$
$$+ \underbrace{|||\mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1})) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha}}_{\text{lokaler Fehler}}$$

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Sei $n > 0$ und $\mathcal{S}$ der trigonometrische Integrator

$$|||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq \underbrace{\left|\left|\left|\mathcal{S}(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1}) - \mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1}))\right|\right|\right|_{s-\alpha}}_{\text{Stabilität}}$$
$$+ \underbrace{|||\mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1})) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha}}_{\text{lokaler Fehler}}$$

Propositionen anwendbar, falls $\left|\left|\left|(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1})\right|\right|\right|_s \leq 2M$

Beweis Konvergenztheorem

Sei $h \leq h_0 = \frac{M}{c_1 T e^{C_2 T}}$

Zeige per Induktion : $\quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha}$

Sei $n > 0$ und $\mathcal{S}$ der trigonometrische Integrator

$$|||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq \underbrace{\left|\left|\left|\mathcal{S}(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1}) - \mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1}))\right|\right|\right|_{s-\alpha}}_{\text{Stabilität}}$$
$$+ \underbrace{|||\mathcal{S}(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1})) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha}}_{\text{lokaler Fehler}}$$

Propositionen anwendbar, falls $\left|\left|\left|(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1})\right|\right|\right|_s \leq 2M$

$-1 \leq \alpha \leq 0$:
$$\begin{aligned}\left|\left|\left|(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1})\right|\right|\right|_s &\leq \left|\left|\left|(y^{n-1}, \dot{y}^{n-1})\right|\right|\right|_{s-\alpha} \\ &\leq |||(y(t_{n-1}), \dot{y}(t_{n-1}))|||_{s-\alpha} + C_1 e^{C_2 nh} nh^{2+\alpha} \\ &\leq 2M.\end{aligned}$$

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Trick:

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Trick:

1. Beweise Theorem für $-1 \leq \alpha \leq 0$:

$$|||(y(t), \dot{y}(t))|||_s \leq M \quad \Rightarrow \quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Trick:

1. Beweise Theorem für $-1 \leq \alpha \leq 0$:

$$|||(y(t), \dot{y}(t))|||_s \leq M \quad \Rightarrow \quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

2. Für $\alpha = 0$ gilt also

$$|||(y^n, \dot{y}^n)|||_s \leq 2M$$

   Annahmen $[A]$ für $\beta = 0$ erfüllt $\Rightarrow$ numerische Lösung bleibt beschränkt für $0 \leq t \leq T$.

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Trick:

1. Beweise Theorem für $-1 \leq \alpha \leq 0$:

$$|||(y(t), \dot{y}(t))|||_s \leq M \quad \Rightarrow \quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

2. Für $\alpha = 0$ gilt also

$$|||(y^n, \dot{y}^n)|||_s \leq 2M$$

   Annahmen $[A]$ für $\beta = 0$ erfüllt $\Rightarrow$ numerische Lösung bleibt beschränkt für $0 \leq t \leq T$.

3. Beweise Theorem für $0 < \alpha \leq 1$ unter der Annahme $[A]$ für $\beta = \alpha$ und $\beta = 0$.

Beweis Konvergenztheorem

Frage: $0 < \alpha \leq 1$?

Trick:

1. Beweise Theorem für $-1 \leq \alpha \leq 0$:

$$|||(y(t), \dot{y}(t))|||_s \leq M \quad \Rightarrow \quad |||(y^n, \dot{y}^n) - (y(t_n), \dot{y}(t_n))|||_{s-\alpha} \leq Ch^{1+\alpha}$$

2. Für $\alpha = 0$ gilt also

$$|||(y^n, \dot{y}^n)|||_s \leq 2M$$

   Annahmen $[A]$ für $\beta = 0$ erfüllt $\Rightarrow$ numerische Lösung bleibt beschränkt für $0 \leq t \leq T$.

3. Beweise Theorem für $0 < \alpha \leq 1$ unter der Annahme $[A]$ für $\beta = \alpha$ und $\beta = 0$.

$\Rightarrow$ Beweis der Konvergenz für $-1 \leq \alpha \leq 1$

Zusammenfassung

Hier vorgestellt: Fehleranalyse

- gleichmäßig in der Ortsdiskretisierung
- unter Verwendung der speziellen Struktur der Nichtlinearität und der Sobolev Räume

Referenz: L. Gauckler, **Error analysis of trigonometric integrators for semilinear wave equations**, SIAM J. Numer. Anal. 53 (2015), 1082-1106.

Zusammenfassung

Hier vorgestellt: Fehleranalyse

- gleichmäßig in der Ortsdiskretisierung
- unter Verwendung der speziellen Struktur der Nichtlinearität und der Sobolev Räume

In dem Artikel:

- Erweiterung für allgemeinere nichtlineare Funktionen
- Erweiterung für finite Differenzen

Referenz: L. Gauckler, **Error analysis of trigonometric integrators for semilinear wave equations**, SIAM J. Numer. Anal. 53 (2015), 1082-1106.

Zusammenfassung

Hier vorgestellt: Fehleranalyse

- gleichmäßig in der Ortsdiskretisierung
- unter Verwendung der speziellen Struktur der Nichtlinearität und der Sobolev Räume

In dem Artikel:

- Erweiterung für allgemeinere nichtlineare Funktionen
- Erweiterung für finite Differenzen

Weitere Forschungsmöglichkeiten:

- quasilineare Wellengleichungen
- Erklärung für das bessere Verhalten der Deuflhardt Methode

Referenz: L. Gauckler, **Error analysis of trigonometric integrators for semilinear wave equations**, SIAM J. Numer. Anal. 53 (2015), 1082-1106.