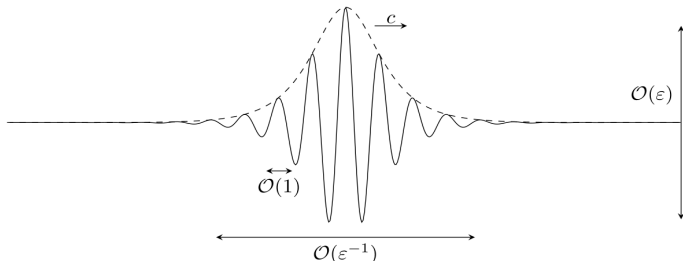


# Das Mehrskalenverfahren für Nichtlineare Klein-Gordon- und Schrödinger-Gleichungen

Patrick Krämer, 19. 02. 2014

Karlsruher Institut für Technologie



- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

- Anwendung des Mehrskalenverfahrens auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha \partial_x^2 u - \beta u + \lambda u^3, \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- erhalte eine Approximation an die exakte Lösung

$$\varepsilon \psi_{NLS} := \varepsilon A e^{j(kx - \omega t)} + \varepsilon A^* e^{-i(kx - \omega t)}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \sigma)$  erfüllt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\partial_\sigma A = i\nu_1 \partial_\xi^2 A + i\nu_2 |A|^2 A$$

- wie groß ist der Fehler dieser Approximation?

- Anwendung des Mehrskalenvierfahrens auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha \partial_x^2 u - \beta u + \lambda u^3, \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- erhalte eine Approximation an die exakte Lösung

$$\varepsilon \psi_{NLS} := \varepsilon A e^{i(kx - \omega t)} + \varepsilon A^* e^{-i(kx - \omega t)}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \sigma)$  erfüllt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\partial_\sigma A = iv_1 \partial_\xi^2 A + iv_2 |A|^2 A$$

- wie groß ist der Fehler dieser Approximation?

- Anwendung des Mehrskalenverfahrens auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha \partial_x^2 u - \beta u + \lambda u^3, \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- erhalte eine Approximation an die exakte Lösung

$$\varepsilon \psi_{NLS} := \varepsilon A e^{i(kx - \omega t)} + \varepsilon A^* e^{-i(kx - \omega t)}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \sigma)$  erfüllt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\partial_\sigma A = iv_1 \partial_\xi^2 A + iv_2 |A|^2 A$$

- wie groß ist der Fehler dieser Approximation?

- Anwendung des Mehrskalenverfahrens auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha \partial_x^2 u - \beta u + \lambda u^3, \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- erhalte eine Approximation an die exakte Lösung

$$\varepsilon \psi_{NLS} := \varepsilon A e^{i(kx - \omega t)} + \varepsilon A^* e^{-i(kx - \omega t)}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \sigma)$  erfüllt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\partial_\sigma A = i\nu_1 \partial_\xi^2 A + i\nu_2 |A|^2 A$$

- wie groß ist der Fehler dieser Approximation?

- Anwendung des Mehrskalenverfahrens auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \alpha \partial_x^2 u - \beta u + \lambda u^3, \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- erhalte eine Approximation an die exakte Lösung

$$\varepsilon \psi_{NLS} := \varepsilon A e^{i(kx - \omega t)} + \varepsilon A^* e^{-i(kx - \omega t)}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \sigma)$  erfüllt die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$\partial_\sigma A = i\nu_1 \partial_\xi^2 A + i\nu_2 |A|^2 A$$

- wie groß ist der Fehler dieser Approximation?



- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

## Was ist das Mehrskalenverfahren?

- Verfahren um den Einfluss von Nichtlinearitäten in Differentialgleichungen zu analysieren
- mehrere Skalen in Raum und Zeit
- Die Variablen  $x, t, X_j := \varepsilon^j x, \tau_k := \varepsilon^k t, j, k = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1$ , werden unabhängig voneinander behandelt
- entwickle die Lösung  $u(x, t)$  der gegebenen Differentialgleichung in eine Potenzreihe so, dass

$$u(x, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, X_1, X_2, \dots, t, \tau_1, \tau_2, \dots).$$

⇒ "Mehrskalenansatz"

Was ist das Mehrskalenverfahren?

- Verfahren um den Einfluss von Nichtlinearitäten in Differentialgleichungen zu analysieren
- mehrere Skalen in Raum und Zeit
- Die Variablen  $x, t, X_j := \varepsilon^j x, \tau_k := \varepsilon^k t, j, k = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1$ , werden unabhängig voneinander behandelt
- entwickle die Lösung  $u(x, t)$  der gegebenen Differentialgleichung in eine Potenzreihe so, dass

$$u(x, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, X_1, X_2, \dots, t, \tau_1, \tau_2, \dots).$$

⇒ "Mehrskalenansatz"

Was ist das Mehrskalenverfahren?

- Verfahren um den Einfluss von Nichtlinearitäten in Differentialgleichungen zu analysieren
- mehrere Skalen in Raum und Zeit
- Die Variablen  $x, t, X_j := \varepsilon^j x, \tau_k := \varepsilon^k t, j, k = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1$ , werden unabhängig voneinander behandelt
- entwickle die Lösung  $u(x, t)$  der gegebenen Differentialgleichung in eine Potenzreihe so, dass

$$u(x, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, X_1, X_2, \dots, t, \tau_1, \tau_2, \dots).$$

⇒ "Mehrskalenansatz"

Was ist das Mehrskalenverfahren?

- Verfahren um den Einfluss von Nichtlinearitäten in Differentialgleichungen zu analysieren
- mehrere Skalen in Raum und Zeit
- Die Variablen  $x, t, X_j := \varepsilon^j x, \tau_k := \varepsilon^k t, j, k = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1$ , werden unabhängig voneinander behandelt
- entwickle die Lösung  $u(x, t)$  der gegebenen Differentialgleichung in eine Potenzreihe so, dass

$$u(x, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, X_1, X_2, \dots, t, \tau_1, \tau_2, \dots).$$

⇒ "Mehrskalenansatz"

Was ist das Mehrskalenverfahren?

- Verfahren um den Einfluss von Nichtlinearitäten in Differentialgleichungen zu analysieren
- mehrere Skalen in Raum und Zeit
- Die Variablen  $x, t, X_j := \varepsilon^j x, \tau_k := \varepsilon^k t, j, k = 1, 2, \dots, 0 < \varepsilon < 1$ , werden unabhängig voneinander behandelt
- entwickle die Lösung  $u(x, t)$  der gegebenen Differentialgleichung in eine Potenzreihe so, dass

$$u(x, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, X_1, X_2, \dots, t, \tau_1, \tau_2, \dots).$$

⇒ "Mehrskalenansatz"

- setze diesen Ansatz für  $u$  in die gegebene Differentialgleichung ein
- vergleiche die Terme vor jeder Ordnung von  $\varepsilon$ 
  - ⇒ führt auf eine Folge partieller Differentialgleichungen für die  $U_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- vermeide in diesen DGL sekuläre Terme, d.h. Terme die zu unbeschränktes Wachstum der Lösung führen!

- setze diesen Ansatz für  $u$  in die gegebene Differentialgleichung ein
- vergleiche die Terme vor jeder Ordnung von  $\varepsilon$ 
  - ⇒ führt auf eine Folge partieller Differentialgleichungen für die  $U_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- vermeide in diesen DGL sekuläre Terme, d.h. Terme die zu unbeschränktes Wachstum der Lösung führen!



- setze diesen Ansatz für  $u$  in die gegebene Differentialgleichung ein
- vergleiche die Terme vor jeder Ordnung von  $\varepsilon$ 
  - ⇒ führt auf eine Folge partieller Differentialgleichungen für die  $U_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- vermeide in diesen DGL sekuläre Terme, d.h. Terme die zu unbeschränktes Wachstum der Lösung führen!

- setze diesen Ansatz für  $u$  in die gegebene Differentialgleichung ein
- vergleiche die Terme vor jeder Ordnung von  $\varepsilon$ 
  - ⇒ führt auf eine Folge partieller Differentialgleichungen für die  $U_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$
- vermeide in diesen DGL sekuläre Terme, d.h. Terme die zu unbeschränktes Wachstum der Lösung führen!

- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- betrachte die nichtlineare Klein-Gordon Gleichung für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$

$$\partial_t^2 u(x, t) = \alpha \partial_x^2 u(x, t) - \beta u(x, t) + \lambda u^3(x, t), \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = u_1$$

- Mehrskalenansatz mit Skalen  $t, \tau_1, \tau_2, x, X_1$  eingesetzt in die KG-Gleichung ergibt

$$\partial_t^2 U_0 - \alpha \partial_x^2 U_0 + \beta U_0 = 0$$

$$\partial_t^2 U_1 - \alpha \partial_x^2 U_1 + \beta U_1 = -2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial t} U_0 + 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial x} U_0$$

$$\partial_t^2 U_2 - \alpha \partial_x^2 U_2 + \beta U_2 = -2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial t} U_0 - \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} U_0 + \alpha \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} U_0 + \lambda U_0^3$$
$$-2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial t} U_1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial x} U_1$$

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- betrachte die nichtlineare Klein-Gordon Gleichung für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$

$$\partial_t^2 u(x, t) = \alpha \partial_x^2 u(x, t) - \beta u(x, t) + \lambda u^3(x, t), \quad \alpha, \beta \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = u_1$$

- Mehrskalenansatz mit Skalen  $t, \tau_1, \tau_2, x, X_1$  eingesetzt in die KG-Gleichung ergibt

$$\partial_t^2 U_0 - \alpha \partial_x^2 U_0 + \beta U_0 = 0$$

$$\partial_t^2 U_1 - \alpha \partial_x^2 U_1 + \beta U_1 = -2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial t} U_0 + 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial x} U_0$$

$$\partial_t^2 U_2 - \alpha \partial_x^2 U_2 + \beta U_2 = -2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_2 \partial t} U_0 - \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} U_0 + \alpha \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} U_0 + \lambda U_0^3$$
$$-2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial t} U_1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial x} U_1$$

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- Lösung für  $U_0$  von der Form

$$U_0 = A(X_1, \tau_1, \tau_2) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad \omega(k) = \sqrt{\alpha k^2 + \beta}$$

- rechte Seite der Gleichung für  $U_1$  enthält damit einen sekulären Term der Form

$$(\omega \partial_{\tau_1} A + \alpha k \partial_{X_1} A) e^{i(kx - \omega t)}$$

- fordere daher für  $A$ :

$$\partial_{\tau_1} A = -c \partial_{X_1} A, \quad c := \omega'(k) = \frac{\alpha k}{\omega}$$

⇒ setze

$$A = A(\xi, \tau_2), \quad \xi := X_1 - c\tau_1$$

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- Lösung für  $U_0$  von der Form

$$U_0 = A(X_1, \tau_1, \tau_2) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad \omega(k) = \sqrt{\alpha k^2 + \beta}$$

- rechte Seite der Gleichung für  $U_1$  enthält damit einen sekulären Term der Form

$$(\omega \partial_{\tau_1} A + \alpha k \partial_{X_1} A) e^{i(kx - \omega t)}$$

- fordere daher für  $A$ :

$$\partial_{\tau_1} A = -c \partial_{X_1} A, \quad c := \omega'(k) = \frac{\alpha k}{\omega}$$

⇒ setze

$$A = A(\tilde{\zeta}, \tau_2), \quad \tilde{\zeta} := X_1 - c\tau_1$$

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- Lösung für  $U_0$  von der Form

$$U_0 = A(X_1, \tau_1, \tau_2) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad \omega(k) = \sqrt{\alpha k^2 + \beta}$$

- rechte Seite der Gleichung für  $U_1$  enthält damit einen sekulären Term der Form

$$(\omega \partial_{\tau_1} A + \alpha k \partial_{X_1} A) e^{i(kx - \omega t)}$$

- fordere daher für  $A$ :

$$\partial_{\tau_1} A = -c \partial_{X_1} A, \quad c := \omega'(k) = \frac{\alpha k}{\omega}$$

⇒ setze

$$A = A(\tilde{\zeta}, \tau_2), \quad \tilde{\zeta} := X_1 - c\tau_1$$



# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- das Mehrskalenverfahren liefert “NLS Approximation”

$$\varepsilon\psi_{NLS}(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - ct), \varepsilon^2 t) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.}$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \tau_2)$  erfüllt nichtlineare Schrödinger Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_2} A &= iv_1 \partial_{\xi}^2 A + iv_2 |A|^2 A, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R} \\ A(\cdot, 0) &= A_0 \end{aligned}$$

# Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung

- das Mehrskalenverfahren liefert “NLS Approximation”

$$\varepsilon\psi_{NLS}(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - ct), \varepsilon^2 t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$$

- Amplitudenfunktion  $A(\xi, \tau_2)$  erfüllt nichtlineare Schrödinger Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_2} A &= i\nu_1 \partial_{\xi}^2 A + i\nu_2 |A|^2 A, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R} \\ A(\cdot, 0) &= A_0 \end{aligned}$$

Theorem (vgl. Theorem 3.1 in [KSM92])

Sei  $A = A(\xi, \sigma)$  eine Lösung der NLS Gleichung so, dass  $\partial_\xi^n \partial_\sigma^l A \in C([0, T_1], L^2(\mathbb{R}))$  mit  $n + l \leq 2$  und sei  $\tilde{u} := \varepsilon \psi_{NLS}$  die NLS Approximation von zuvor. Dann gibt es für jedes  $T_0 \leq T_1$  und jedes  $d > 0$  ein  $\varepsilon_0, C > 0$  so, dass für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  gilt:

Sei  $u = u(x, t)$  Lösung der nichtlinearen Klein-Gordon Gleichung so, dass

$$\| (u(0), \partial_t u(0)) - (\tilde{u}(0), \partial_t \tilde{u}(0)) \|_Y \leq d\varepsilon^{3/2},$$

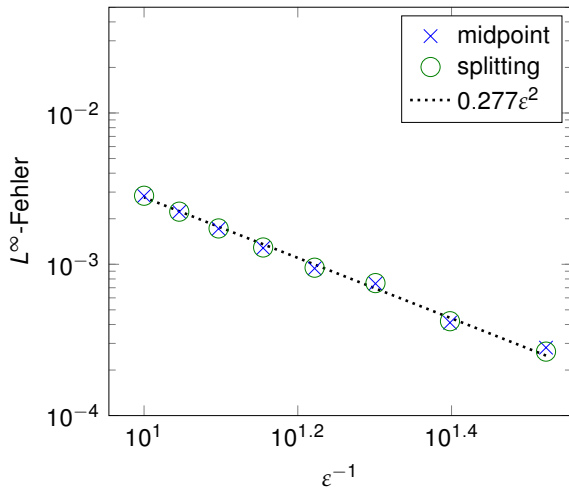
dann erfüllt  $\tilde{u}$  die Abschätzung

$$\| (u(t), \partial_t u(t)) - (\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t)) \|_Y \leq C\varepsilon^{3/2} \quad \forall t \in [0, T_0/\varepsilon^2].$$

Hierbei ist  $Y := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$  und  $\|(u, v)\|_Y := \left( \|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$ .

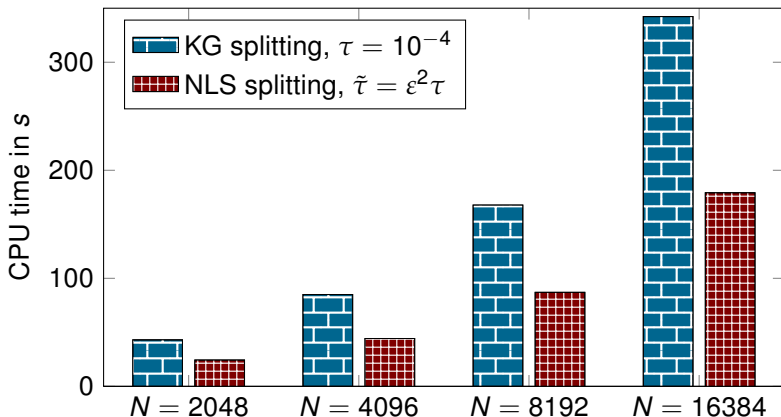
- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

## Fehler der NLS Approximation



# Rechenzeit im Vergleich

Comparison of CPU times,  $\varepsilon = 0.05$



- Einführung
- Das Mehrskalenverfahren
- Anwendung auf die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung
- Numerische Ergebnisse
- Splittingverfahren als Vergleichslösung

- betrachte

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z = \alpha \Delta z - \beta z + \lambda |z|^2 z,$$

$$z(\cdot, 0) = z_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} z(\cdot, 0) = w_0$$

- mit  $\langle \Delta \rangle := (\beta - \alpha \Delta)^{1/2}$  setze

$$u = z - i \langle \Delta \rangle^{-1} \partial_t z, \quad u(\cdot, 0) = z_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} w_0 = u_0$$

$$v = \bar{z} - i \langle \Delta \rangle^{-1} \overline{\partial_t z}, \quad v(\cdot, 0) = \bar{z}_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} \bar{w}_0 = v_0$$

- es gilt

$$z = \frac{1}{2} (u + \bar{v})$$



- betrachte

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z = \alpha \Delta z - \beta z + \lambda |z|^2 z,$$

$$z(\cdot, 0) = z_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} z(\cdot, 0) = w_0$$

- mit  $\langle \Delta \rangle := (\beta - \alpha \Delta)^{1/2}$  setze

$$u = z - i \langle \Delta \rangle^{-1} \partial_t z, \quad u(\cdot, 0) = z_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} w_0 = u_0$$

$$v = \bar{z} - i \langle \Delta \rangle^{-1} \overline{\partial_t z}, \quad v(\cdot, 0) = \bar{z}_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} \bar{w}_0 = v_0$$

- es gilt

$$z = \frac{1}{2} (u + \bar{v})$$

- betrachte

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z = \alpha \Delta z - \beta z + \lambda |z|^2 z,$$

$$z(\cdot, 0) = z_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} z(\cdot, 0) = w_0$$

- mit  $\langle \Delta \rangle := (\beta - \alpha \Delta)^{1/2}$  setze

$$u = z - i \langle \Delta \rangle^{-1} \partial_t z, \quad u(\cdot, 0) = z_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} w_0 = u_0$$

$$v = \bar{z} - i \langle \Delta \rangle^{-1} \overline{\partial_t z}, \quad v(\cdot, 0) = \bar{z}_0 - i \langle \Delta \rangle^{-1} \bar{w}_0 = v_0$$

- es gilt

$$z = \frac{1}{2} (u + \bar{v})$$

# Ein innovatives Splittingverfahren

- dies liefert System von PDEs für  $u$  und  $v$ :

$$i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}),$$

$$i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v),$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0$$

⇒ Problem in 2 Subprobleme aufteilen



$$(1) \begin{cases} i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u, \\ i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} i\partial_t u = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}), \\ i\partial_t v = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v), \end{cases}$$

- $\partial_t(u + \bar{v}) = 0$  in (2) ⇒ beide Subprobleme exakt lösbar
- verwende Strang-Splitting zur Zeitintegration

# Ein innovatives Splittingverfahren

- dies liefert System von PDEs für  $u$  und  $v$ :

$$i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}),$$

$$i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v),$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0$$

⇒ Problem in 2 Subprobleme aufteilen



$$(1) \begin{cases} i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u, \\ i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} i\partial_t u = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}), \\ i\partial_t v = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v), \end{cases}$$

- $\partial_t(u + \bar{v}) = 0$  in (2) ⇒ beide Subprobleme exakt lösbar
- verwende Strang-Splitting zur Zeitintegration

# Ein innovatives Splittingverfahren

- dies liefert System von PDEs für  $u$  und  $v$ :

$$i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}),$$

$$i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v),$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0$$

⇒ Problem in 2 Subprobleme aufteilen



$$(1) \begin{cases} i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u, \\ i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} i\partial_t u = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}), \\ i\partial_t v = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v), \end{cases}$$

- $\partial_t(u + \bar{v}) = 0$  in (2) ⇒ beide Subprobleme exakt lösbar

■ verwende Strang-Splitting zur Zeitintegration

# Ein innovatives Splittingverfahren

- dies liefert System von PDEs für  $u$  und  $v$ :

$$i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}),$$

$$i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v + \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v),$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0$$

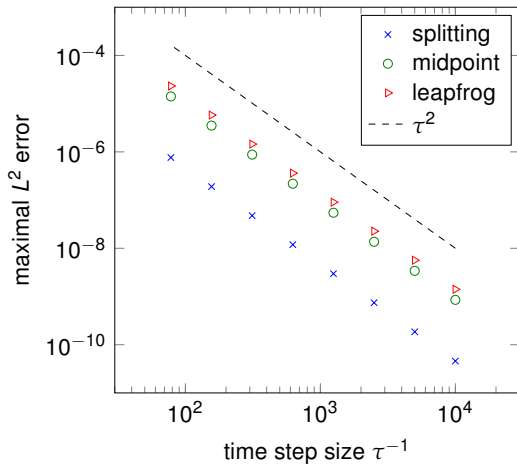
⇒ Problem in 2 Subprobleme aufteilen



$$(1) \begin{cases} i\partial_t u = -\langle \Delta \rangle u, \\ i\partial_t v = -\langle \Delta \rangle v, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} i\partial_t u = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |u + \bar{v}|^2 (u + \bar{v}), \\ i\partial_t v = \frac{\lambda}{8} \langle \Delta \rangle^{-1} |\bar{u} + v|^2 (\bar{u} + v), \end{cases}$$

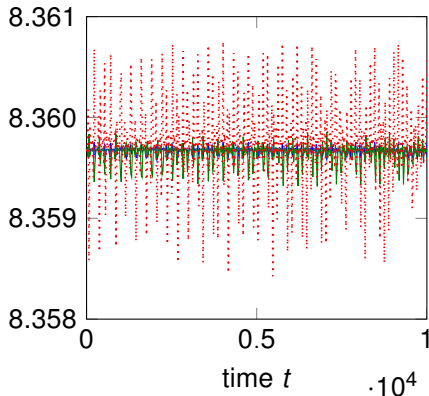
- $\partial_t(u + \bar{v}) = 0$  in (2) ⇒ beide Subprobleme exakt lösbar
- verwende Strang-Splitting zur Zeitintegration

Order plot

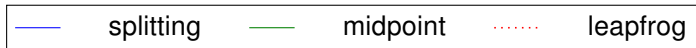
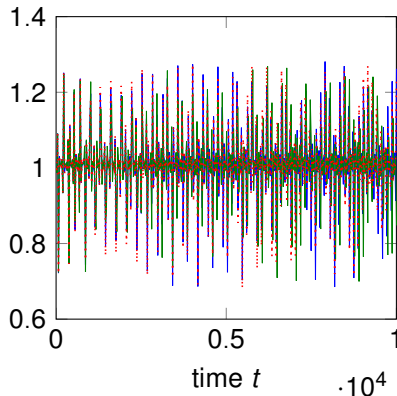


# $L^2$ Norm- und Energie Erhaltung

Energy  $\mathcal{E}(z, t)$ ,  $\tau = 0.05$



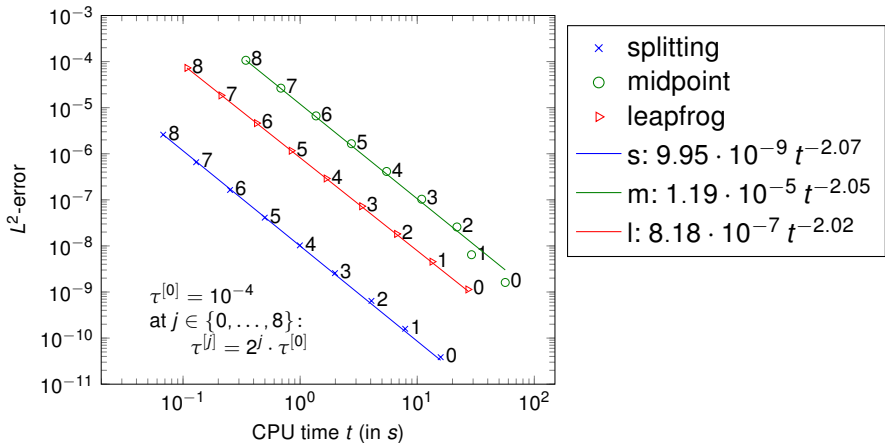
$L^2$  norm  $\|z(t)\|_{L^2}$ ,  $\tau = 0.05$





# Effizienz des Splittings

CPU time - error Plot



- [CS12] Christopher Chong and Guido Schneider, *Numerical evidence for the validity of the nls approximation in systems with a quasilinear quadratic nonlinearity*, University of Massachusetts Amherst, Universität Stuttgart, October 30 2012.
- [DLP<sup>+</sup>11] Willy Dörfler, Armin Lechleiter, Michael Plum, Guido Schneider, and Christian Wieners, *Photonic crystals: Mathematical analysis and numerical approximation*, Oberwolfach Seminars, vol. 42, 2011.
- [FS13] Erwan Faou and Katharina Schratz, *Asymptotic preserving schemes for the klein-gordon equation in the non-relativistic limit regime*, To appear in *Numerische Mathematik* (2013), no. To appear, 1–29 (English).
- [KSM92] Pius Kirrmann, Guido Schneider, and Alexander Mielke, *The validity of modulation equations for extended systems with cubic nonlinearities*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **122** (1992), no. 1-2, 85–91. MR 1190233 (93i:35132)

Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit!