Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Das CAS Maple als Werkzeug zur Modellierung und Visualisierung in Schule und Studium

Aspekte der Mathematik-Lehramtsausbildung am KIT

Tanja Göckler · Ingrid Lenhardt · Lena Martin · Markus Neher

Received: date / Accepted: date

Zusammenfassung In diesem Artikel stellen wir ausgewählte Beispiele aus dem Maple-Kurs für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) vor. Die Schwerpunkte liegen dabei sowohl auf der mathematischen Modellierung als auch der Visualisierung mathematischer Inhalte aus der Schul- und Hochschulmathematik mit Hilfe des Computer-Algebra-Systems Maple.

1 Maple in Schule und Hochschule - aktuelle Situation

Das Computer-Algebra-System (CAS) Maple ist an vielen allgemein bildenden Gymnasien in Baden-Württemberg weit verbreitet. Es stellt ein leistungsfähiges Werkzeug zum Lösen mathematischer Probleme dar und bietet vielseitige Visualisierungsmöglichkeiten. Gemäß den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz [13] eröffnet die Verwendung eines CAS im Mathematikunterricht neue Zugänge und Inhalte, aktiviert die Lernenden und fördert ihre Eigenaktivität. Im Rahmen einer Landeslizenz können die Schülerinnen und Schüler die Software kostenlos nicht nur auf Schulrechnern, sondern auch auf dem eigenen Computer zu Hause verwenden.

Maple ist auch ohne Maple-Kenntnisse seitens der Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erfolgreich einsetzbar. Die Lehrkräfte können beispielsweise Arbeitsblätter erstellen, welche lediglich durch Schaltflächen, Schieberegler und Eingabefelder bearbeitet werden können, die Eingabe von Maple-Befehlen ist dabei nicht notwendig. Der kostenlos verfügbare *Free Maple Player*[1]

T. Göckler, I. Lenhardt, L. Martin, M. Neher
Fakultät für Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT),
D-76128 Karlsruhe
E-Mail: tanja.goeckler@kit.edu, ingrid.lenhardt@kit.edu, lena.martin@kit.edu, markus.neher@kit.edu

[1] http://www.maplesoft.com/products/maple/Mapleplayer/

erlaubt die Nutzung dieser Dokumente auch ohne die entsprechende Maple-Software.

In die gymnasialen Lehramtsausbildung im Fach Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) ist Maple bereits seit vielen Jahren fest integriert. Bedingt durch unterschiedliche Prüfungsordnungen wurde der Einsatz von Maple im Studienverlauf bisher an unterschiedlichen Stellen angesiedelt:

Zunächst war Maple Bestandteil der Vorlesung *Numerische Mathematik für das Lehramt*. Im Rahmen eines wöchentlichen Computerpraktikums lernten die Studierenden grundlegende Befehle kennen und setzten die in der Vorlesung behandelten numerischen Verfahren in Maple um. Alternativ war es möglich, die Veranstaltung *Maple für Studierende des Lehramts und der Ingenieurwissenschaften* bereits zuvor zu besuchen und bei erfolgreicher Teilnahme die Studienleistung als Praktikum anrechnen zu lassen.

Seit dem Wintersemester 2013/2014 gibt es eine eigenständige Maple-Vorlesung mit dem Titel *Programmieren für Studierende des Lehramts / Computergestützte mathematische Methoden*, an der nicht nur Lehramtsstudierende im Fach Mathematik, sondern auch im Fach Naturwissenschaft und Technik teilnehmen. Die Veranstaltung ist für das dritte Semester empfohlen und findet damit zeitlich nach den Grundvorlesung *Analysis* und *Lineare Algebra* statt. Die Numerik- und Stochastik-Vorlesung für Lehramtsstudierende sind laut Studienplan im darauffolgenden vierten Semester vorgesehen. Im Zuge der Entkopplung von Maple-Kurs und Numerik-Vorlesung wurde die Verknüpfung von Schulmathematik und universitärer Mathematik stärker betont. Ein weiterer Schwerpunkt wurde auf die Visualisierung mathematischer Inhalte gelegt.

Auch an vielen anderen Hochschulen wird Maple in Vorlesungen mit Erfolg eingesetzt - meist als Visualisierungswerkzeug zur Unterstützung der Lehre und des Lernens (vgl. [17]).

Aufgrund eines Erlasses vom Kultusministerium Baden-Württemberg, dass in der Abiturprüfung ab 2017 nur noch wissenschaftliche Taschenrechner zugelassen sind, wird sich der Mathematikunterricht dahingehend ändern, dass deutlich weniger Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS zu erwarten ist. Dennoch ist Medieneinsatz im Mathematikunterricht ausdrücklich erwünscht. Diese neuen Gegebenheiten sind in der Lehramtsausbildung in Zukunft natürlich zu berücksichtigen. Den bisherigen Maple-Kurs wird es ab dem Wintersemester 2016/2017 nicht mehr geben, es ist jedoch mehr Computereinsatz in den einzelnen Fachvorlesungen geplant. Zudem soll eine neue Veranstaltung in der Fachdidaktik konzipiert werden, die Software-Einsatz im Mathematikunterricht zum Gegenstand hat. Neben CAS soll dort dynamische Geometrie-Software (DGS) ein Thema sein.

2 Zielsetzung

Es ist ein bekanntes und vieldiskutiertes Problem, dass Studierende die Mathematik in der Schule und in der Universität als zwei völlig unterschiedliche Welten empfinden und ihnen der Wechsel von der Schul- zur Hochschulmathematik große Schwierigkeiten bereitet (siehe z.B. [1], [2] und [6]). Den Übergang von der Schulmathematik zur universitären Mathematik am Studienbeginn und der spätere Wechsel zurück zur Schulmathematik nach Abschluss des Studiums im Referendariat erleben viele Lehramtsstudierenden als Bruchstellen. Unter dem Stichwort *Doppelte Diskontinuität* wurde dieses Phänomen bereits 1924 von Felix Klein in [10] beschrieben. Diese Schwierigkeit ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass sich der Mathematikunterricht im Gymnasium immer weniger an der Hochschule orientiert und die Studienanfängerinnen und -anfänger an der Universität nicht dort abgeholt werden, wo sie gerade stehen (vgl. [16]).

Diese Kluft führt häufig dazu, dass die Fachwissenschaft von den Studierenden nicht als Überbau der Schulmathematik erkannt wird und dadurch in fachdidaktischen Veranstaltungen zuvor erlerntes Fachwissen nicht abrufbar ist. Außerdem kann dies zur Folge haben, dass die Studierenden eine negative Einstellung zum Mathematikstudium entwickeln und sich schlecht auf ihren zukünftigen Beruf vorbereitet fühlen. Voraussetzung für einen guten Mathematikunterricht sind aber Lehrerinnen und Lehrer, die eine positive Beziehung zur Wissenschaft Mathematik besitzen und ihr Fach souverän vertreten (z.B. [3]). Letzteres ist nur durch eine solide fachliche Grundausbildung möglich, welche deutlich über die Schulmathematik hinausgeht. Die mit den Mathematiklehrkräften der PISA-Klassen 03/04 durchgeführte COACTIV-Studie bestätigte, dass Fachwissen und fachdidaktisches Wissen korrelieren und eine wesentliche Grundbedingung für eine gute Unterrichtsqualität sind (siehe [11]).

Ein Ziel unseres Maple-Kurses ist es daher, eine Brücke zwischen den getrennten Welten zu schlagen. Dazu werden sowohl mathematische Themen aus der Schule und den beiden Grundvorlesungen reaktiviert, als auch Inhalte nachfolgender Veranstaltungen - insbesondere der Numerik - vorbereitet und mit schulischen Fragestellungen und Aufgaben verknüpft. Auf diese Weise sollen die Studierenden Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ als Verbindung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik sammeln. Dies sehen Beutelspacher et al. ([3], S. 2) als Änderungsbedarf in der derzeitigen Mathematiklehrerbildung. Im Gegensatz zu den streng formalisierten, sehr abstrakten und theoretischen Inhalten der Grundvorlesungen in den ersten zwei Semestern steht in der Maple-Vorlesung sowohl rück- als auch vorausblickend auf die Schulmathematik ein vorstellungsorientierter Umgang mit der Analysis und Linearen Algebra im Vordergrund. Durch diese Einbettung der Schul- in die Hochschulmathematik soll bei den Studierenden ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass viele Studieninhalte - oft unerkannt - eine klare Relevanz für den späteren Schulunterricht aufweisen.

Gleichzeitig soll im Rahmen dieser Veranstaltung demonstriert werden, an welcher Stelle und auf welche Weise Maple oder ein ähnliches Werkzeug in der Schule sinnvoll eingesetzt werden kann. Die Integration eines CAS in den Unterricht stellt nach [4] einen potenziellen Mehrwert dar. Durch eine empirische Studie an Thüringer Schulen konnte 2014 in [14] belegt werden, dass Aufgaben, die unter Berücksichtigung von CAS entwickelt wurden, eine höhere

Qualität besitzen in Bezug auf Schülerzentrierung, Binnendifferenzierung und Diagnosepotential.

3 Ablauf und Organisation

Derzeitig findet der Maple-Kurs in Form einer Vorlesung im Umfang von zwei Semesterwochenstunden statt. Zudem müssen die Studierenden jede Woche ein Computerpraktikum besuchen, wobei die regelmäßige Teilnahme Zulassungsvoraussetzung für die Klausur am Ende des Semesters ist.

Bedingt durch die beschränkte Anzahl von ca. 30 verfügbaren Computerplätzen, findet die Vorlesung je nach Teilnehmerzahl entweder klassisch, d.h. hauptsächlich frontal und Lehrenden-zentriert, in einem Hörsaal oder Studierenden-zentriert mit aktiver Mitarbeit am Computer statt. Die meisten Veranstaltungen im Laufe des Semesters können im Poolraum durchgeführt werden, was bei den Studierenden stets auf positive Rückmeldungen stößt. Durch den Rechnereinsatz in der Vorlesung ist es möglich, aktivierende Elemente und Übungsphasen zu integrieren, in denen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer das gerade Gelernte in die Praxis umsetzen. Anschließend erfolgt die Ergebnisbesprechung im Plenum. Außerdem haben die Studierenden die Gelegenheit, die Maple-Befehle im Vorlesungs-Worksheet selbst auszuführen. So können sie dem Stoff direkt folgen und dadurch leichter nachvollziehen. Solche Lehrmethoden, welche Raum für Selbstaktivität schaffen und die eigenaktive Auseinandersetzung und Wissenskonstruktion nachhaltig unterstützen, werden aktuell zur Verbesserung der Mathematiklehrerausbildung gefordert (siehe [3]). Schließlich lernen die zukünftigen Lehrkräfte im Laufe ihres Studiums, dass beim schulischen Lernprozess die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler eine entscheidende Rolle spielt und daher sollen sie aktives Lernen auch selbst in der Vorlesung erfahren (vgl. [15]).

Benötigte fachwissenschaftliche Inhalte, die bereits in den Grundvorlesungen behandelt werden oder Gegenstand kommender Lehrveranstaltungen darstellen, werden in Kurzpräsentationen wiederholt bzw. vorgestellt. Dabei geht es nicht um eine ausführliche Erarbeitung der Themen, sondern vielmehr um ein überblickartiges Verständnis der wichtigsten Grundideen. Was die im Maple-Kurs angesprochenen Inhalte zukünftiger Vorlesungen betrifft, erhoffen wir uns, dass die genaue Theorie später besser und schneller verstanden wird, wenn die zugrundeliegenden Ideen zuvor anschaulich im Maple-Kurs visualisiert werden.

Betreut von studentischen Hilfskräften bearbeiten die Studierenden in den ergänzend zur Vorlesung stattfindenden Computerpraktika ein Arbeitsblatt zum aktuellen Vorlesungsstoff. Durch die kleine Gruppengröße von maximal 15 Personen pro Praktikum kann individuell auf Fragen und Probleme einzelner eingegangen werden. Den Studierenden ist es dabei selbst überlassen, die Aufgaben in Einzel- oder Teamarbeit zu lösen. Auffallend ist immer wieder die starke Interaktion der Praktikumsteilnehmerinnen und -teilnehmer: Verschiedene Lösungsansätze werden untereinander diskutiert, bei Fehlermeldungen oder anderen Problemen wird gegenseitig Hilfe geleistet. Nach Beutelspacher et al. [3] fördert eine solche kooperative Arbeitsform die Eigenaktivität der Studierenden, ein vertieftes Verständnis sowie einen konstruktiven Umgang mit Fehlern.

Sowohl die Folien der mathematischen Kurzpräsentationen als auch die Lösungen zu den Arbeitsblättern werden nach jeder Veranstaltung über das E-Learning-System ILIAS online zur Verfügung gestellt.

Eingesetzt wird jeweils die aktuelle Maple-Version, welche für alle Studierenden im KIT-Softwareshop kostenlos erhältlich ist. Seit Version 10 gibt es die Möglichkeit, entweder mit dem Document- oder dem Worksheet-Mode zu arbeiten. Der Document-Mode zeichnet sich dadurch aus, dass verschiedene Aktionen in Maple durch Rechtsklick und Auswahl aus dem sich öffnenden Kontextmenu durchgeführt werden. Der Worksheet-Mode hingegen ist sinnvoll, wenn man mehrere Befehle kombinieren, spezielle Optionen auswählen, Programmstrukturen einfügen oder Prozeduren erstellen möchte (vgl. [18]). Daher haben wir in der Veranstaltung bisher diesen Modus genutzt.

4 Inhalte der Maple-Vorlesung im Kurzüberblick

Wir stellen nun einen kurzen Überblick über die behandelten Inhalte im Wintersemester 2014/2015 vor. Anschließend gehen wir in Abschnitt 5 auf ein paar ausgewählte Beispiele aus der Vorlesung im Detail ein.

Einführung

– Vorstellung der Benutzoberfläche
– erste einfache Befehle, z.B. Definition von Funktionen, Summation, Differentiation, Integration, Lösen von Gleichungen
– kritischer Umgang mit Ergebnissen (beispielsweise liefert der Maple-Befehl `evalf(sum((-1)^k,k=0..infinity))` für den nicht existierenden Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$ das falsche Ergebnis 0.5)

Plots

– 2D-Plots von Punkten, Polygonzügen, explizit und implizit definierten Funktionen sowie komplexen Zahlen
– animierte Plots von Kurven in Parameterdarstellung und Polarform
– 3D-Plots von Rotationskörpern und Funktionen zweier Veränderlicher

Lineare Algebra

– Lösen von linearen Gleichungssystemen und Eigenwertaufgaben unter Verwendung des Pakets `LinearAlgebra`
– Visualisierung von linearen Gleichungssystemen und deren Lösungsmengen mit Hilfe des Pakets `Student[LinearAlgebra]`

Analytische Geometrie

– Bearbeitung schulrelevanter Aufgabenstellungen der Analytischen Geometrie mit Befehlen aus dem Paket `geom3d`

Listen, Mengen, Strings, Zahlendarstellungen

- Erarbeitung verschiedener Datentypen und Datenstrukturen
- Erstellung von Listen bzw. Mengen und Zugriff auf ihre Elemente
- Diskussion von Zeichenketten und einfacher Verschlüsselungen mittels monoalphabetischer Substitution
- Umwandlung von Dezimalzahlen in Binär-, Hexadezimal-, römische Zahlen und umgekehrt

Programmierstrukturen und Prozeduren

- Kennenlernen grundlegender Programmierstrukturen (for- und while-Schleifen, if-Abfragen) anhand einfacher Iterationsverfahren
- Implementierung von Algorithmen innerhalb einer Prozedur

Zufall

- Erzeugung von Pseudozufallszahlen
- Simulation von Zufallsexperimenten
- kleine Auswahl an Befehlen (zur Binomial- und Normalverteilung) aus dem sehr umfangreichen `Statistics`-Paket

Maplets

- Erstellung von interaktiven Benutzeroberflächen mit den Paketen `Maplets` und `Maplets[Elements]`

Interpolation und Approximation

- Berechnung und graphische Darstellung von Taylorpolynomen
- Polynom- und Splineinterpolation sowie Methode der kleinsten Quadrate mit Hilfe von Befehlen aus dem Paket `CurveFitting`

Differenzialgleichungen

- symbolisches und numerisches Lösen von Differenzialgleichungen
- Visualisierung von Richtungsfeldern und Lösungskurven
- Behandlung von Differenzialgleichungen zum linearen, exponentiellen, beschränkten und logistischem Wachstum in Bezug zum Schulunterricht

In fast allen Themengebieten messen wir der Visualisierung eine besondere Bedeutung zu, denn sie leistet einen wichtigen Beitrag für das Verständnis von abstrakten mathematischen Begriffen und Zusammenhängen. Maple stellt hier ein hervorragendes und äußerst flexibles Werkzeug dar, um solche Visualisierungen zu realisieren.

5 Ausgewählte Beispiele

In diesem Abschnitt werden vier ausgewählte Beispiele im Detail vorgestellt. Bei den dargestellten Plots ist zu beachten, dass nicht immer alle verwendeten Optionen (z.B. Beschriftungen, Schriftgrößen, Strichstärke etc.) im zugehörigen Maple-Code angegeben sind. Um die Darstellung übersichtlich zu halten, haben wir uns häufig auf die wichtigsten Angaben beschränkt.

5.1 Modellierung einer Achterbahn

Bei der mathematischen Modellierung werden Phänomene aus der realen Welt mit Hilfe von Mathematik beschrieben. Solche Fragestellungen sind in der Regel so komplex, dass bei der mathematischen Beschreibung zunächst eine Vereinfachung notwendig ist. Häufig kann man die zugehörigen mathematischen Probleme auch nur näherungsweise lösen.

Nach dem Bildungsplan 2004 zählt Modellieren zu einer zentralen mathematischen Kompetenz, welche die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erwerben sollen. Ein Ziel ist es, dass sie die Umwelt mit mathematischen Werkzeugen erschließen können. Gleichzeitig soll durch die Auseinandersetzung mit Anwendungsproblemen das Interesse an Mathematik gefördert bzw. verstärkt sowie ein tieferes Verständnis und längeres Behalten der mathematischen Inhalte erlangt werden (vgl. z.B. [5]). Dementsprechend ist die Modellierung in der Lehramtsausbildung auf jeden Fall zu berücksichtigen.

Die in Version 18 neu verfügbare Plot-Option `background` eröffnet die Möglichkeit, ein Bild als Hintergrund in einen Plot einzufügen. Auf einfache Weise kann dann z.B. der Verlauf eines Wasserstrahls, die Flugbahn beim Ballwurf oder der Bogen eines Bauwerks durch geeignete Ansatzfunktionen modelliert und das Ergebnis visualisiert werden. Als Beispiel betrachten wir eine Abbildung[2] der Achterbahn „Silver Star“ im Europapark in Rust bei Freiburg, welche wir mit dem Befehl `Read` aus dem Paket `ImageTools` einlesen und als Hintergrund in einem Plot verwenden.

```
Bild := ImageTools[Read]( "SilverStar.jpg" ):
p0 := plot( 0, background=Bild ):
display( p0, view=[0..125,0..70] );
```

Ausgabe: siehe Abbildung 1

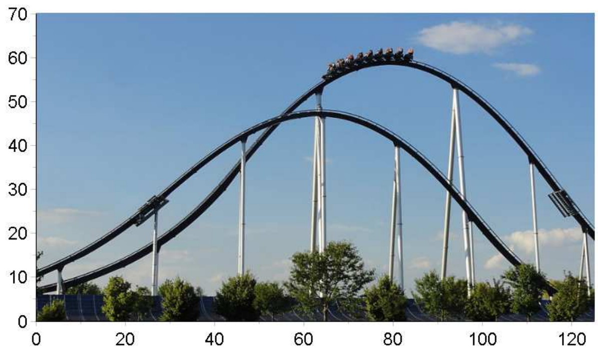


Abb. 1: Das Bild „Silver Star“ als Hintergrund in einem Plot.

Da das zu modellierende Bild nur als Hintergrund eingebunden werden kann, muss im Plot-Befehl stets ein Ausdruck eingegeben werden, der gezeich-

[2] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Europa-Park_-_Silver_Star_(36).JPG

net werden soll (auch wenn man sich eigentlich nur das Bild anschauen und noch keine Modellierungsfunktion darüber legen möchte). Am besten wählt man hier die Nullfunktion, da diese mit der x-Achse zusammenfällt und deshalb in der Ausgabe nicht zu sehen ist. Der xy-Bereich in `view` ist so anzupassen, dass er (näherungsweise) zur dargestellten Szenerie passt.

Aufgabe der Studierenden ist es, eine möglichst gute Approximation des vorderen Achterbahnstücks durch einfache Funktionen zu finden - in unserem Fall Interpolationspolynome bzw. kubische Splines, welche z.B. in [9] ausführlich diskutiert werden. Sind $n+1$ Stützpunkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ mit paarweise verschiedenen Stützwerten x_k gegeben, so ist das zugehörige Interpolationspolynom p definiert als eindeutiges Polynom vom Höchstgrad n, das die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$ löst. Bei der kubischen Splineinterpolation hingegen wird ein stückweises Polynom s dritten Grades durch die Stützpunkte verwendet, das sich aus verschiedenen Polynomen mit Maximalgrad drei auf jedem Teilstück $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$ zusammensetzt. Insgesamt ergeben sich n Polynome mit $4n$ gesuchten Koeffizienten. Für diese erhält man $4n-2$ Bedingungen, wenn man zweimal stetige Differenzierbarkeit von s fordert, wodurch man einen möglichst glatten Verlauf erzielt. Es sind also noch zwei weitere Forderungen zu stellen, für die es unterschiedliche Möglichkeiten gibt. Wird keine zusätzliche Option gewählt, wird in Maple standardmäßig der natürliche Spline berechnet. Dieser ist festgelegt durch die Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

Geeignete Stützpunkte können mittels Rechtsklick auf obigen Plot unter Verwendung der Option *Probe Info* ▷ *Cursor position* direkt aus dem Schaubild abgelesen werden. In unserem Fall haben wir zwei unterschiedliche Datensätze definiert, eine Punkteliste `xydata1` mit 7 Stützpunkten, welche ungefähr den oberen Enden der Achterbahnstützen entsprechen, und eine zweite Liste `xydata2` mit 13 Stützpunkten, wobei jeder zweite Punkt von `xydata2` mit einem Punkt aus `xydata1` identisch ist, siehe Abbildung 3. Durch Einbinden des Pakets `CurveFitting` können Interpolationspolynome und Splines ganz leicht mittels `PolynomialInterpolation` und `Spline` bestimmt werden, wobei als Parameter die zu interpolierende Punkteliste und die Variable, von der das berechnete Polynom abhängen soll, übergeben werden müssen.

```
pol1 := PolynomialInterpolation( xydata1, x ):
spl1 := Spline( xydata1, x ):
p1   := plot( [pol1,spl1], x=0..125, thickness=[7,3], color=[blue,red] ):
pp1  := pointplot( xydata1, symbol=soliddiamond, symbolsize=20,
                   color=orange ):
display( p0, p1, pp1 ):
```

Ausgabe: siehe Abbildung 2

Interpolationspolynom und kubischer Spline verlaufen wie gefordert durch die 7 vorgegebenen Stützpunkte, wobei das Kurvenstück zwischen dem ersten und dem letzten Interpolationspunkt recht gut approximiert wird.

Die Vermutung liegt nahe, dass mit mehr Stützstellen eine bessere Approximation zu erzielen ist. Daher interpolieren wir unter Einbeziehung der zweiten Liste `xydata2` zusätzlich an Zwischenstellen, siehe Abbildung 3. Im Vergleich

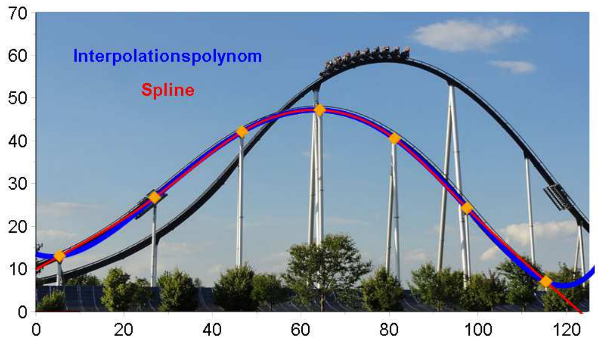


Abb. 2: Interpolationspolynom und Spline für 7 Stützpunkte.

zu Abbildung 2 nähert der Spline das Achterbahnteilstück nun tatsächlich besser an. Ganz anders sieht es aber für das Interpolationspolynom aus, es bricht in der Nähe der Intervallränder aus. Dieser Effekt ist in der Regel umso stärker ausgeprägt desto mehr Stützpunkte verwendet werden, da der Polynomgrad mit der Zahl der Interpolationsstellen wächst. Er ist bei der Splineinterpolation nicht festzustellen, weil in diesem Fall lediglich die Zahl der Polynome, jedoch nicht ihr Grad zunimmt. Eine ausführliche Diskussion dieser Beobachtung unter Einbeziehung exakter Fehlerschranken und eine bessere Wahl der Stützstellen erfolgt in der Vorlesung *Numerik für Studierende des Lehramts* im darauffolgenden Semester.

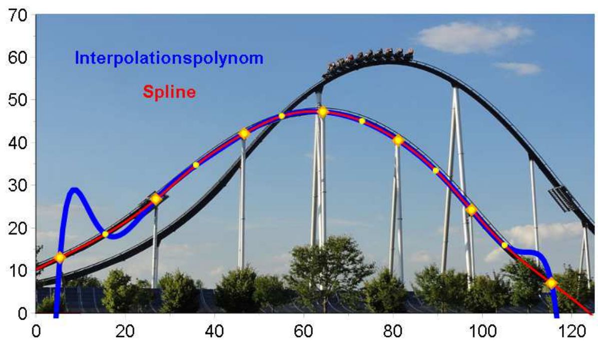


Abb. 3: Interpolationspolynom und Spline für 13 Stützpunkte.

5.2 Parameterstudien mit `Explore`

Parameterstudien sind ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts. Beispielsweise helfen sie Schülerinnen und Schülern ein Verständnis für die Parameter a, b und c in der quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$ zu entwickeln. Insbesondere interaktive PC-Anwendungen können an dieser Stelle gewinnbringend eingesetzt werden, damit mathematische Gesetzmäßigkeiten handlungsorientiert und eigenständig entdeckt werden können. Mittels Schieberegler kann z.B. erforscht werden, welche Auswirkung die Veränderung eines Parameters auf die Gestalt der Parabel hat.

Die Maple-Palette stellt in der Rubrik *Components* graphische Komponenten wie Schieberegler bereit, die in das Worksheet eingebettet werden können. Der Umgang mit diesen ist gerade für Neulinge relativ anspruchsvoll, da die gewünschten Aktionen in den Eigenschaften der jeweiligen Komponente programmiert werden müssen. Eine deutlich komfortablere Variante bietet der Befehl `Explore`. Er kann auf einen Maple-Ausdruck (z.B. Funktion oder Plot) mit einem oder mehreren Parametern angewandt werden. Als Ausgabe erhält man eine in das Worksheet eingebettete interaktive Umgebung, wobei die Schieberegler für die auftretenden Parameter automatisch erstellt werden.

Als Werkzeug zur mathematische Modellierung ist `Explore` in Verbindung mit Plots und gleichzeitiger Verwendung der Option `background` (vgl. Abschnitt 5.1) besonders praktisch. Die Parameter der gewählten Ansatzfunktion, welche die auf dem Hintergrundbild dargestellte Kurve modellieren soll, können mit dem Schieberegler solange angepasst werden, bis man den gewünschten Verlauf erzielt hat.

Wir modellieren hier einen schräg nach oben gerichteten Wasserstrahl eines Springbrunnens (siehe Abbildung 4), welcher sich unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes näherungsweise durch eine Wurfparabel beschreiben lässt (vgl. z.B. [12], S. 46). Durch Adaption der unterschiedlichen Schieberegler lassen sich passende Parameter für das gegebene Bild[3] eines annähernd parabelförmigen Wasserstrahls schnell ermitteln.

```
Explore( plot( -a*(x-b)^2+c, x=0..59, view=[0..59,-10..60],
               background=Bild ),
         parameters=[a=0.0..0.2, b=0.0..59.0, c=0.0..60.0] );
```

Ausgabe: siehe Abbildung 4

Werden für die Unter- bzw. Obergrenze des Intervalls, in dem der Parameter variieren soll, Dezimalzahlen angegeben, so lassen sich für den Parameter durch Verschieben des Reglers Gleitpunktzahlen wählen. Bei der Angabe ganzzahliger Intervallgrenzen hingegen nimmt der Parameter nur die entsprechenden Wert aus $\mathbb{Z}$ an.

5.3 Zufallswanderung

Das nächste Beispiel beschäftigt sich mit der Simulation eines Random Walks, auch Zufallsbewegung oder Irrfahrt genannt. Dabei handelt es sich um ein mathematisches Modell für den stochastischen Prozess einer Wanderung, bei der jeder einzelne Bewegungsschritt rein zufällig erfolgt. Es findet z.B. Einsatz beim Modellieren von Aktienkursen oder Teilchendiffusion in einem Medium.

[3] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4e/ParabolicWaterTrajectory.jpg

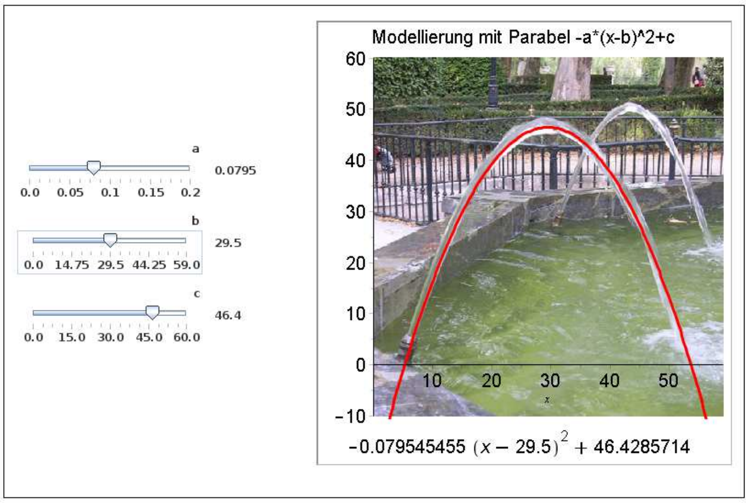
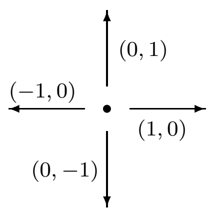


Abb. 4: Interaktive Umgebung zur Modellierung eines Wasserstrahls durch Parabeln.

Da die Vorlesung zum Thema Zufall in der Vorweihnachtszeit stattfand, haben wir die Zufallswanderung eines Weihnachtsmanns durch Mannheim studiert, wo das Straßennetz aus nahezu gleich großen Quadraten besteht. Immer wenn der Weihnachtsmann an eine Kreuzung gelangt, entscheidet er sich auf gut Glück für eine der vier Richtungen und läuft die ausgewählte Straße bis zur nächsten Kreuzung entlang. Auf diese Weise setzt der Zufallswanderer seine Route durch die Stadt fort (vgl. [7], S. 164).

Es sollen n Schritte dieser zweidimensionalen Zufallsbewegung in der xy-Ebene mit Hilfe einer geeigneten Prozedur simuliert werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle Straßen die Länge 1 besitzen, das Straßennetz räumlich nicht begrenzt ist und die Wanderung im Ursprung startet. Wir beginnen mit ein paar Vorüberlegungen: Zuerst wird eine Liste mit den vier möglichen Richtungen (Norden, Osten, Süden, Westen) benötigt.

```
Richtungen := [ [0,1], [1,0], [0,-1], [-1,0] ];
```



In jedem Schritt muss nun zufällig ein Listenelement ausgewählt werden. Dieses gibt an, welche Himmelsrichtung der Wanderer an der aktuellen Kreuzung einschlägt. Hier ist der Befehl `rand(a..b)` nützlich, der für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Prozedur liefert, durch deren Aufruf eine zufällige ganze Zahl im Intervall $[a, b]$ generiert wird. Weil diese Prozedur kein Argument besitzt, startet man den

Zufallszahlengenerator durch leere runde Klammern. Eine zufällige Richtung kann also modelliert werden durch

```
Richtungen[ rand(1..4)() ];
```

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe erhalten die Studierenden ein vorgefertigtes Prozedur-Gerüst mit Lücken, die unten grau dargestellt sind. Um die gesamte Irrfahrt bis zum n-ten Schritt verfolgen zu können, sollen alle Positionen in der Liste `Pos` gesammelt werden.

```
Zufallswanderer := proc( n )
local Richtung, x, y, Pos, dxy, i;
Richtungen := [ [0,1], [1,0], [0,-1], [-1,0] ];
x := 0:   y:= 0:   # Startpunkt im Ursprung
Pos := [x,y] :     # erstes Element der Folge von Positionen
for i from 2 to n do
    dxy := Richtung[ rand(1..4)() ]:   # neue zufällige Richtung
    x := x + dxy[1]:      # aktualisiere x-Koordinate
    y := y + dxy[2]:      # aktualisiere y-Koordinate
    Pos := Pos, [x,y];    # füge neue Position zu bisheriger Folge hinzu
end do:
return [ Pos ];   # Rückgabe der ermittelten Positionen als Liste
end proc:
```

Anhand dieses Beispiels können die Lehramtsstudierenden noch einmal fundamentale Vorgehensweisen bei der Erstellung von Prozeduren auffrischen und vertiefen. An dieser Stelle sollen gezielt das Überschreiben von Variablen zur Speicherplatzreduzierung und der sukzessive Aufbau von Folgen innerhalb einer Schleife wiederholt werden. Die benötigten Grundlagen werden in den drei vorherigen Veranstaltungen behandelt und sind zu diesem Zeitpunkt also schon bekannt. Dennoch fällt es nach unseren Erfahrungen vielen sehr schwer, selbst kurze und einfache Programmcodes zu schreiben. Wann möglich, werden daher zum wiederholten Üben kleine Programmieraufträge in den gegenwärtigen Vorlesungsstoff eingebaut.

Ein Aufruf der Prozedur `Zufallswanderer` mit zugehörigem Plot könnte für $n = 400$ dann z.B. wie folgt aussehen, wobei darauf zu achten ist, die Plot-Option `scaling=constrained` für eine unverzerrte Darstellung zu wählen.

```
plot( Zufallswanderer( 400 ), scaling=constrained );
```

Ausgabe: siehe Abbildung 5

Hieraus ergeben sich weiterführende Fragestellungen, die zum Teil in der Vorlesung diskutiert und zum Teil im Rahmen einer Übungsaufgabe im Praktikum selbstständig von den Studierenden erarbeitet werden können:

- Wie kann die Zufallswanderung schrittweise animiert werden?
- Gibt es eine einfache Möglichkeit, das Straßennetz mit einzuzeichnen?
- Wie kann eine räumliche Begrenzung des Straßennetzes berücksichtigt werden (z.B.Einschränkung auf maximal 10 Quadrate in horizontale und vertikale Richtung)?

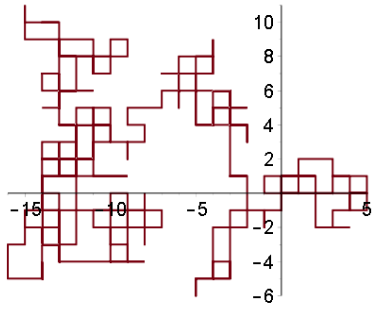
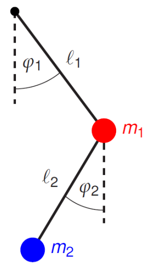


Abb. 5: Möglicher Random Walk für $n = 400$.

5.4 Doppelpendel



Das Doppelpendel gehört zu den populärsten Modellen von chaotischen Prozessen. Es besteht aus zwei Punktmassen mit Gewichten m_1 und m_2, die über zwei masselose Stangen der Länge ℓ_1 bzw. ℓ_2 verbunden sind. Die Auslenkungswinkel bezeichnen wir mit φ_1 und φ_2. Treffen wir die vereinfachte Annahme $m_1 = m_2 = \ell_1 = \ell_2 = 1$, so lauten die zugehörigen Bewegungsgleichungen (vgl. [19], S. 298)

$$\varphi_1''(t) + \frac{1}{2}\cos\big(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big)\varphi_2''(t) + g\sin\big(\varphi_1(t)\big) - \frac{1}{2}\sin\big(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_2'(t)\big)^2 = 0\,,$$

$$\varphi_2''(t) + \cos\big(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big)\varphi_1''(t) + g\sin\big(\varphi_2(t)\big) - \sin\big(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big)\big(\varphi_1'(t)\big)^2 = 0\,.$$

Sie stellen ein nichtlineares System von zwei Differenzialgleichungen dar. Die Anfangswerte seien $\varphi_1(0) = \pi$, $\varphi_2(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$. Da für die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels keine analytische Lösung existiert, muss das System numerisch gelöst werden. Dies ist mit dem Befehl `dsolve` zum Lösen gewöhnlicher Differenzialgleichung unter Verwendung der Option `numeric` möglich. Standardmethode in Maple zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen ist das Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren rkf45, das z.B. in [8] beschrieben ist.

```
Lsg := dsolve( [DglSys,AW], numeric, output=listprocedure );
```

$Lsg := \big[\, t = \mathbf{proc}(t)\ldots\mathbf{end\ proc}, \varphi1(t) = \mathbf{proc}(t)\ldots\mathbf{end\ proc}, \frac{d}{dt}\varphi1(t) = \mathbf{proc}(t)\ldots\mathbf{end\ proc}, \varphi2(t) = \mathbf{proc}(t)\ldots\mathbf{end\ proc}, \frac{d}{dt}\varphi2(t) = \mathbf{proc}(t)\ldots\mathbf{end\ proc}\,\big]$

Maple liefert als Ergebnis eine Liste mit Gleichungen der Form „Variable = Prozedur“ für die einzelnen Variablen t, $\varphi_1(t)$, $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2(t)$ und $\varphi_2'(t)$. Mit Hilfe dieser Prozeduren lassen sich Näherungswerte zu bestimmten Zeitpunkten bestimmen. Die für uns interessanten Näherungen für $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ stehen an den Listenplätzen zwei bzw. vier. Im Folgenden definieren wir uns daher die Prozeduren auf der rechten Seite der zweiten und vierten Gleichung in `Lsg` als $f_1(t)$ und $f_2(t)$, um anschließend darauf zugreifen zu können.

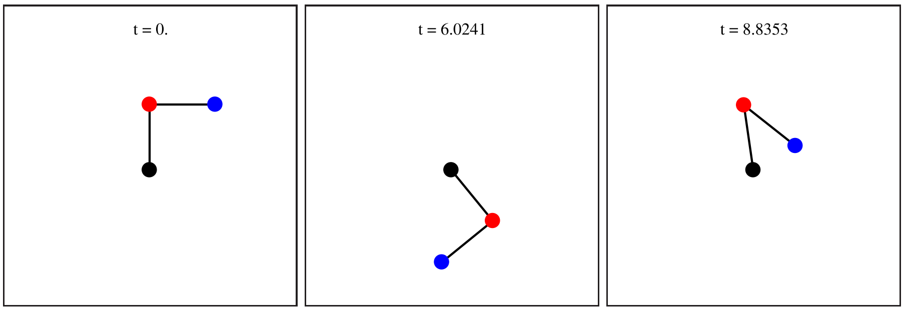


Abb. 6: Drei ausgewählte Einzelbilder aus der Maple-Animation des Doppelpendels.

```
f1 := rhs( Lsg[2] ):    f2 := rhs( Lsg[4] ):
```

Einfache geometrische Überlegungen zeigen, dass die Positionen der Punktmassen zur Zeit t gegeben sind durch $\big(x_1(t), y_1(t)\big) = \big(\sin(f_1(t)), -\cos(f_1(t))\big)$ und $\big(x_2(t), y_2(t)\big) = \big(x_1(t) + \sin(f_2(t)), y_1(t) - \cos(f_2(t))\big)$, wobei sich die Befestigung im Nullpunkt befindet. Wir erklären diese als Funktionen von t.

```
x1 := t -> sin(f1(t)):           y1 := t -> -cos(f1(t)):
x2 := t -> x1(t) + sin(f2(t)):   y2 := t -> y1(t) - cos(f2(t)):
```

Um das Doppelpendel nun visualisieren zu können, schreiben wir eine Prozedur, welche einen Plot der Pendelposition zurückliefert.

```
Pendel := proc(t)
local p1, p2;
p1 := plot( [[0,0],[x1(t),y1(t)],[x2(t),y2(t)]], thickness=3, color=black ):
p2 := pointplot( [[0,0],[x1(t),y1(t)],[x2(t),y2(t)]], symbol=solidcircle,
                 symbolsize=40, color=[black,red,blue] ):
display( p1, p2, scaling=constrained, axes=none ):
end proc:
```

Mit dieser Prozedur lässt sich nun auf einfache Weise eine Animation erstellen. Hier betrachten wir das Zeitintervall $t \in [0, 20]$ und erzeugen 250 Einzelbildern, die nacheinander abgespielt werden.

```
plots[animate]( Pendel, [t], t=0..20, frames=250 );
```

Bei anspruchsvolleren Animation, in denen z.B. mehrere Plots kombiniert werden, ist es im Allgemeinen immer sinnvoll, zuerst eine geeignete Prozedur zu definieren, welche ein Schaubild abhängig von dem zu animierenden Parameter zurückgibt. Die eigentliche Animation dieser Prozedur besteht dann lediglich aus einer kurzen Befehlszeile. Bei der direkten Animation der gewünschten Plot-Befehle hingegen kann der Code schnell kompliziert und unübersichtlich werden.

5.5 Fazit

Die vier Beispiele beleuchten, wie man in der Lehramtsausbildung mit dem Einsatz von Maple als Visualisierungs-Tool mehrere Ziele gleichzeitig erreichen kann. Es wird ein neuer, experimenteller Zugang zu den Studieninhalten geschaffen, eine Brücke zur Schulmathematik geschlagen sowie der Umgang mit einem Werkzeug erlernt und geübt, welches die Studierenden im weiteren Studium und später im eigenen Unterricht gewinnbringend einsetzen können.

Literatur

1. Bauer, T., Partheil, U.: Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Mathematische Semesterberichte 56, No. 1, 85-103 (2009)
2. Bauer, T.: Schulmathematik und universitäre Mathematik - Vernetzung durch inhaltliche Längsschnitte. In: Allmendinger, H., Lengnink, K., Vohns, A., Wickel, G. (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer Spektrum 2013
3. Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G.: Mathematik Neu Denken - Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg + Teubner 2011
4. Barzel, B.: Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert - aber wann? Münster: Waxmann 2012
5. Ferri, R. B., Greefrath, G., Kaiser, G. (Hrsg.): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule - Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer Spektrum 2013
6. Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G., Klymchuk, S.: Der Übergang von der Schulzur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht. Global Journal of Engineering Education, Vol. 8, No. 3, 283-293 (2004)
7. Häggström, O.: Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin Heidelberg: Springer 2006
8. Hairer, E., Nørsett, S. P., Wanner, G.: Solving ordinary differential equations I. Berlin Heidelberg: Springer 2008
9. Hanke-Bourgeois, M.: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens. Wiesbaden: Vieweg + Teubner 2009
10. Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt (Bd. 1). Berlin: Springer 1924
11. Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann 2011
12. Lindner, H.: Physik für Ingenieure. Leipzig: Vieweg 1991
13. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport des Landes Baden-Württemberg: Bildungsstandards für Computer-Algebra-Systeme. In: Bildungsplan 2004
14. Müller, M.: Zur Schülerzentrierung im Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen - eine empirische Untersuchung der CAS-Einführung an Thüringer Schulen mit Oberstufe. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena (2014)
15. Spannagel, C.: Das aktive Plenum in Mathematikvorlesungen. In: Berger, L., Grzega, J., Spannagel, C. (Hrsg.): Lernen durch Lehren im Fokus - Berichte von LdL-Einsteigern und LdL-Experten. epubli, 97-104 (2011)
16. Weber, H.: Mathematikunterricht und Hochschule: Wie hängen sie zusammen? Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Vol. 20, Issue 3, 181-185 (2012)
17. Westermann, T.: Ingenieurmathematik kompakt mit Maple. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg 2012
18. Westermann, T.: Mathematische Probleme Lösen mit Maple: Ein Kurzeinstieg (5. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Vieweg 2014
19. Zill, D.: A First Course in Differential Equations with Modeling Applications (9th ed.). Belmont: Brooks/Cole 2009