

Konvergenzanalyse eines exponentiellen Integrators für nicht-autonome parabolische Evolutionsgleichungen

AG Numerik

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

David Hipp

Kooperation mit Marlis Hochbruck und Alexander Ostermann

Nicht-autonome parabolische Evolutionsgleichungen

X Banach Raum

Evolutionsgleichung

Finde $u : [0, T] \rightarrow X$

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0, \quad u(0) = u_0$$

Voraussetzungen: Parabolischer Fall

$A(t)$ sektoriell (glm. in t) mit konstantem Def.-Bereich $D(A(t)) = D$ und

$$\|(A(s) - A(t))A(0)^{-1}\| \leq C |t - s|$$

$$\|A^{-1}(0)(A(t) - A(s))\| \leq C |t - s|$$

Parabolisch, da $A(t)$ Erzeuger analytischer Halbgruppe $e^{-\tau A(t)}$

Zweite Näherung

Vereinfache

$$\tilde{u}_{n+1} = \left(e^{-\tau A_n} + \int_0^\tau e^{-(\tau-s)A(t_{n+1})} R_1(t_n + s, t_n) ds \right) \tilde{u}_n$$

mit p_n Interpolationspolynom von $s \mapsto R_1(t_n + s, t_n) \in \mathcal{L}(X)$ in $0, \tau/2$ und τ zu

$$u_{n+1} = \left(e^{-\tau A_n} + \int_0^\tau e^{-(\tau-s)A(t_{n+1})} p_n(s) ds \right) u_n$$

Exponentieller Integrator

$$u_{n+1} = T_n u_n$$

mit

$$\begin{aligned} T_n = & e^{-\tau A_n} + 4\tau \left(\varphi_2(-\tau A_{n+1}) - 2\varphi_3(-\tau A_{n+1}) \right) (A_n - A_{n+1/2}) e^{-\frac{\tau}{2} A_n} \\ & + \tau \left(4\varphi_3(-\tau A_{n+1}) - \varphi_2(-\tau A_{n+1}) \right) (A_n - A_{n+1}) e^{-\tau A_n} \end{aligned}$$

Hauptresultat

Fehlerabschätzung für $\hat{e}_n = \tilde{u}_n - u_n$

- Analog zu ersten Näherung
- IP-Fehler für $s \mapsto (A_n - A(t_n + s))e^{-sA_n}$
- Zusätzliche Voraussetzung

$t \mapsto A(t)A(0)^{-1}$ 4-mal diff'bar

$$\left\| A^{(k)}(t)A(0)^{-1} \right\| \leq C, \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

Theorem 3.6:

Unter den erwähnten Voraussetzungen und falls $u \in C^2([0, T]; X)$, dann

$$\|u(t_n) - u_n\| \leq C\tau^3(1 + |\log \tau|)^2 \left(\max_{t \in [0, T]} \|u'(t)\| + \max_{t \in [0, T]} \|u''(t)\| \right)$$

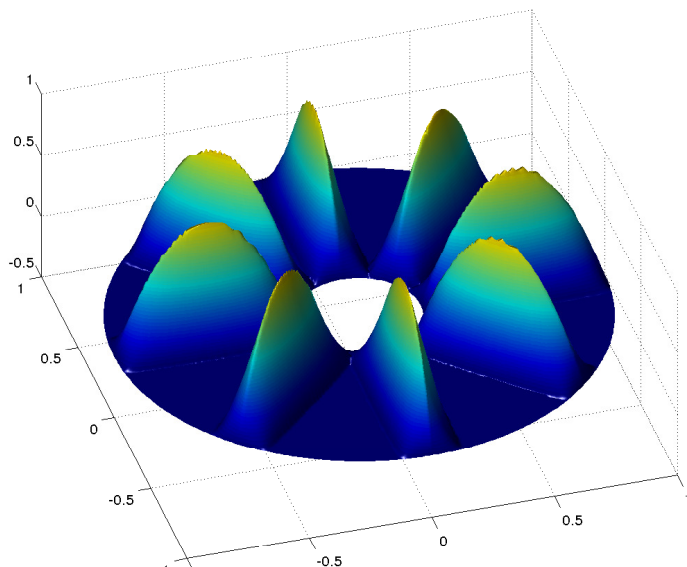
Numerisches Beispiel

Diffusionsgleichung auf sich verformenden
Gebieten:

“Der Donut”

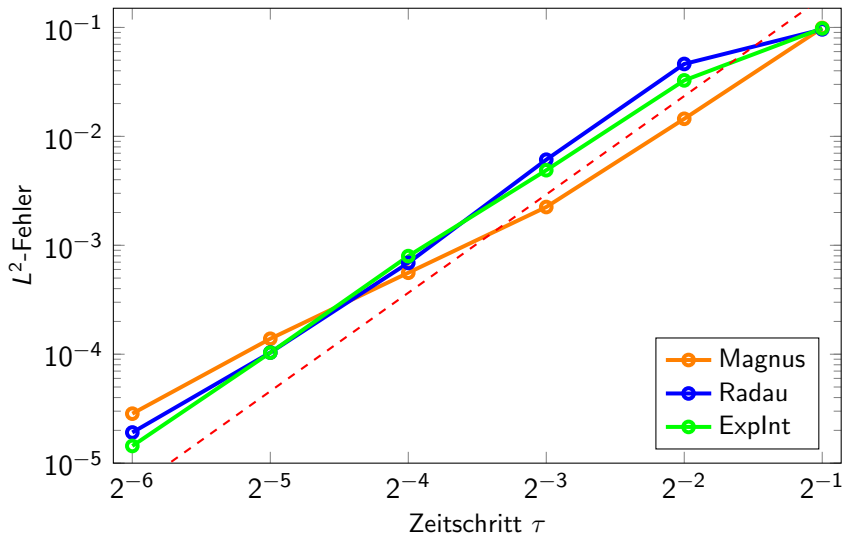
Transformation des Donuts

Anfangswert auf dem Donut



Lösung auf dem Donut

Numerische Konvergenz



Fehler unabhängig von räumlicher Diskretisierung

