

ZAMM 50, 773–774 (1970)

G. ALEFELD und J. HERZBERGER

Über das Newton-Verfahren bei nichtlinearen Gleichungssystemen

1. Einleitung

Von R. E. MOORE wurde in [3] ein Verfahren zur Berechnung einer einfachen Nullstelle der Vektorfunktion f vorgeschlagen. Über die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens wurden dort jedoch keine Aussagen gemacht. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Untersuchung dieses Problemkreises liefern. Für eine Reihe derartiger Algorithmen – Sätze 1–4 – werden Konvergenzkriterien angegeben. Außerdem machen Lemma 1 und 2 Aussagen über das Konvergenzverhalten dieser Iterationsverfahren. Insbesondere wird in Satz 4 bzw. Lemma 2 für das oben erwähnte Verfahren von R. E. MOORE ein Konvergenzkriterium angegeben bzw. die überlineare Konvergenz nachgewiesen.

Die Verfahren machen Gebrauch von den Hilfsmitteln der Intervallrechnung. Einige der wichtigsten Begriffe, die im folgenden laufend benutzt werden, seien hier kurz zusammengestellt. Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ bzw. $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{W}$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bzw. reelle $n \times n$ -Matrizen. Diese können als spezielle Intervallvektoren $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{W}$ aus $I(\mathbb{R}^n)$ bzw. spezielle Intervallmatrizen $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{W}$ aus $M(I(\mathbb{R}^n))$ aufgefaßt werden. Verknüpfungen zwischen Intervallmatrizen und Vektoren sind wie üblich definiert und haben insbesondere die Teilmengeneigenschaft. Unter der Durchmesserfunktion $d(\mathbb{X})$ einer Intervallmatrix $\mathbb{X}$ verstehen wir die reelle Matrix, deren Elemente die Durchmesser der entsprechenden Elemente von $\mathbb{X}$ sind. Entsprechendes gilt für Vektoren aus $I(\mathbb{R}^n)$. Die Betragmatrix $|\mathbb{X}|$ einer Intervallmatrix $\mathbb{X}$ ist die reelle Matrix, deren Elemente jeweils der größte vorkommende Betrag aus dem entsprechenden Element von $\mathbb{X}$ sind. Daraus sich ergebende Rechenregeln und Beziehungen zwischen Betragmatrix und Durchmesserfunktion bzw. -vektor findet man in [2]. Außerdem benötigen wir den in [1] eingeführten Operator m , welcher zu einer Intervallmatrix $\mathbb{X}$ die reelle Matrix $m(\mathbb{X})$ zuordnet, deren Elemente die Mittelpunkte der entsprechenden Elemente von $\mathbb{X}$ sind. Entsprechend ist m bei Anwendung auf Intervallvektoren erklärt. Im übrigen verweisen wir bezüglich der intervallarithmetischen Hilfsmittel auf die angegebene Literatur.

2. Verfahren

Gegeben sei die reelle Vektorgleichung

$$f(\mathbb{X}) = 0$$

mit $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $f(\mathbb{X}) = (f_1(\mathbb{X}), f_2(\mathbb{X}), \dots, f_n(\mathbb{X}))$.

Ferner mögen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) existieren und im Quader $\mathbb{X} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ stetig und damit beschränkt sein. Bekanntlich gilt dann für ein festes $\mathbb{X}$

$$f_i(\mathbb{Z}) = f_i(\mathbb{X}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbb{X} + \theta_i(\mathbb{Z} - \mathbb{X})} \cdot (z_j - x_j)$$

mit $\theta_i \in [0, 1]$ oder

$$f(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{X}) + \mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) (\mathbb{Z} - \mathbb{X}) \quad \text{mit} \quad \mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbb{X} + \theta_i(\mathbb{Z} - \mathbb{X})} \right).$$

Sei $\mathbb{Z}$ eine Nullstelle von f , d. h. es sei $f(\mathbb{Z}) = 0$ und sei außerdem $\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$ nichtsingulär. Dann gilt $\mathbb{Z} = \mathbb{X} - \mathbb{Z}^{-1}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) f(\mathbb{X})$. Darüber hinaus sei zu einem Intervallvektor $\mathbb{X} \in I(\mathbb{R}^n)$ eine Intervallmatrix $\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$ bekannt, für die gelten soll:

$$\mathbb{Z} \in \mathbb{X}, \quad \mathbb{Z} \in \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z}).$$

Eine solche Abschätzung erhält man etwa durch die Intervallmatrix $\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})|_{\mathbb{X}=\mathbb{X}}$. Damit beweisen wir die folgenden Aussagen.

Satz 1: Sei $\mathbb{X} \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbb{Z}$ einzige Nullstelle von $f(\mathbb{X})$ in $\mathbb{X}$. Ferner sei $\mathbb{Z}$ eine Intervallmatrix, welche die Inversen der Matrizen $\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{X}$, enthält. Für die Iterationsvorschrift

$$\mathbb{X}_{n+1} = m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} f(m(\mathbb{X}_n)) \quad (\text{I})$$

gelten im Falle $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$ ($n \geq 0$) folgende Aussagen:

1. Für alle Iterierten $\mathbb{X}_n$ gilt: $\mathbb{Z} \in \mathbb{X}_n$.

2. Gilt für eine monotone Matrixnorm

$$\|I - m(\mathbb{Z}) \mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})\| < 1$$

$$\text{so ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{X}_n = \mathbb{Z}.$$

Beweis: Zu 1.: Nach Voraussetzung ist $\mathbb{Z}^{-1}(m(\mathbb{X}_n), \mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}$. Damit gilt für alle $n \geq 0$:

$$f(\mathbb{Z}) = f(m(\mathbb{X}_n)) + \mathbb{Z}(m(\mathbb{X}_n), \mathbb{Z}) (\mathbb{Z} - m(\mathbb{X}_n))$$

oder

$$\mathbb{Z} = m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z}^{-1}(m(\mathbb{X}_n), \mathbb{Z}) f(m(\mathbb{X}_n)) \in m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} f(m(\mathbb{X}_n)) = \mathbb{X}_{n+1}.$$

Zu 2.: Wir wenden den Operator m auf die Vorschrift (I) an und erhalten $m(\mathbb{X}_{n+1}) = m(\mathbb{X}_n) - m(\mathbb{Z}) f(m(\mathbb{X}_n))$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} &= m(\mathbb{X}_{n-1}) - \mathbb{Z} - m(\mathbb{Z}) (f(m(\mathbb{X}_{n-1})) - f(\mathbb{Z})) \\ &= m(\mathbb{X}_{n-1}) - \mathbb{Z} - m(\mathbb{Z}) \mathbb{Z}(m(\mathbb{X}_{n-1}), \mathbb{Z}) (m(\mathbb{X}_{n-1}) - \mathbb{Z}) \\ &= (I - m(\mathbb{Z}) \mathbb{Z}(m(\mathbb{X}_{n-1}), \mathbb{Z})) (m(\mathbb{X}_{n-1}) - \mathbb{Z}) \\ &= \prod_{i=1}^n (I - m(\mathbb{Z}) \mathbb{Z}(m(\mathbb{X}_{n-i}), \mathbb{Z})) (m(\mathbb{X}_0) - \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Unter der angegebenen Bedingung konvergiert die rechte Seite dieser Gleichung gegen den Nullvektor. Daraus folgt $m(\mathbb{X}_n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Wegen $d(\mathbb{X}_n) = d(\mathbb{Z}) \|f(m(\mathbb{X}_{n-1}))\|$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbb{X}_n) = 0$, was dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{X}_n = \mathbb{Z}$ zur Folge hat.

Ist nun die in Satz 1 genannte Voraussetzung $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{X}$ nicht erfüllt, so liegt es nahe, den Durchschnitt $\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_0$ zu bilden und mit diesem Vektor das Verfahren fortzusetzen. Genauso verfährt man mit $\mathbb{X}_2$ usw. Dieses Vorgehen wollen wir nun näher untersuchen.

Satz 2. Sei $\mathbb{X}_0 \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbb{Z}$ einzige Nullstelle von $f(\mathbb{X})$ in $\mathbb{X}_0$. Ferner sei $\mathbb{Z}$ eine Intervallmatrix, welche die Inversen der Matrizen $\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$, $\mathbb{X} \in \mathbb{X}_0$, enthält. Für die Iterationsvorschrift

$$\mathbb{X}_{n+1} = \{m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} f(m(\mathbb{X}_n))\} \cap \mathbb{X}_n \quad (\text{II})$$

gelten folgende Aussagen:

1. Für alle $n \geq 0$ gilt: $\mathbb{Z} \in \mathbb{X}_n$.
2. Existiert $\mathbb{Z}^{-1}$ für alle $\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$, so konvergiert $\{\mathbb{X}_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen $\mathbb{Z}$.

Beweis: Wie in Satz 1 zeigt man, daß $m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} f(m(\mathbb{X}_n))$ die Nullstelle enthält. Nach Voraussetzung enthält auch $\mathbb{X}_n$ die Nullstelle und damit auch der Durchschnitt beider Vektoren.

Zu 2.: Die Folge $\{\mathbb{X}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist monoton fallend. Im Falle $m(\mathbb{X}_k) = \mathbb{Z}$ für ein festes k ist nichts zu beweisen. Andernfalls können wir zeigen, daß

$$d_i(\mathbb{X}_{n+1}) < \frac{1}{2} d_i(\mathbb{X}_n) \quad (**)$$

gilt, woraus dann wegen $\mathbb{Z} \in \mathbb{X}_n$ für alle n $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{X}_n = \mathbb{Z}$ folgt.

Hinreichend für (**) ist die Bedingung $m(\mathbb{X}_n) \in \mathbb{X}_{n+1}$, die wir jetzt aus der Voraussetzung folgern. Nehmen wir an, es sei $m(\mathbb{X}_n) \in \mathbb{X}_{n+1}$. Dann ist notwendigerweise auch $m(\mathbb{X}_n)$ in $\{m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z} f(m(\mathbb{X}_n))\}$ enthalten. Deshalb existiert eine Matrix $\mathbb{Z}_n \in \mathbb{Z}$ derart, daß $m(\mathbb{X}_n) = m(\mathbb{X}_n) - \mathbb{Z}_n f(m(\mathbb{X}_n))$ gilt. Dies folgt aus der Tatsache, daß für die Multiplikation einer Intervallmatrix $\mathbb{Z}$ mit einem Punktvektor f die Beziehung $\mathbb{Z} f = \{\mathbb{Z} f | \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}\}$ besteht. Hieraus ergibt sich aber $\mathbb{Z}_n f(m(\mathbb{X}_n)) = 0$, und da $\mathbb{Z}_n^{-1}$ nach Voraussetzung existiert schließlich $f(m(\mathbb{X}_n)) = 0$, d. h. $m(\mathbb{X}_n) = \mathbb{Z}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Verfahren (I) und (II) können als Verallgemeinerungen des „vereinfachten“ NEWTON-Verfahrens angesehen werden. Bekanntlich konvergiert dieses linear gegen die Lösung $\mathbb{Z}$. Entsprechende Aussagen für die Verfahren (I) und (II) machen wir im folgenden

Lemma 1. Die Voraussetzungen von Satz 1 und Satz 2 seien erfüllt. Dann gilt für die Folge der Durchmesser $\{d(\mathbb{X}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ unter Verwendung monotoner und verträglicher Normen:

$$\text{bei (I)} \quad \|d(\mathbb{X}_{n+1})\| \leq \frac{1}{2} \|d(\mathbb{Z})\| \| |\mathbb{Z}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})| \| \|d(\mathbb{X}_n)\|$$

$$\text{bei (II)} \quad \|d(\mathbb{X}_{n+1})\| \leq \frac{1}{2} \|d(\mathbb{Z})\| \| |\mathbb{Z}(\mathbb{X}_0, \mathbb{Z})| \| \|d(\mathbb{X}_n)\|.$$

Beweis: Aus (I) folgt durch Betrachtung der Folge der Durchmesser der Iterierten

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{z}_{n+1}) &= d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{f}(m(\mathfrak{z}_n))\| = d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{f}(m(\mathfrak{z}_n)) - \mathfrak{f}(\mathfrak{z})\| \\ &= d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{B}(m(\mathfrak{z}_n), \mathfrak{z}) (m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{z})\| \\ &\leq d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{B}(m(\mathfrak{z}_n), \mathfrak{z})\| \|m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{z}\| \\ &\leq \frac{1}{2} d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{B}(m(\mathfrak{z}_n), \mathfrak{z})\| d(\mathfrak{z}_n) \\ &\leq \frac{1}{2} d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})\| d(\mathfrak{z}_n). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Normen folgt die Behauptung für (I). Zum Nachweis der zweiten Behauptung zeigt man wie vorher, daß für $\mathfrak{y}_{n+1} := \{m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{B}(\mathfrak{f}(\mathfrak{z}_n))\}$ die Beziehung $d(\mathfrak{y}_{n+1}) \leq 1/2 d(\mathfrak{B}) \|\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z})\| d(\mathfrak{z}_n)$ besteht. Wegen $\mathfrak{z}_{n+1} \subset \mathfrak{y}_{n+1}$ folgt $d(\mathfrak{z}_{n+1}) \leq d(\mathfrak{y}_{n+1})$ und unter Verwendung der Normen die Behauptung.

Es liegt nun nahe, die Abschätzung $\mathfrak{B}$ in beiden Verfahren mit der Iteration fortwährend zu verbessern. Wir setzen dazu voraus, daß man eine Abschätzung $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{z})$ angeben kann, für die gilt:

- a) $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z} \Rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{z})$ (Teilmengeneigenschaft)
b) $\mathfrak{z}_1 \supset \mathfrak{z}_2 \supset \mathfrak{z}_3 \dots$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n)) = 0$.

Diese beiden Forderungen sind etwa erfüllt, wenn für die Berechnung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{z})$ die Intervallarithmetik in bekannter Weise herangezogen wird. Damit ergibt sich als Verallgemeinerung von Satz 1 der

Satz 3: Sei $\mathfrak{z} \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\mathfrak{z}$ einzige Nullstelle von $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{z}$. Ferner sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{z})$ eine Intervallmatrix mit den Eigenschaften a) und b), welche die Inversen der Matrizen $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}$, enthält. Für die Iterationsvorschrift

$$(I^*) \quad \mathfrak{z}_{n+1} = m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n) \mathfrak{f}(m(\mathfrak{z}_n))$$

gelten, falls $\mathfrak{z}_n \subset \mathfrak{z}$ für $n \geq 0$, die folgenden Aussagen

1. Für $n > 0$ gilt: $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}_n$.
2. Gilt für eine monotone Matrixnorm $\|\cdot\|$ $\|I - \mathfrak{B}(\mathfrak{z}) \mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})\| < 1$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$.

Beweis: 1. folgt wie in Satz 1. Zum Nachweis von 2. beachten wir, daß für die Folge der Mittelpunkte jetzt die Beziehung $m(\mathfrak{z}_{n+1}) = m(\mathfrak{z}_n) - m(\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n)) \mathfrak{f}(m(\mathfrak{z}_n))$ besteht, woraus man die Gleichung

$$m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{z} = \prod_{i=1}^n (I - m(\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_i)) \mathfrak{B}(m(\mathfrak{z}_i), \mathfrak{z})) (m(\mathfrak{z}_0) - \mathfrak{z})$$

herleitet. Für die Konvergenz des Matrizenproduktes gegen die Nullmatrix ist die angegebene Bedingung hinreichend. Entsprechend ergibt sich als Verallgemeinerung von Satz 2 der

Satz 4: Sei $\mathfrak{z}_0 \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\mathfrak{z}$ einzige Nullstelle von $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{z}_0$. Ferner sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{z})$ eine Intervallmatrix, welche die Inversen der Matrizen $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}$, enthält und die Eigenschaften a) und b) besitzt. Für die Iterationsvorschrift

$$(II^*) \quad \mathfrak{z}_{n+1} = \{m(\mathfrak{z}_n) - \mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n) \mathfrak{f}(m(\mathfrak{z}_n))\} \cap \mathfrak{z}_n$$

gelten die folgenden Aussagen:

1. Für alle $n \geq 0$ gilt: $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}_n$.
2. Existiert $\mathfrak{B}^{-1}$ für alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{z}_0)$, so konvergiert $\{\mathfrak{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen $\mathfrak{z}$.

Beweis: Behauptung 1. folgt wie in Satz 2. Zum Nachweis von 2. setze man im Beweis von Satz 2 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{z}_0)$ und beachte, daß wegen a) stets $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{z}_0) = \mathfrak{B}$ gilt.

Daß die Verfahren (I*) und (II*) jetzt überlinear konvergieren zeigen die folgenden Aussagen.

Lemma 2: Die Voraussetzungen von Satz 3 und Satz 4 seien erfüllt. Dann gelten für die Folge der Durchmesservektoren $\{d(\mathfrak{z}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ unter Verwendung monotoner und verträglicher Normen die Beziehungen

$$\text{bei (I*)} \quad \|d(\mathfrak{z}_{n+1})\| \leq c_n \|d(\mathfrak{z}_n)\|$$

$$\text{bei (II*)} \quad \|d(\mathfrak{z}_{n+1})\| \leq c'_n \|d(\mathfrak{z}_n)\|$$

$$\text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = 0.$$

Beweis: Die beiden Ungleichungen leiten sich analog wie in Lemma 1 her. Dabei gilt

$$c_n = \frac{1}{2} \|d(\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n))\| \|\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})\|,$$

$$c'_n = \frac{1}{2} \|d(\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n))\| \|\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z})\|.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$ und der Eigenschaft b) der Abschätzung $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}_n)$ folgt die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = 0$.

3. Beispiel

Wir betrachten das folgende einfache System

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} x_1^4 + x_2^4 - 16 \\ x_2 - x_1^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich liegt eine Nullstelle $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{f}$ im ersten Quadranten.

Mit $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 & 4x_2^3 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt für einen Intervallvektor

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{z}:$$

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = \begin{pmatrix} 4X_1^3 & 4X_2^3 \\ -2X_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Inversen von $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ gilt dann

$$\mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) \in \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4X_1^3 + 8X_1X_2^2} & -\frac{X_2^3}{X_1^3 + 2X_1X_2^2} \\ \frac{1}{2X_1^2 + 4X_2^2} & \frac{X_1^2}{X_1^3 + 2X_1X_2^2} \end{pmatrix}.$$

Wählen wir für $\mathfrak{z}_0$ einen Intervallvektor, welcher im ersten Quadranten liegt, so sieht man unmittelbar, daß alle $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}$ invertierbar sind. Also konvergieren die beiden Verfahren (II) und (II*) gegen die Lösung $\mathfrak{z}$, falls $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}_0$ gilt.

$$\text{Wir wählen } \mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [0.25, 2] \end{pmatrix}.$$

In Tabelle 1 sind einige der Iterierten nach Verfahren (II) angegeben.

Tabelle 1

n	X_1	X_2
1	[1, 3]	[0.25, 2]
5	[1.55598633, 1.74898479]	[1.70368002, 1.78265584]
10	[1.64053231, 1.65103107]	[1.70368002, 1.72886820]
20	[1.64740625, 1.64751340]	[1.71413274, 1.71435852]
40	[1.64746445, 1.64746447]	[1.71413913, 1.71413919]

Auf der Maschine gilt $\mathfrak{z}_{39} = \mathfrak{z}_{40}$.

Tabelle 2 enthält die Iterierten nach Verfahren (II*). Die angegebenen Beispiele wurden auf der Rechenanlage ZUSE-23 am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe unter Verwendung der dort vorhandenen Maschinenintervallarithmetik gerechnet.

Tabelle 2

n	X_1	X_2
0	[1, 3]	[0.25, 2]
1	[1, 1.99427003]	[0.423366475, 2]
2	[1.34598501, 1.99427003]	[1.43393270, 2]
3	[1.60298980, 1.66181740]	[1.69298433, 1.74251362]
4	[1.64617637, 1.64910657]	[1.71304539, 1.71539285]
5	[1.64746371, 1.64746524]	[1.71413840, 1.71413996]
6	[1.64746446, 1.64746447]	[1.71413915, 1.71413917]

Alle weiteren Iterierten stimmen mit $\mathfrak{z}_6$ überein.

Bemerkung: Bei Systemen mit mehr als zwei Unbekannten wird man die Intervallmatrix $\mathfrak{B}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ mit einem der bekannten Intervallverfahren invertieren, um eine Intervallmatrix $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) \in \mathfrak{B}$ zu erhalten. Dazu siehe man etwa [3], Seite 25 ff.

Literatur

- G. ALEFELD, und J. HERZBERGER, Über die Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Intervallrechnung. Erscheint in Elektron. Rechenanl. 12 (1970), H. 5.
- U. KULISCH, Grundzüge der Intervallrechnung. In „Überblicke 2“, Mannheim 1968, Bibliographisches Institut.
- R. E. MOORE, Interval Analysis, 1966 Prentice-Hall.

Anschrift: Dr. GÖTZ ALEFELD, Dr. JÜRGEN HERZBERGER, Rechenzentrum und Institut für Angewandte Mathematik der Universität, 75 Karlsruhe, Englerstraße 2