Numer. Math. 17, 33—39 (1971)

Anwendungen des Fixpunktsatzes für Pseudometrische Räume in der Intervallrechnung

G. Alefeld

Eingegangen am 10. Oktober 1969

Zusammenfassung. Für einige Iterationsverfahren zur Bestimmung von Fixpunkten komplexer Gleichungssysteme mit Intervallkoeffizienten werden Konvergenzaussagen angegeben.

1. Bezeichnungen und Problemstellung

In der Menge $I(R)$ der reellen abgeschlossenen Intervalle

$$X=[x_1, x_2], \qquad Y=[y_1, y_2], \ldots$$

sind durch

$$Z=X*Y:=\{z=x*y \mid x\in X \wedge y\in Y\}, \qquad * \in \{+, -, \cdot, :\}$$

vier Verknüpfungen definiert. Unter einem komplexen Intervall X verstehen wir die Zahlenmenge

$$X=X_1+i X_2:=\{x=x_1+i x_2 \mid x_1\in X_1 \wedge x_2\in X_2;\ X_1, X_2\in I(R)\}\in I(C).$$

Verknüpfungen zwischen Elementen aus $I(C)$ sind auf Verknüpfungen in $I(R)$ zurückgeführt (s. [1]). Die Menge der $n\times n$-Matrizen, deren Elemente aus $I(C)$ sind, bezeichnen wir mit $M\big(I(C)\big)$, ihre Elemente mit großen deutschen Buchstaben: $\boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\mathfrak{B}}, \ldots$, die Menge der entsprechenden Vektoren mit $V\big(I(C)\big)$, ihre Elemente mit kleinen deutschen Buchstaben: $\boldsymbol{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\mathfrak{b}}, \ldots$. Im Gegensatz dazu bezeichnen wir die Menge der Matrizen, deren Elemente komplexe Zahlen sind, mit $M(C)$, die Menge der entsprechenden Vektoren mit $V(C)$. Die Elemente von $M(C)$ bzw. $V(C)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ bzw. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ („Punktmatrix" bzw. „Punktvektor"). Verknüpfungen zwischen Intervallmatrizen sind wie üblich definiert. In dieser Arbeit werden unter anderem Gleichungen der Form $\boldsymbol{\mathfrak{x}}=\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}+\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ betrachtet. Dabei sind $\boldsymbol{\mathfrak{A}}\in M\big(I(C)\big)$ und $\boldsymbol{\mathfrak{b}}\in V\big(I(C)\big)$ gegeben. Kann man einen Vektor $\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*\in V\big(I(C)\big)$ finden mit $\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*=\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*+\boldsymbol{\mathfrak{b}}$, so gilt $\{\mathfrak{x}=(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{b} \mid \mathfrak{A}\in\boldsymbol{\mathfrak{A}} \wedge \mathfrak{b}\in\boldsymbol{\mathfrak{b}}\}\subseteq\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*$, d.h. $\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*$ enthält die Menge der Lösungen $\mathfrak{x}$ aller linearen Gleichungssysteme $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}\mathfrak{x}+\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{b}\in\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ (s. [1, 3, 4, 6]). In dieser Arbeit soll die Bestimmung von $\boldsymbol{\mathfrak{x}}^*$ mit Hilfe von Iterationsverfahren untersucht werden. Daneben werden auch nichtlineare Gleichungen mit Intervallkoeffizienten behandelt. Am Schluß der Arbeit ist ein numerisches Beispiel angegeben.

2. Metrische Eigenschaften von $I(C)$

In der Menge $I(R)$ ist für zwei Intervalle $A=[a_1, a_2]$, $B=[b_1, b_2]$ durch $q(A, B)=\max(|a_1-b_1|, |a_2-b_2|)$ eine Metrik definiert. $\big(I(R), q\big)$ ist vollständig. $|A|:=q(A, 0)$ heißt Betrag des Intervalles A. In $I(C)$ kann man mit Hilfe von

q für zwei Elemente $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$ durch $p(A, B) = q(A_1, B_1) + q(A_2, B_2)$ eine Metrik einführen. $(I(C), p)$ ist vollständig. $|A| := p(A, 0) = |A_1| + |A_2|$ heißt Betrag von $A = A_1 + iA_2$. Die Metrik p besitzt die folgenden wichtigen Eigenschaften:

a) $p(AB, AC) \leqq |A| \cdot p(B, C)$,

b) $p(A+B, A+C) = p(B, C)$,

c) $p(A+B, C+D) \leqq p(A, C) + p(B, D)$,

d) $p(AB, CD) \leqq (|A| + |C|)\, p(B, D) + p(AD, BC)$,

e) $X, Y \subseteq Z \in I(C)$: $p(X^r, Y^r) \leqq r|Z|^{r-1} p(X, Y)$, $\quad r = 1, 2, \ldots$,

f) $X_1, X_2 \subseteq X$, $\quad Y_1, Y_2 \subseteq Y$:
$p(X_1^k Y_1^r, X_2^k Y_2^r) \leqq k|X|^{k-1}|Y|^r p(X_1, X_2) + r|X|^k|Y|^{r-1} p(Y_1, Y_2)$,
$k, r = 1, 2, \ldots$.

Beweis. Die Eigenschaften a)—c) wurden für die Metrik q in [6] bewiesen. Mit ihrer Hilfe ergeben sich leicht die entsprechenden Eigenschaften für p.

d)
$$\begin{aligned} p(AB, CD) &= p(AB + AD, CD + AD) \\ &\leqq p(AB, AD) + p(AD + BC, CD + BC) \\ &\leqq p(BC, CD) + p(AD, BC) + |A| \cdot p(B, D) \\ &\leqq (|A| + |C|)\, p(B, D) + p(AD, BC). \end{aligned}$$

e) Vollständige Induktion: Für $r = 1$ gilt das Gleichheitszeichen. Für $r = 2$ erhalten wir mit d)

$$p(X^2, Y^2) = p(XX, YY) \leqq (|X| + |Y|)\, p(X, Y) + p(XY, XY) \leqq 2|Z| \cdot p(X, Y).$$

Die Behauptung sei für $r-2$ $(r \geqq 3)$ richtig. Dann erhalten wir durch Anwendung von d) mit $A := X^{r-1}$, $B := X$, $C := Y^{r-1}$ und $D := Y$

$$\begin{aligned} p(X^r, Y^r) &\leqq (|X^{r-1}| + |Y^{r-1}|)\, p(X, Y) + p\big(X^{r-2}(XY), (XY)\, Y^{r-2}\big) \\ &\leqq 2|Z|^{r-1} p(X, Y) + |XY|\, p(X^{r-2}, Y^{r-2}) \\ &\leqq 2|Z|^{r-1} p(X, Y) + |Z|^2 (r-2)\, |Z|^{r-3} p(X, Y) \\ &= r|Z|^{r-1} p(X, Y). \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} p(X_1^k Y_1^r, X_2^k Y_2^r) &= p(X_1^k Y_1^r + X_1^k Y_2^r, X_2^k Y_2^r + X_1^k Y_2^r) \\ &\leqq p(X_1^k Y_1^r, X_1^k Y_2^r) + p(X_1^k Y_2^r, X_2^k Y_2^r) \\ &\leqq |X|^k p(Y_1^r, Y_2^r) + |Y|^r p(X_1^k, X_2^k). \end{aligned}$$

Durch Anwendung von e) auf die beiden Summanden folgt die Behauptung. (Den Fall eines mehrfachen Produktes von Intervallpotenzen kann man durch wiederholte Anwendung der beim Beweis verwendeten Schlußweise erledigen.)

Wir betrachten jetzt die Menge $V(I(C))$ der n-dimensionalen Vektoren, deren Komponenten aus $I(C)$ sind. Der Vektor $\mathfrak{x} \in V(I(C))$ habe die Komponenten X_i, $i = 1(1)\,n$. Durch die Vorschrift $\sigma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \big(p(X_i, Y_i)\big)$, die jedem Paar von Intervallvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ einen Vektor $\sigma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ aus $V(R)$ zuordnet, wird $V(I(C))$ zu einem pseudometrischen Raum mit dem zugeordneten, linearen halbgeordneten Raum der reellen Vektoren. Dabei nehmen wir an, daß die Halbordnung in $V(R)$ komponentenweise durch die übliche $\leqq$-Relation der reellen Zahlen erklärt ist. Der

Nachweis, daß σ definit ist und die Dreiecksungleichung erfüllt, folgt unmittelbar aus der Definition mit Hilfe von p. Die Konvergenz von Folgen aus $V(R)$ verstehen wir komponentenweise. Eine Folge von Intervallvektoren $\mathfrak{x}_n = (X_i^n)$ ist damit gegen das Grenzelement $\mathfrak{x}^*$ konvergent, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}^*) = \big(\lim_{n\to\infty} p(X_i^n, X_i^*)\big) = \mathfrak{o}.$$

Der pseudometrische Raum $\big(V(I(C)), \sigma\big)$ ist vollständig.

3. Verschiedene Iterationsverfahren

Wir betrachten nun die Gleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}, \qquad \big(\mathfrak{A} \in M(I(C)), \mathfrak{b} \in V(I(C))\big).$$

Durch $T\mathfrak{x} := \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ ist ein (nichtlinearer) Operator erklärt, der $V\big(I(C)\big)$ in sich abbildet. Es gilt

Hilfssatz 1. Die reelle nichtnegative Matrix $|\mathfrak{A}| = (|A_{ik}|) \in M(R)$ ist Schranke für den Operator T.

Beweis. Es seien $\mathfrak{y} = (Y_i)$ und $\mathfrak{z} = (Z_i)$ aus $V\big(I(C)\big)$. Dann gilt unter Verwendung der Eigenschaften a), b) und c) der Metrik p:

$$\begin{aligned}
\sigma(T\mathfrak{y}, T\mathfrak{z}) &= \sigma(\mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{b}, \mathfrak{A}\mathfrak{z} + \mathfrak{b}) \\
&= \sigma\left(\left(\sum_{j=1}^n A_{ij} Y_j + B_i\right), \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} Z_j + B_i\right)\right) \\
&= \left(p\left(\sum_{j=1}^n A_{ij} Y_j + B_i, \sum_{j=1}^n A_{ij} Z_j + B_i\right)\right) \\
&= \left(p\left(\sum_{j=1}^n A_{ij} Y_j, \sum_{j=1}^n A_{ij} Z_j\right)\right) \\
&\leqq \left(\sum_{j=1}^n p(A_{ij} Y_j, A_{ij} Z_j)\right) \\
&\leqq \left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \cdot p(Y_j, Z_j)\right) \\
&= |\mathfrak{A}| \cdot \sigma(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}).
\end{aligned}$$

Durch Anwendung des Fixpunktsatzes für pseudometrische Räume (s. [2], S. 169) erhalten wir damit den

Satz 1. Gegeben sei die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A} \in M\big(I(C)\big)$ und $\mathfrak{b} \in V\big(I(C)\big)$. Ist der Spektralradius der Matrix $|\mathfrak{A}|$ kleiner als 1, so konvergiert das Iterationsverfahren $\mathfrak{x}_{m+1} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_m + \mathfrak{b}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, für jeden beliebigen Anfangsvektor $\mathfrak{x}_0 \in V\big(I(C)\big)$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathfrak{x}^* \in V\big(I(C)\big)$.

Wir bezeichnen das angegebene Iterationsverfahren wie üblich als Gesamtschrittverfahren. Mit anderen Hilfsmitteln kann man zeigen, daß die Bedingung $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$ für die Eindeutigkeit des Fixpunktes und die Konvergenz für beliebiges Anfangselement aus $V\big(I(C)\big)$ auch notwendig ist. (Siehe [1]; mit Hilfe von Normen für Intervallvektoren und Intervallmatrizen hat Mayer in [6] die Notwendigkeit für reelle Intervallmatrizen gezeigt.)

Denken wir uns nun die Intervallmatrix $\mathfrak{A}$ zerlegt in $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}+\mathfrak{D}+\mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{R}$ eine strenge untere bzw. obere Dreiecksmatrix und $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix ist, so kann man neben dem Gesamtschrittverfahren das sog. Relaxationsverfahren betrachten:

$$\mathfrak{y}_{m+1}=(1-\omega)\,\mathfrak{y}_m+\omega\{\mathfrak{L}\,\mathfrak{y}_{m+1}+(\mathfrak{D}+\mathfrak{R})\,\mathfrak{y}_m+\mathfrak{b}\}, \qquad (\omega>0), \qquad m=0,1,2,\ldots.$$

Für $\omega=1$ bezeichnen wir diese Iterationsvorschrift als Einzelschrittverfahren.

Das Relaxationsverfahren hat — wendet man es auf ein Gleichungssystem an, dessen Koeffizienten echte Intervalle sind — den entscheidenden Nachteil, daß sein Fixpunkt, falls dieser eindeutig existiert, nicht für alle Werte von ω mit dem des Gesamtschrittverfahrens übereinstimmt. Es gilt

Satz 2. Die Gleichung $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{b}$ besitze einen Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$. Ist das Relaxationsverfahren für beliebiges $\mathfrak{y}_0\in V\big(I(C)\big)$ konvergent gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathfrak{y}^*$, so gilt für $0<\omega\leqq 1$: $\mathfrak{x}^*=\mathfrak{y}^*$, für $\omega>1$: $\mathfrak{x}^*\subseteq\mathfrak{y}^*$.

Beweis. $\mathfrak{y}^*$ genügt der Gleichung $\mathfrak{y}^*=(1-\omega)\,\mathfrak{y}^*+\omega(\mathfrak{A}\mathfrak{y}^*+\mathfrak{b})$, $\mathfrak{x}^*$ der Gleichung $\mathfrak{x}^*=\mathfrak{A}\mathfrak{x}^*+\mathfrak{b}$. Sei nun zunächst $0<\omega\leqq 1$. Dann ist $(1-\omega)\,\mathfrak{x}^*+\omega(\mathfrak{A}\mathfrak{x}^*+\mathfrak{b})=(1-\omega)\,\mathfrak{x}^*+\omega\,\mathfrak{x}^*=(1-\omega+\omega)\,\mathfrak{x}^*=\mathfrak{x}^*$. Wegen der Eindeutigkeit von $\mathfrak{y}^*$ folgt $\mathfrak{x}^*=\mathfrak{y}^*$. (Für $a, b\in R$, $ab>0$, $\mathfrak{z}\in V(I(C))$ gilt $(a+b)\,\mathfrak{z}=a\mathfrak{z}+b\mathfrak{z}$. Diese Beziehung wurde bei der letzten Umformung verwendet. Im allgemeinen gilt $(a+b)\,\mathfrak{z}\subseteq a\mathfrak{z}+b\mathfrak{z}$, was nachfolgend benützt wird.)

Für $\omega>1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}^*&=(1-\omega+\omega)\,\mathfrak{x}^*\subseteq(1-\omega)\,\mathfrak{x}^*+\omega\,\mathfrak{x}^*=(1-\omega)\,\mathfrak{x}^*+\omega(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}^*+\mathfrak{b})\\&=(1-\omega)\,\mathfrak{x}^*+\omega\{\mathfrak{L}\mathfrak{x}^*+(\mathfrak{D}+\mathfrak{R})\,\mathfrak{x}^*+\mathfrak{b}\}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{x}^*\subseteq(1-\omega)\,\mathfrak{y}_0+\omega\{\mathfrak{L}\mathfrak{y}_1+(\mathfrak{D}+\mathfrak{R})\,\mathfrak{y}_0+\mathfrak{b}\}=:\mathfrak{y}_1,$$

falls man im Relaxationsverfahren die Iteration mit $\mathfrak{y}_0:=\mathfrak{x}^*$ beginnt. Durch vollständige Induktion folgt $\mathfrak{x}^*\subseteq\mathfrak{y}_m$ für alle m. Wegen der Eindeutigkeit von $\mathfrak{y}^*$ gilt damit auch $\mathfrak{x}^*\subseteq\mathfrak{y}^*$.

Wir haben also insbesondere das Ergebnis, daß Gesamtschrittverfahren und Einzelschrittverfahren den gleichen Fixpunkt besitzen. Ein Spezialfall, in dem der Fixpunkt des Relaxationsverfahrens für alle ω mit dem des Gesamtschrittverfahrens übereinstimmt (Existenz und Eindeutigkeit vorausgesetzt), ist dann gegeben, wenn $\mathfrak{A}\in M(C)$ und $\mathfrak{b}\in V(C)$ ist. Beginnt man nämlich in diesem Falle die Iteration mit einem Vektor aus $V(C)$, so bleiben alle Iterierten in $V(C)$. Damit ist alles gezeigt.

Durch

$$\mathfrak{y}:=S\,\mathfrak{z}$$

mit

$$\mathfrak{y}=(1-\omega)\,\mathfrak{z}+\omega\{\mathfrak{L}\,\mathfrak{y}+(\mathfrak{D}+\mathfrak{R})\,\mathfrak{z}+\mathfrak{b}\}$$

ist ein nichtlinearer Operator definiert, der $V\big(I(C)\big)$ in sich abbildet. Es gilt der

Hilfssatz 2. Die reelle nichtnegative Matrix

$$\mathfrak{P}:=(\mathfrak{E}-\omega\,|\mathfrak{L}|)^{-1}\{|1-\omega|\,\mathfrak{E}+\omega(|\mathfrak{D}|+|\mathfrak{R}|)\}$$

ist Schranke für den Operator S.

Der Beweis ergibt sich ähnlich wie in Hilfssatz 1 unter Verwendung der Eigenschaften der Metrik p.

Wir können damit wieder den Fixpunktsatz für pseudometrische Räume anwenden und erhalten

Satz 3. Ist der Spektralradius $\varrho(\mathfrak{P})$ der in Hilfssatz 2 definierten Matrix $\mathfrak{P}$ kleiner als 1, so konvergiert das Relaxationsverfahren für jeden beliebigen Anfangsvektor $\mathfrak{y}_0 \in V(I(C))$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\mathfrak{y}^* \in V(I(C))$.

In [1] wurde gezeigt, daß die angegebene Bedingung auch notwendig ist.

Wir zeigen nun, daß im Falle der Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ein reelles Intervall angegeben werden kann, so daß für Werte von ω aus diesem Intervall auch stets das Relaxationsverfahren konvergiert. Dazu benötigen wir den

Hilfssatz 3. Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{D} + \mathfrak{R} \in M(C)$ mit $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$. Dann ist auch

$$\varrho\left((\mathfrak{E} - \omega|\mathfrak{L}|)^{-1}\{|1-\omega|\,\mathfrak{E} + \omega(|\mathfrak{D}| + |\mathfrak{R}|)\}\right) < 1$$

für $0 < \omega < \dfrac{2}{1+\varrho(|\mathfrak{A}|)}$. (Hier wird unter $|\mathfrak{A}|$ die Matrix verstanden, die man erhält, wenn man elementweise den gewöhnlichen Betrag einer komplexen Zahl bildet.)

Der Beweis befindet sich in [5].

Damit ergibt sich leicht der

Satz 4. Konvergiert das Gesamtschrittverfahren, so konvergiert auch stets das Relaxationsverfahren für $0 < \omega < \dfrac{2}{1+\varrho(|\mathfrak{A}|)}$.

Beweis. Setzen wir in Hilfssatz 3 $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|$ so folgt sofort $\varrho(\mathfrak{P}) < 1$ für Werte von ω aus dem angegebenen Intervall.

Bemerkung. Für $\omega = 1$ (Einzelschrittverfahren) ist $\mathfrak{P} = (\mathfrak{E} - |\mathfrak{L}|)^{-1}(|\mathfrak{D}| + |\mathfrak{R}|)$. Nach einem Satz von Stein und Rosenberg und einer Verallgemeinerung davon ([5]) ist der Spektralradius dieser Matrix genau dann kleiner als 1, wenn $\varrho(|\mathfrak{A}|) < 1$ gilt. Einzelschrittverfahren und Gesamtschrittverfahren sind also entweder beide konvergent oder beide divergent. In [1] wird folgende Aussage bewiesen: Beginnt man die Iteration beim Gesamtschrittverfahren bzw. Einzelschrittverfahren mit einem Vektor $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{y}_0 \in V(I(C))$, welcher das nach Satz 2 gemeinsame Grenzelement $\mathfrak{x}^*$ enthält, und iteriert andererseits gemäß

$$\bar{\mathfrak{x}}_{m+1} := (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{x}}_m + \mathfrak{b}) \cap \bar{\mathfrak{x}}_m, \qquad \bar{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{x}_0 \tag{GS 1}$$

bzw.

$$\bar{\mathfrak{y}}_{m+1} := \{\mathfrak{L}\bar{\mathfrak{y}}_{m+1} + (\mathfrak{D} + \mathfrak{R})\,\bar{\mathfrak{y}}_m + \mathfrak{b}\} \cap \bar{\mathfrak{y}}_m, \qquad \bar{\mathfrak{y}}_0 = \mathfrak{y}_0, \tag{ES 1}$$

so gilt für alle m: $\mathfrak{x}^* \subseteq \mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{x}^* \subseteq \mathfrak{y}_m$, $\mathfrak{x}^* \subseteq \bar{\mathfrak{x}}_m$, $\mathfrak{x}^* \subseteq \bar{\mathfrak{y}}_m$ und $\bar{\mathfrak{x}}_m \subseteq \mathfrak{x}_m$, $\bar{\mathfrak{y}}_m \subseteq \mathfrak{y}_m$, und $\bar{\mathfrak{y}}_m \subseteq \bar{\mathfrak{x}}_m$. Unter den genannten Voraussetzungen ist also das Verfahren (ES 1) stets vorzuziehen.

Abschließend wollen wir noch das Iterationsverfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten betrachten. Gegeben sei der Operator T mit

$$T\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{r_1} A_i\, X^{l_i}\, Y^{m_i} \\ \sum_{j=0}^{r_2} B_j\, X^{s_j}\, Y^{t_j} \end{pmatrix},$$

(l_i, m_i, s_j, t_j natürliche Zahlen $\geqq 1$, $i=0(1)\,r_1$, $j=0(1)\,r_2$), der den zweidimensionalen Raum der komplexen Intervallvektoren in sich abbildet. (Wir beschränken uns auf den Fall $n=2$, um den Schreibaufwand gering zu halten.) Es wird nach Fixpunkten von T gefragt.

Hilfssatz 4. Gegeben sei der Operator T (s. oben). Es sei $X \subseteq Z$ und $Y \subseteq W$. Dann ist die Matrix

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{r_1} l_i \cdot |A_i| \cdot |Z|^{l_i-1} \cdot |W|^{m_i} & \sum_{l=0}^{r_1} m_i \cdot |A_i| \cdot |Z|^{l_i} \cdot |W|^{m_i-1} \\ \sum_{j=0}^{r_2} s_j \cdot |B_j| \cdot |Z|^{s_j-1} \cdot |W|^{t_j} & \sum_{j=0}^{r_2} t_j \cdot |B_j| \cdot |Z|^{s_j} \cdot |W|^{t_j-1} \end{pmatrix}$$

Schranke von T.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar unter Verwendung der Eigenschaften von p. Im n-dimensionalen Falle läßt sich eine analoge Schranke herleiten. Mit Hilfe des Fixpunktsatzes für pseudometrische Räume erhält man damit wieder Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von T in einem vorgegebenen Quader sowie über die Konvergenz des Iterationsverfahrens. Durch Verwendung weiterer Eigenschaften der Metrik p lassen sich auch gebrochen rationale Intervalloperatoren auf Fixpunkte untersuchen.

4. Numerische Beispiele

a) Gegeben sei die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} [0{,}49,\ 0{,}50] & [-100{,}1,\ -100] \\ [0{,}001,\ 0{,}001] & [0{,}49,\ 0{,}50] \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 100{,}5 \\ 0{,}499 \end{pmatrix}.$$

Für den Startvektor $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{y}_0 = \begin{pmatrix} [-5,\ 8] \\ [-5,\ 8] \end{pmatrix}$, welcher den Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$ enthält, sind nachfolgend einige der Iterierten für das Gesamtschrittverfahren (GS) bzw. Einzelschrittverfahren (ES) angegeben:

n	$\mathfrak{x}_n$	$\mathfrak{y}_n$
10	[−134,29726, 137,64609] [0,5660 5865, 1,430 8504]	[−116,41090, 119,42638] [0,6630 6140, 1,328 6354]
20	[−18,12799, 22,507 715] [0,9236 8606, 1,062 8955]	[−10,274 882, 14,753 824] [0,9513 9130, 1,034 8063]
30	[−3,2707 913, 7,881 1298] [0,9695 7098, 1,016 296]	[−1,8283 511, 6,4602 979] [0,9742 9913, 1,011 5000]
40	[−1,5176 916, 6,1561 283] [0,9749 8460, 1,010 7999]	[−1,157 7572, 5,801 8528] [0,9761 1781, 1,009 6497]
80	[−1,1100 035, 5,745 177] [0,9762 7431, 1,009 4904]	[−1,0999 278, 5,7450 711] [0,9762 7464, 1,009 4901]

Zur Erläuterung der im Anschluß an Satz 4 gemachten Bemerkung werde noch die Anzahl der Schritte n angegeben, die man bei obigem Startvektor benötigt, bis auf der Maschine zwei aufeinanderfolgende Näherungen übereinstimmen:

Verfahren	GS	GS1	ES	ES1
n	141	121	113	101

b) Für

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}[-0{,}1,\ 0{,}2] & [0{,}1,\ 0{,}1]\\ [-0{,}1,\ 0{,}1] & [0{,}2,\ 0{,}2]\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{b}=\begin{pmatrix}[0{,}9,\ 1]\\ [0{,}9,\ 1]\end{pmatrix}$$

zeigt die folgende Tabelle, wie sich der Fixpunkt $\mathfrak{x}^*$ der Gleichung $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}+\mathfrak{b}$ bei Verwendung des Relaxationsverfahrens in Abhängigkeit von ω ändert (Satz 2):

ω	0 ... 1	1.1	1.2	1.3
$\mathfrak{y}^*$	[0,851, 1,43] [0,996, 1,43]	[0,764, 1,52] [0,895, 1,51]	[0,630, 1,67] [0,721, 1,65]	[0,401, 1,92] [0,469, 1,90]

ω	1.4	1.5	1.6
$\mathfrak{y}^*$	[−0,097, 2,48] [−0,116, 2,49]	[−2,21, 4,84] [−2,81, 5,19]	keine Konvergenz

Die angegebenen Beispiele wurden auf der Rechenanlage X 8 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe gerechnet. Die angegebenen Zahlenwerte sind gerundet.

Literatur

1. Alefeld, G.: Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einige Anwendungen. Diss., Universität Karlsruhe (1968).
2. Collatz, L.: Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.
3. Herzberger, J.: Metrische Eigenschaften von Mengensystemen und einige Anwendungen. Diss., Universität Karlsruhe (1969).
4. Kulisch, U.: Grundzüge der Intervallrechnung. Überblicke 2, Bibliographisches Institut Mannheim.
5. — Über positive Zerlegungen von Matrizen. Numerische Mathematik **11**, 444—449 (1968).
6. Mayer, O.: Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. Diss., Universität Karlsruhe (1968).

Dr. Götz Alefeld
Institut für Angewandte Mathematik
und Rechenzentrum
Universität Karlsruhe
D-7500 Karlsruhe, Englerstr.
BRD