Math. Z. 120, 309–317 (1971)

Zur Invertierung linearer und beschränkter Operatoren

GÖTZ ALEFELD und JÜRGEN HERZBERGER

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe den Inversen eines linearen und beschränkten Operators zu bestimmen, d.h. die Gleichung $AX=I$ zu lösen. Der hierbei eingeschlagene Weg verallgemeinert das zuerst für Matrizen von Schulz angegebene Vorgehen. Dieses liefert ausgehend von einer Näherung eine gegen den inversen Operator konvergierende Folge von Iterierten. Bei unserem Vorgehen werden Mengenfolgen konstruiert, welche den inversen Operator stets einschließen und gegen ihn konvergieren. Hierbei sind vor allem zwei Fragestellungen von Interesse:

1. Welche Forderungen muß man an eine gegebene Einschließungsmenge für A^{-1} stellen, damit die Konvergenz gesichert ist?
2. Wie „schnell" konvergiert das Verfahren gegen A^{-1}?

2. Hilfsmittel

Es sei $B \neq \{0\}$ ein reeller Banachraum und $L(B)$ die zugehörige Banachalgebra mit Einselement aller linearen beschränkten Abbildungen von B in B. Weiter sei K ein Kegel in $L(B)$, d.h., K sei eine abgeschlossene Teilmenge von $L(B)$ mit den Eigenschaften $K+K \subset K$, $\lambda K \subset K$ für $\lambda>0$ und $K \cap -K=\{O\}$. Die Elemente von $L(B)$ bezeichnen wir mit $S, T, \ldots$. Durch die Festlegung „$S \leqq T$ genau dann, wenn $T-S \in K$" wird in $L(B)$ eine mit der linearen Struktur verträgliche Halbordnung erklärt. Außerdem gelte für $S \leqq O$ und $T \geqq O$ die Beziehung $ST \leqq O$.

Die Intervalle $\mathfrak{T}=[T_1, T_2]$ aus $L(B)$ fassen wir zum Intervallraum $I(L(B))$ zusammen. Identifizieren wir die speziellen Intervalle $\mathfrak{T}=[T, T]$ mit den Elementen $T \in L(B)$, so gilt $L(B) \subset I(L(B))$. Durch $\rho(\mathfrak{T}, \mathfrak{S})=\max\{\|T_1-S_1\|, \|T_2-S_2\|\}$ wird $I(L(B))$ zu einem vollständigen metrischen Raum. Eine Folge $(\mathfrak{T}^{(n)})_{n=0}^{\infty}=([T_1^{(n)}, T_2^{(n)}])_{n=0}^{\infty}$ aus $I(L(B))$ ist somit gegen das Intervall $\mathfrak{T}=[T_1, T_2]$ konvergent, genau dann, wenn die Folgen der Schranken $(T_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ und $(T_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ gegen T_1 bzw. T_2 konvergieren.

Im weiteren sei nun $L(B)$ ein Rieszscher Banachraum, d.h., für $T \in L(B)$ existiert stets $\sup(T, O)$. In einem Rieszschen Raum existiert zu zwei Elementen stets das Supremum und das Infimum und man definiert daher für $T \in L(B)$: $|T|=\sup(T, -T)$. Mit $T^+=\sup(T, O)$, $T^-=\sup(-T, O)$ gilt $T=T^+-T^-$ und $|T|=T^++T^-$. Für den Betrag $|\cdot|$ gelten die üblichen Regeln wie z.B. $|S|=O$ genau dann, wenn $S=O$, $|\lambda S|=|\lambda| \cdot |S|$, $|S+T| \leqq |S|+|T|$, $|ST| \leqq |S| \cdot |T|$.

Wir betrachteten nun im Intervallraum $I(L(B))$ zwei spezielle Verknüpfungen zwischen Intervallen $\mathfrak{T}$ und Elementen T aus $L(B)$:

$$T \oplus \mathfrak{T} \in I(L(B)) \quad (\text{„Addition“}),$$

$$\mathfrak{T} \otimes T \in I(L(B)) \quad (\text{„Multiplikation“}).$$

Beide Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ mögen stetig sein und den folgenden Forderungen genügen:

a) $S, T \in L(B) \Rightarrow S \oplus T = S + T$, $S \otimes T = ST$ („Fortsetzungseigenschaft“).

b) $S + T \in S \oplus \mathfrak{T}$, $TS \in \mathfrak{T} \otimes S$ für $T \in \mathfrak{T}$ („schwache Teilmengeneigenschaft“).

Diese Forderungen stellen einen Zusammenhang her zwischen $\oplus$, $\otimes$ und den Verknüpfungen in $L(B)$. Eine einfache Realisierung solcher Verknüpfungen liefert das folgende

Beispiel 1. (I) Addition: $S \oplus \mathfrak{T} = S \oplus [T_1, T_2] = [S + T_1, S + T_2]$.

(II) Multiplikation:

$$q \geqq \tfrac{1}{2}, \qquad \mathfrak{T} \otimes S = [T_1, T_2] \otimes S$$
$$= [-q(T_2 - T_1)|S| + \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) S,\ q(T_2 - T_1)|S| + \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) S].$$

Der Nachweis der Forderungen a) und b) ist bei der Addition trivial. Ebenso der Nachweis von a) bei der Multiplikation. Die schwache Teilmengeneigenschaft für die Multiplikation sieht man folgendermaßen ein: Sei $T \in \mathfrak{T}$. Dann folgt unter Verwendung von $S = S^+ - S^-$ und $|S| = S^+ + S^-$ die Gleichung

$$q(T_2 - T_1)|S| + \tfrac{1}{2}(T_1 + T_2) S = (q + \tfrac{1}{2}) \cdot (T_2 - T) S^+ + (q + \tfrac{1}{2}) \cdot (T - T_1) S^- + (q - \tfrac{1}{2})$$
$$\cdot (T_2 - T) S^- + (q - \tfrac{1}{2}) \cdot (T - T_1) S^+ + TS.$$

Daraus folgt für $q \geqq \frac{1}{2}$ die Beziehung $TS \leqq q(T_2 - T_1)|S| + \frac{1}{2}(T_1 + T_2) S$. Ebenso folgt $TS \geqq -q(T_2 - T_1)|S| + \frac{1}{2}(T_1 + T_2) S$.

Die im Intervallraum $I(L(B))$ erklärte Abbildung

$$d\colon\ I(L(B)) \ni \mathfrak{T} = [T_1, T_2] \to d(\mathfrak{T}) = T_2 - T_1 \in L(B)$$

liefert zu jedem Intervall $\mathfrak{T}$ den „Durchmesser“ $d(\mathfrak{T})$. Wir betrachten im weiteren Verknüpfungen $\oplus$, $\otimes$ in $I(L(B))$, welche bezüglich der Abbildung d folgende Eigenschaften besitzen:

c) $d(S \oplus \mathfrak{T}) = d(\mathfrak{T})$ („Translationsinvarianz“),

$d(\mathfrak{T} \otimes S) \leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{T}) \cdot |S|$ („schwache Homogenität“).

Dabei ist notwendig $\alpha \geqq 1$.

Bemerkung 1. Im angeführten Beispiel ist die Translationsinvarianz offensichtlich erfüllt. Die schwache Homogenität gilt mit $\alpha = 2 \cdot q$ und es steht das Gleichheitszeichen.

Neben d betrachten wir eine weitere Abbildung

$$\omega\colon\; I(L(B))\ni\mathfrak{X}\to\omega(\mathfrak{X})\in L(B)$$

an welche folgende Forderungen gestellt werden:

1. $\omega(\mathfrak{X})\in\mathfrak{X}$.
2. $\omega(S\oplus\mathfrak{X})=S+\omega(\mathfrak{X})$.
3. $\omega(\mathfrak{X}\otimes S)=\omega(\mathfrak{X})\cdot S$ für $\mathfrak{X}\in I(L(B))$, $S\in L(B)$.

Aus 1. folgt insbesondere, daß die Einschränkung $\omega\,|\,L(B)$ gleich der identischen Abbildung ist.

Bemerkung 2. Wählt man im angeführten Beispiel $\omega(\mathfrak{X})=\frac{1}{2}(T_1+T_2)$, so ist unmittelbar einzusehen, daß die geforderten Eigenschaften 1. – 3. erfüllt sind.

3. Verfahren

Wir betrachten nun die Aufgabe, zu einem nichtsingulären linearen und beschränkten Operator A eine Folge von Intervallen $\mathfrak{X}_n$ $(n\geqq 0)$ so zu konstruieren, daß zunächst $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{X}_n=A^{-1}$ gilt. Darüber hinaus ist erwünscht, daß $A^{-1}\in\mathfrak{X}_n$ für alle n gilt, d.h., die Folge der Intervalle $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ soll eine gegen A^{-1} konvergente Folge von einschließenden Intervallen sein. Bei einem derartigen Iterationsverfahren wird also der inverse Operator in jedem Schritt in Schranken eingeschlossen. Zunächst zitieren wir einige Definitionen.

Definition. 1. Der Kegel K heißt *normal*, wenn ein $\delta>0$ existiert, so daß für $K_1, K_2\in K$ mit $\|K_1\|=\|K_2\|=1$ gilt: $\|K_1+K_2\|>\delta$.

2. Eine Norm $\|\cdot\|$ in $L(B)$ heißt semimonoton, wenn für beliebige Elemente $K_1, K_2\in K$ und $K_1\leqq K_2$ gilt: $\|K_1\|\leqq\beta\cdot\|K_2\|$. Ist $\beta=1$, so heißt die Norm monoton.

Bekanntlich ist der Kegel genau dann normal, wenn die Norm $\|\cdot\|$ semimonoton ist. (Siehe [3], S. 24.)

Wir geben nun einen Satz an, der ein Iterationsverfahren der oben beschriebenen Art liefert und Aussagen über das Konvergenzverhalten macht.

Satz 1. *In der durch einen normalen Kegel K geordneten Rieszschen Banachalgebra L(B) der linearen und beschränkten Abbildungen sei ein nichtsinguläres Element A gegeben. Außerdem sei ein Intervall* $\mathfrak{X}_0$ *aus* $I(L(B))$ *mit* $A^{-1}\in\mathfrak{X}_0$ *bekannt. Dann gelten für die Iterationsvorschrift*

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{n+1}=\omega(\mathfrak{X}_n)\cdot\{I+(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_n))+\cdots+(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_n))^{k-2}\}\\ \oplus\{\mathfrak{X}_n\otimes(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}\},\qquad k>1,\end{aligned}\tag{I}$$

die folgenden Aussagen:

(1) *Für alle n gilt:* $A^{-1}\in\mathfrak{X}_n$.

(2) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{X}_n=A^{-1}$ *genau dann, wenn* $\lim\limits_{n\to\infty}(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_0))^n=O$ *gilt.*

(3) *Für die Folge der Durchmesser* $(d(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ *gilt:*

$$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\| \leqq \gamma \cdot \|d(\mathfrak{X}_n)\|^k, \qquad \gamma > 0.$$

Beweis. Zu (1). Für ein beliebiges Element $\omega(\mathfrak{X}_n) \in L(B)$ zeigt man leicht die Beziehung

$$\begin{aligned}\omega(\mathfrak{X}_n) \cdot \{I + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n)) + \cdots + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-2}\}\\ = A^{-1} - A^{-1}(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $A^{-1} \in \mathfrak{X}_0$. Ist nun $A^{-1} \in \mathfrak{X}_n$, so folgt mit Hilfe der obigen Gleichung und aufgrund der schwachen Teilmengeneigenschaft b) der Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$:

$$\begin{aligned}A^{-1} = \omega(\mathfrak{X}_n)\{I + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n)) + \cdots + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-2}\}\\ + A^{-1}(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1} \in \omega(\mathfrak{X}_n)\\ \cdot \{I + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n)) + \cdots + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-2}\}\\ \oplus \{\mathfrak{X}_n \otimes (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}\} = \mathfrak{X}_{n+1}.\end{aligned}$$

Zu (2). Unter Verwendung der Eigenschaften 1. bis 3. der Abbildung ω erhält man aus der Vorschrift (I):

$$\omega(\mathfrak{X}_{n+1}) = \omega(\mathfrak{X}_n) \cdot \{I + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n)) + \cdots + (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}\}. \qquad \text{(I*)}$$

Diese Iterationsvorschrift für $\omega(\mathfrak{X}_n)$ konvergiert genau dann gegen A^{-1}, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} (I - A\,\omega(\mathfrak{X}_0))^n = O$ gilt. Mit Hilfe der Translationsinvarianz und der schwachen Homogenität der Abbildung d folgt aus (I):

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{X}_{n+1}) &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}|\\ &\leqq d(\mathfrak{X}_0) \cdot \{\alpha |(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_0))^{k-1}|\} \cdots \{\alpha |(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_0))^{(k-1)2^n}|\}.\end{aligned}$$

Setzen wir nun die Konvergenz von (I*) voraus, so folgt wegen der Semimonotonie der Norm $\|\cdot\|$ aus der letzten Ungleichung unmittelbar $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{X}_n) = O$. Wir zeigen nun, daß die Folgen der Intervallschranken von $\mathfrak{X}_n = [X_1^{(n)}, X_2^{(n)}]$ jeweils gegen A^{-1} konvergieren. Wie im ersten Teil dieses Satzes bewiesen wurde, gilt $X_1^{(n)} \leqq A^{-1} \leqq X_2^{(n)}$ für alle n, woraus dann $X_2^{(n)} - A^{-1} \leqq X_2^{(n)} - X_1^{(n)}$ folgt. Damit erhalten wir dann wiederum wegen der Semimonotonie der Norm $\|\cdot\|$ die Beziehung $\|X_2^{(n)} - A^{-1}\| \leqq \beta \cdot \|X_2^{(n)} - X_1^{(n)}\| = \beta \cdot \|d(\mathfrak{X}_n)\|$, aus welcher dann wegen $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathfrak{X}_n) = O$ schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} X_2^{(n)} = A^{-1}$ folgt. Entsprechend zeigt man $\lim\limits_{n\to\infty} X_1^{(n)} = A^{-1}$, womit dann $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{X}_n = A^{-1}$ folgt.

Konvergiert nun andererseits die Folge der Intervalle $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen A^{-1}, was äquivalent ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} X_1^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} X_2^{(n)} = A^{-1}$, so folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty} (I - A \cdot$

$\omega(\mathfrak{X}_0))^n = O$. Denn wegen der Eigenschaft 1. der Abbildung ω gilt stets $X_1^{(n)} \leqq \omega(\mathfrak{X}_n) \leqq X_2^{(n)}$. Damit erhält man $\omega(\mathfrak{X}_n) - X_1^{(n)} \leqq X_2^{(n)} - X_1^{(n)}$. Wegen der Semimonotonie der Norm $\|\cdot\|$ folgt:

$$\begin{aligned}\|\omega(\mathfrak{X}_n) - X_1^{(n)}\| &\leqq \beta \cdot \|X_2^{(n)} - X_1^{(n)}\| \\ &\leqq \beta \cdot \|X_2^{(n)} - A^{-1}\| + \beta \cdot \|X_1^{(n)} - A^{-1}\|.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung

$$\|\omega(\mathfrak{X}_n) - A^{-1}\| - \|A^{-1} - X_1^{(n)}\| \leqq \|\omega(\mathfrak{X}_n) - X_1^{(n)}\|$$

ergibt sich daraus die Beziehung

$$\|\omega(\mathfrak{X}_n) - A^{-1}\| \leqq (\beta + 1) \cdot \|X_1^{(n)} - A^{-1}\| + \beta \cdot \|X_2^{(n)} - A^{-1}\|.$$

Hieraus folgt aber $\lim_{n\to\infty} \omega(\mathfrak{X}_n) = A^{-1}$, was wegen (I*) äquivalent ist mit $\lim_{n\to\infty} (I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_0))^n = O$.

Zu (3). Es gilt

$$\begin{aligned}d(\mathfrak{X}_{n+1}) &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}| \\ &= \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot |(AA^{-1} - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}| \\ &= \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot |\{A(A^{-1} - \omega(\mathfrak{X}_n))\}^{k-1}| \\ &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot \{|A| \cdot |A^{-1} - \omega(\mathfrak{X}_n)|\}^{k-1} \\ &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot (|A| \cdot |A^{-1} - X_1^{(n)} + X_1^{(n)} - \omega(\mathfrak{X}_n)|)^{k-1} \\ &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot \{|A| \cdot (|A^{-1} - X_1^{(n)}| + |X_1^{(n)} - \omega(\mathfrak{X}_n)|)\}^{k-1} \\ &\leqq \alpha \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot \{|A| \cdot 2\, d(\mathfrak{X}_n)\}^{k-1} \\ &= \alpha \cdot 2^{k-1} \cdot d(\mathfrak{X}_n) \cdot \{|A| \cdot d(\mathfrak{X}_n)\}^{k-1}.\end{aligned}$$

Wegen der Semimonotonie der Norm $\|\cdot\|$ folgt daraus

$$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\| \leqq \gamma \cdot \|d(\mathfrak{X}_n)\|^k$$

mit

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \cdot 2^{k-1} \cdot \||A|\|^{k-1}.$$

Zusatz. Wird das Iterationsverfahren (I) mit einem $\mathfrak{X}_0 \in I(L(B))$ gestartet, für welches $A^{-1} \notin \mathfrak{X}_0$ ist, so gilt die Aussage (2) von Satz 1.

Der Beweis der Notwendigkeit der Konvergenzbedingung ergibt sich wie oben während beim Nachweis der Hinlänglichkeit eine Modifikation beim Beweis von $\lim_{n\to\infty} X_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} X_2^{(n)} = A^{-1}$ zum Ziele führt.

Bei einem derartigen Vorgehen gilt jedoch im allgemeinen nicht mehr $A^{-1} \in \mathfrak{X}_n$ für alle n, d.h., die Iterationsfolge ist allgemein keine Folge von Einschließungsintervallen mehr.

Bekanntlich ist z. B. das Erfülltsein von $\|I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_0)\|<1$ eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Verfahrens (I). Bemerkenswert ist, daß die Konvergenzkriterien des Verfahrens (I) angewendet auf unser Beispiel 1 unabhängig von q, d.h. unabhängig von der gewählten Verknüpfung $\otimes$, ist.

Wir kehren nun zur eingangs erwähnten Aufgabenstellung zurück. In dem Verfahren (I) von Satz 1 wurde gezeigt, daß mit $A^{-1}\in\mathfrak{X}_n$ auch $A^{-1}\in\mathfrak{X}_{n+1}$ gilt. Es liegt nun nahe, den „Durchschnitt" von $\mathfrak{X}_n$ und $\mathfrak{X}_{n+1}$ zu bilden, welcher somit auch A^{-1} enthält, und mit dem eventuell „engeren" Intervall die Iteration fortzusetzen.

Definition. Der durch den Kegel K geordnete Raum $L(B)$ sei ein Rieszscher Raum. Dann verstehen wir unter dem *Durchschnitt* zweier Elemente $\mathfrak{S},\mathfrak{T}\in I(L(B))$ das Intervall

$$\mathfrak{S}\cap\mathfrak{T}:=[\sup(T_1,S_1),\inf(T_2,S_2)],$$

falls $\sup(T_1,S_1)\leqq\inf(T_2,S_2)$. Andernfalls haben $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ leeren Durchschnitt.

Der Kegel K in $L(B)$ heißt *regulär*, wenn jede (in der Ordnung) beschränkte und monoton wachsende Folge einen Grenzwert besitzt.

Bemerkung 3. Jeder reguläre Kegel ist ein normaler Kegel ([3], S. 37). Dagegen ist nicht jeder in einem Rieszschen Raum die Ordnung erzeugende Kegel K normal.

Satz 2. *In der durch einen regulären Kegel geordneten Rieszschen Banach-Algebra $L(B)$ sei ein nichtsinguläres Element A gegeben. Für das Intervall $\mathfrak{X}_0\in I(L(B))$ gelte $A^{-1}\in\mathfrak{X}_0$. Dann gelten für das Iterationsverfahren*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_{n+1}&:=\omega(\mathfrak{X}_n)\{I+(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_n))+\cdots+(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}_n))^{k-2}\}\\&\qquad\oplus\{\mathfrak{X}_n\otimes(I-A\,\omega(\mathfrak{X}_n))^{k-1}\}\\\mathfrak{X}_{n+1}&:=\mathfrak{Y}_{n+1}\cap\mathfrak{X}_n,\qquad k>1,\end{aligned}\tag{II}$$

die folgenden Aussagen:

(1) *Jedes Glied der Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ enthält A^{-1}.*

(2) *Ist $\||I-AX|\|<1/(\beta^{k-1}\cdot\alpha)$ für alle $X\in\mathfrak{X}_0$, so konvergiert die Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen A^{-1}.*

(3) *Für die Folge der Durchmesser $(d(\mathfrak{X}_n))_{n=0}^{\infty}$ gilt:*

$$\|d(\mathfrak{X}_{n+1})\|\leqq c\cdot\|d(\mathfrak{X}_n)\|^k.$$

Beweis. Zu (1). Wie in (1) von Satz 1 zeigt man $A^{-1}\in\mathfrak{Y}_{n+1}$, falls $A^{-1}\in\mathfrak{X}_n$ ist. Damit gilt $A^{-1}\in\mathfrak{X}_{n+1}=\mathfrak{X}_n\cap\mathfrak{Y}_{n+1}$.

Zu (2). Das Verfahren (II) erzeugt eine monoton fallende Folge von Intervallen $\mathfrak{X}_0\supset\mathfrak{X}_1\supset\mathfrak{X}_2\supset\cdots$. Das bedeutet, daß die Folge der oberen Schranken $(X_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend und durch $X_1^{(0)}$ nach unten beschränkt ist. Aufgrund der Regularität des Kegels K besitzt daher die Folge den Grenzwert $\overline{X}_2$. Entsprechend hat $(X_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ den Grenzwert $\overline{X}_1$. Das bedeutet, daß die Folge $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ den Grenzwert $\overline{\mathfrak{X}}=[\overline{X}_1, \overline{X}_2]$ besitzt. Wegen der Stetigkeit aller auftretenden Verknüpfungen in (II), insbesondere auch der Durchschnittsbildung, ist $\overline{\mathfrak{X}}$ ein Fixelement der Vorschrift (II). Dann gilt nach (II) für

$$\overline{\mathfrak{Y}}:=[\overline{Y}_1, \overline{Y}_2]=\omega(\overline{\mathfrak{X}})\,\{I+(I-A\cdot\omega(\overline{\mathfrak{X}}))+\cdots+(I-A\cdot\omega(\overline{\mathfrak{X}}))^{k-2}\}$$
$$\oplus\{\overline{\mathfrak{X}}\otimes(I-A\cdot\omega(\overline{\mathfrak{X}}))^{k-1}\}$$

die Beziehung $\overline{\mathfrak{X}}=\overline{\mathfrak{Y}}\cap\overline{\mathfrak{X}}$. Das hat zur Folge: $\overline{Y}_1\leqq\overline{X}_1\leqq\overline{X}_2\leqq\overline{Y}_2$, woraus dann $d(\overline{\mathfrak{Y}})\geqq d(\overline{\mathfrak{X}})$ folgt.

Wir setzen jetzt $\||I-AX|\|<1/(\beta^{k-1}\cdot\alpha)$ für alle $X\in\mathfrak{X}_0$ voraus. Mit Hilfe der schwachen Homogenität der Abbildung d folgt aus der eben hergeleiteten Beziehung:

$$d(\overline{\mathfrak{X}})\leqq d(\overline{\mathfrak{Y}})\leqq\alpha\cdot d(\overline{\mathfrak{X}})\cdot|(I-A\,\omega(\overline{\mathfrak{X}}))^{k-1}|,$$

woraus dann

$$d(\overline{\mathfrak{X}})\,\{I-\alpha\cdot|(I-A\cdot\omega(\mathfrak{X}))^{k-1}|\}\leqq 0$$

folgt. Wegen $\||I-A\,\omega(\overline{\mathfrak{X}})|\|<1/(\beta^{k-1}\cdot\alpha)$ existiert $\{I-\alpha|(I-A\,\omega(\overline{\mathfrak{X}}))^{k-1}|\}^{-1}$ und ist $\geqq O$. Somit folgt notwendig $d(\overline{\mathfrak{X}})=O$, also $\overline{X}_1=\overline{X}_2=\overline{X}=\overline{\mathfrak{X}}$. Wegen $X_1^{(n)}\leqq A^{-1}\leqq X_2^{(n)}$ und der Normalität des Kegels K folgt wie in Satz 1 $\overline{\mathfrak{X}}=A^{-1}$.

Zu (3). Wie in Satz 1, (3) folgt $d(\mathfrak{Y}_{n+1})\leqq\alpha\cdot d(\mathfrak{X}_n)\,(2|A|\cdot d(\mathfrak{X}_n))^{k-1}$. Für den nichtleeren Durchschnitt zweier Intervalle $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ gilt $d(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{Y})\leqq\inf(d(\mathfrak{X}), d(\mathfrak{Y}))$; wegen $\mathfrak{X}_{n+1}=\mathfrak{X}_n\cap\mathfrak{Y}_{n+1}$ gilt daher $d(\mathfrak{X}_{n+1})\leqq d(\mathfrak{Y}_{n+1})\leqq\alpha\cdot d(\mathfrak{X}_n)\,(2|A|\cdot d(\mathfrak{X}_n))^{k-1}$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung 4. Wie dem obigen Beweis zu entnehmen ist, kann die hinreichende Konvergenzbedingung in (2) ersetzt werden durch die Forderung:

Die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\cdot|(I-AX)^{k-1}|)^n$ konvergiert für alle $X\in\mathfrak{X}_0$.

Bemerkung 5. Wir wollen kurz darauf eingehen, wie man ein Startelement $\mathfrak{X}_0$ mit $A^{-1}\in\mathfrak{X}_0$ findet, für welches Verfahren (I) konvergiert. Dazu setzen wir voraus, daß B ein Hilbertraum ist und A sei zunächst selbstadjungiert. Ist $\|A\|<k$, so gilt bekanntlich $\|I-1/k\cdot A\|<1$, also konvergiert Verfahren (I*) für $\omega(\mathfrak{X}_0)=1/k\cdot I$. Mit Hilfe üblicher Normabschätzungen läßt sich leicht ein Intervall $\mathfrak{X}_0$ mit $\omega(\mathfrak{X}_0)=1/k\cdot I$ angeben, welches A^{-1} enthält. Im nichtselbstadjungierten Falle führt die Wahl $\omega(\mathfrak{X}_0)=1/k\cdot A^*$ mit $\|AA^*\|<k$ zum Ziele.

4. Der endlichdimensionale Fall

Wir wählen B als den $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$, und damit ist $L(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller n-zeiligen reellen, quadratischen Matrizen mit der zugeordneten Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$. Der Kegel K bestehe aus der Menge aller Matrizen mit nichtnegativen Elementen. K ist regulär und damit normal. Außerdem ist $L(\mathbb{R}^n)$ ein Rieszscher Raum. Der Intervallraum $I(L(\mathbb{R}^n))$ besteht somit aus der Menge aller Matrizen, deren Elemente reelle, abgeschlossene und beschränkte

Intervalle sind. Die Matrix $|T|$ entsteht aus der Matrix T durch elementweise Betragsbildung. Die Addition $\oplus$ sei wie in Beispiel 1 definiert durch

$$S \oplus \mathfrak{T} := [S+T_1, S+T_2],$$

ebenso die Multiplikation $\otimes$ durch

$$\mathfrak{T} \otimes S := [-q \cdot (T_2 - T_1)|S| + 1/2 \cdot (T_1 + T_2)\, S,\; q \cdot (T_2 - T_1)|S| + 1/2 \cdot (T_1 + T_2)\, S].$$

Ebenso sei die Abbildung $\omega(\mathfrak{T}) := 1/2 \cdot (T_1 + T_2)$ wie in Bemerkung 2 gewählt. Bei diesen Verknüpfungen erfüllt der Durchmesser $d(\mathfrak{T}) = T_2 - T_1$ die Forderung c) mit $\alpha = 2q$, wobei das Gleichheitszeichen steht. Damit geht Satz 1, (2) über in

Satz 1*, (2). *Die Folge der Intervallmatrizen* $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ *im Verfahren* (I) *konvergiert gegen* A^{-1} *genau dann, wenn der Spektralradius* $\rho(I - A \cdot \omega(\mathfrak{X}_0))$ *kleiner als* 1 *ist.*

Die Aussage von Satz 1, (3) gilt wegen $\alpha = 2q$, $\beta = 1$ mit $\gamma = (2q)^k \|A\|_{\infty}^{k-1}$. Aufgrund der Bemerkung 4 läßt sich die Aussage von Satz 2,(2) hier verschärfen zu:

Satz 2*, (2). *Die Folge der Intervallmatrizen* $(\mathfrak{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ *konvergiert gegen* A^{-1}, *wenn für alle* $X \in \mathfrak{X}_0$ *der Spektralradius* $\rho(|(I - AX)^{k-1}|)$ *kleiner als* $1/(2q)$ *ist.*

Für $q = \frac{1}{2}$ sind die Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$ Spezialfälle der Addition bzw. Multiplikation von Intervallmatrizen $\mathfrak{S} = ([s_1^{ij}, s_2^{ij}])$, $\mathfrak{T} = ([t_1^{ij}, t_2^{ij}])$ nach den Regeln:

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{T} := ([t_1^{ij}, t_2^{ij}] + [s_1^{ij}, s_2^{ij}]),$$

$$\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{T} := \left(\sum_{k=1}^{n} [s_1^{ik}, s_2^{ik}] \cdot [t_1^{kj}, t_2^{kj}] \right) \qquad \text{(siehe etwa [4])}.$$

Bei Verwendung dieser Arithmetik wird in [2] das folgende hinreichende Kriterium für das Erfülltsein der Konvergenzbedingung von Satz 2*, (2) angegeben:

Lemma. *Sei* $\mathfrak{X}$ *aus* $I(L(\mathbb{R}^n))$ *mit* $A^{-1} \in \mathfrak{X}$ *und es gelte ferner* $\|I - A \cdot \omega(\mathfrak{X})\|_{\infty} < 1$. *Ist die Beziehung*

$$\|d(\mathfrak{X})\|_{\infty} < 2 \cdot \frac{1 - \|I - A\omega(\mathfrak{X})\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}$$

erfüllt, dann gilt für alle $X \in \mathfrak{X}$: $\|I - AX\|_{\infty} < 1$.

Bemerkung 6. Besitzt man eine Näherung $\omega(\mathfrak{X}_0)$, für die $\|I - A\omega(\mathfrak{X}_0)\|_{\infty} < 1$ ist, so läßt sich leicht eine Intervallmatrix $\mathfrak{X}_0$ mit $A^{-1} \in \mathfrak{X}_0$ angeben (vgl. [2]), d.h., die Voraussetzungen von Satz 1* sind für die so gebildete Matrix $\mathfrak{X}_0$ erfüllt. Läßt sich die Matrix A zerlegen in $A = I - B$ mit $\rho(B) < 1$, dann sind $\omega(\mathfrak{X}_0) = I, I + B, I + B + B^2, \ldots$ Näherungen für A^{-1} mit $\|I - A\omega(\mathfrak{X}_0)\|_{\infty} < 1$.

Die für die Norm $\|\cdot\|_{\infty}$ durchgeführten Überlegungen gelten ohne weiteres auch für jede andere monotone Matrixnorm in $L(\mathbb{R}^n)$.

Literatur

1. Altman, M.: An optimum cubically convergent iterative method of inverting a linear bounded operator in Hilbert space. Pacific J. Math. **10**, 1107–1113 (1960).
2. Alefeld, G., Herzberger, J.: Verfahren höherer Ordnung zur iterativen Einschließung der inversen Matrix. Z. Angew. Math. Phys. **21**, 819–824 (1970).
3. Krasnosel'skii, M. A.: Positive solutions of operator equations. Groningen: Noordhoff Ltd. 1964.
4. Kulisch, U.: Grundzüge der Intervallrechnung. In: Überblicke Mathematik 2, Mannheim/Zürich: BI-Hochschultaschenbücher 1969.
5. Alefeld, G., Herzberger, J.: Zur Invertierung linearer und beschränkter Operatoren. Interner Bericht des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe. Dezember 1969.

Dr. Götz Alefeld
Dr. Jürgen Herzberger
Institut für Angewandte Mathematik
BRD-7500 Karlsruhe
Universität
Deutschland

(Eingegangen am 19. Februar 1970)

Universitätsdruckerei H. Stürtz AG Würzburg
Printed in Germany