

Kurze Mitteilungen / Short Communications

Zur iterativen Einschließung von positiven Inversen

G. Alefeld, Berlin

Eingegangen am 28. Dezember 1976

Zusammenfassung — Abstract

Zur iterativen Einschließung von positiven Inversen. Es wird ein Verfahren zur Einschließung des positiven Inversen eines Elementes in einem Ring angegeben, welches bei gleichem Aufwand wie bei bekannten Verfahren der Konvergenzordnung 2 die Konvergenzordnung 3 besitzt.

On the Approximation of Positive Inverse Elements. In a partially ordered ring we give a method for the two-sided approximation of the inverse of an element which needs the same number of multiplications as known methods of convergence order two. The new method has the convergence order three.

1. Einleitung

Es sei R ein Ring mit Einselement 1, der durch einen Kegel K

$$(K \subset R, K + K \subset K, K^2 \subset K, K \cap (-K) = \{0\})$$

halbgeordnet ist. Es bezeichne

$$I = \{x \in R / \exists x^{-1} \in R \text{ mit } x x^{-1} = x^{-1} x = 1\}$$

die Menge der invertierbaren Elemente von R .

Wir betrachten die Aufgabe, für ein $a \in I$ das Element a^{-1} zu bestimmen. Dies ist identisch mit der Aufgabe, die Lösung der Operatorgleichung

$$F(x) \equiv a - x^{-1} = 0$$

zu bestimmen.

Die Berechnung von a^{-1} durch monotone Einschließung wurde in letzter Zeit — motiviert durch Verfahren der Intervallrechnung [1] — wiederholt betrachtet. Siehe dazu insbesondere Mönch [2] und Schmidt [4] sowie Schmidt-Nauber [5].

Im Falle, daß $a^{-1} \geq 0$ gilt, wurde in [2] ein Verfahren angegeben, welches mit 3 Multiplikationen pro Schritt 2 Folgen liefert, die a^{-1} von oben und unten einschließen und monoton mit der Konvergenzordnung 2 gegen a^{-1} konver-

und damit wegen $a^{-1} \geq 0$ die Ungleichung $x_2 \leq x_1$.

Allgemein folgt mit (5) und (2)

$$\begin{aligned} a x_{n+1} - 1 &= -(1 - a x_1)^{3^n} = (a x_1 - 1)^{3^n} \geq [(a x_1 - 1)^3]^{3^n} = \\ &= (a x_1 - 1)^{3^{n+1}} = -(1 - a x_1)^{3^{n+1}} = a x_{n+2} - 1, \end{aligned}$$

also wegen a^{-1} die Ungleichung $x_{n+1} \geq x_{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$

Analog ist nach (1) mit (5)

gieren. (Siehe [2], Formel (2) für $s=0$.) Wie in [2] näher ausgeführt, besitzt dieses Verfahren unter allen dort angegebenen Verfahren den maximalen Wirkungsgrad. In dieser Note soll unter der gleichen Voraussetzung $a^{-1} \geq 0$ auf ein Verfahren hingewiesen werden, welches mit 3 Multiplikationen pro Schritt zwei Folgen liefert, welche a^{-1} von oben und unten einschließen und unter geeigneten Bedingungen gegen a^{-1} konvergieren, die jedoch die Konvergenzordnung 3 besitzen.

Die Monotonie der Folgen wird nicht allgemein bewiesen. Wegen der hohen Konvergenzordnung ist das monotone Verhalten aber auch nicht als so wesentlich anzusehen.

2. Verfahren und Aussagen

Für ein $x_1 \in R$ betrachten wir das Verfahren

$$(V) \quad \begin{cases} y_n = x_n + x_n(1 - a x_n) \\ x_{n+1} = x_n + y_n(1 - a x_n) \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

Es erfordert 3 Multiplikationen pro Schritt. (V) entsteht durch Anwendung des in [3] betrachteten Verfahrens

$$\begin{cases} F(x_n) + \delta F(x_n, x_n)(y_n - x_n) = 0 \\ F(x_n) + \delta F(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \end{cases}$$

auf die Operatorgleichung

$$F(x) \equiv a - x^{-1} = 0.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man für (V)

$$\left. \begin{aligned} 1 - a y_n &= (1 - a x_1)^2 \cdot 3^{n-1} \\ 1 - a x_{n+1} &= (1 - a x_1)^{3^n} \end{aligned} \right\} \quad n=1, 2, \dots \quad (1)$$

(2)

Ist in R ein Norm definiert

$$(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \|x\| = \|-x\|, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \|xy\| \leq \|x\| \|y\|)$$

und wird über diese ein Konvergenzbegriff eingeführt

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0 \right),$$

so gilt wegen

$$\begin{aligned} a^{-1} - y_n &= a^{-1} (1 - a x_1)^2 \cdot 3^{n-1} \\ a^{-1} - x_{n+1} &= a^{-1} (1 - a x_1)^{3^n} \end{aligned}$$

die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^{-1}$$

falls $\|1 - a x_1\| < 1$ erfüllt ist.

$$1 - a y_{n+1} = (1 - a x_1)^{2 \cdot 3^n} = [(a x_1 - 1)^3]^{2 \cdot 3^{n-1}} \leq (a x_1 - 1)^{2 \cdot 3^{n-1}} = 1 - a y_n,$$

und somit $y_{n+1} \geq y_n$, $n = 1, 2, \dots$ ■

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, bemerken wir abschließend, daß sich das hier verwendete Prinzip auch zur Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung verwenden läßt. Diese Verfahren besitzen dann bei gleichem Aufwand jeweils eine um 1 höhere Konvergenzordnung als die in [2] angegebenen Verfahren. Darauf soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Literatur

- [1] Alefeld, G., Herzberger, J.: Einführung in die Intervallrechnung. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut 1974.
- [2] Mönch, W.: Monotone Einschließung von positiven Inversen. Z. Angew. Math. Mech. 53, 207—208 (1973).
- [3] Schmidt, J. W.: Eingrenzung von Lösungen nichtlinearer Gleichungen durch Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit. Computing 8, 208—215 (1971).
- [4] Schmidt, J. W.: Monotone Einschließung von Inversen positiver Elemente durch Verfahren vom Schulz-Typ. Computing 16, 211—219 (1976).
- [5] Schmidt, J. W., Nauber, W.: Über Verfahren zur zweiseitigen Approximation inverser Elemente. Computing 17, 59—67 (1976).

Professor Dr. G. Alefeld
Fachbereich 3 / Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12